Mecánica

EXAMEN FINAL (10 de junio del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 45 min.

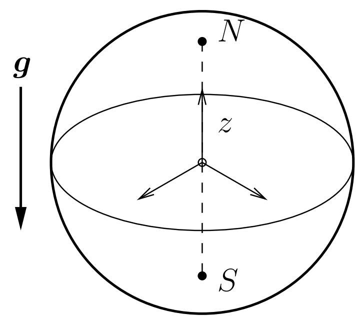
Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Se considera un sistema mecánico conservativo y autónomo. *Enunciar* el concepto de estabilidad del equilibrio. *Justificar* las condiciones para ello. Aplicación: Se considera una partícula pesada ligada a una superficie esférica lisa y fija; *discutir* la estabilidad de las posiciones de equilibrio. (5 ptos.)

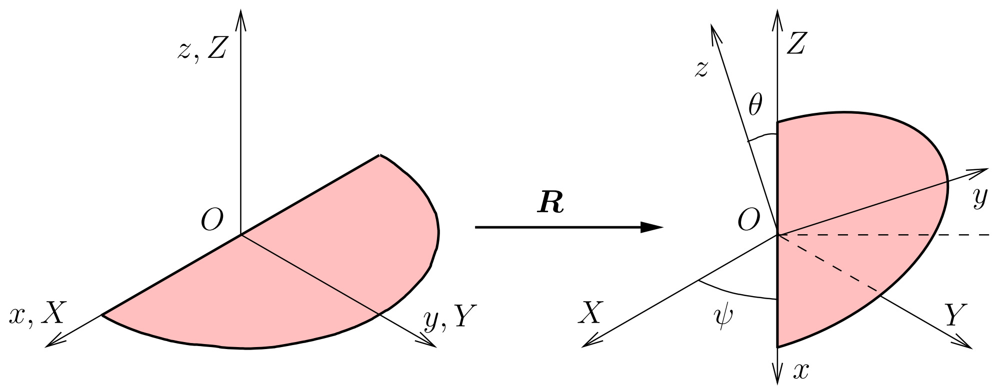
Un sistema material está en *equilibrio* cuando todas sus partículas se encuentran en reposo y permanecen en el mismo estado. El concepto de *estabilidad* se refiere a la respuesta del sistema para una perturbación del equilibrio bien en las coordenadas $\{q_i\}$, o bien en velocidades $\{\dot{q}_i \neq 0\}$, lo que produce una pérdida de la condición de reposo. Se dice que el equilibrio es *estable* cuando la variación subsiguiente respecto de la posición de equilibrio está acotada, llegando a ser tan pequeña como se desee para una perturbación suficientemente pequeña.

Siempre que el potencial tenga un *mínimo local* en la posición de equilibrio éste será estable. La justificación de esta condición puede hacerse de manera sencilla considerando que en el equilibrio la energía (cinética más potencial) se anula, $E = T + V = 0$, tomando sin pérdida de generalidad el cero de potencial V en dicha posición. Una perturbación pequeña producirá un movimiento cuya energía será constante al tratarse de un sistema conservativo, $T + V = \epsilon$. La energía cinética es una magnitud intrínsecamente positiva $T \geq 0$, y la energía potencial cerca de la posición de equilibrio también será positiva al tratarse de un mínimo local, $V \geq 0$. En consecuencia ambas componentes están acotadas por $\epsilon > 0$: $T \leq \epsilon$, $V \leq \epsilon$. Suponiendo el sistema definido mediante coordenadas $\{q_i\}$ y que la función $V(q_i)$ es regular, se deduce directamente que las coordenadas sufrirán perturbaciones pequeñas respecto de la posición de equilibrio, verificándose la estabilidad.

Para la aplicación propuesta es fácil deducir en primer lugar que hay dos posiciones de equilibrio, en los polos N y S de la esfera. El potencial gravitatorio puede expresarse como $V = mgz$, siendo z la coordenada vertical ascendente. Resulta obvio que en el polo N el potencial es un máximo, mientras que en el S se trata de un mínimo. En consecuencia, en N habrá un equilibrio inestable y en S será estable.



Demostrar las propiedades fundamentales del tensor $\boldsymbol{R}$ que define la rotación finita de un sólido rígido. APLICACIÓN: para el caso del semidisco de la figura, *obtener* la matriz de componentes $[\boldsymbol{R}]$ para la rotación que se define, efectuando primero la rotación ψ seguida de la θ. Mediante esta matriz, *expresar* la relación entre las coordenadas de un punto del sólido rotado en el triedro del cuerpo (x, y, z) y en el triedro fijo (X, Y, Z). Discutir si la composición de rotaciones es conmutativa. (5 ptos.)



La característica principal del tensor de rotación es que es *ortogonal* (es decir, su inversa coincide con la traspuesta, $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{1}$) y propio (es decir, $\det \boldsymbol{R} = +1$). La ortogonalidad se deduce de la conservación de las distancias en el sólido rígido. Efectivamente, si un segmento $\boldsymbol{a}$ se transforma en $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{a}$ de igual longitud se debe verificar

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{1}\,.$$

El determinante de un tensor ortogonal puede valer ± 1. En el caso de la rotación debe tener signo positivo $(+1)$ con objeto de mantener la orientación de los triedros y evitar la inversión del volumen.

En la aplicación pedida interpretaremos las rotaciones mediante su acción consecutiva sobre el triedro original $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}) = (\boldsymbol{E}_i)$, para obtener primeramente el triedro $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{K})$ (rotación $\psi\, \boldsymbol{K}$) y finalmente $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{e}_i)$ (rotación $\theta\, \boldsymbol{i}$):

$$[\boldsymbol{R}_1(\psi)] = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad [\boldsymbol{R}_2(\theta)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix}[\boldsymbol{R}_1(\psi)] \\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix}[\boldsymbol{R}_2(\theta)] \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix} \underbrace{[\boldsymbol{R}_1(\psi)][\boldsymbol{R}_2(\theta)]}_{[\boldsymbol{R}]}$$

resultando

$$\boxed{[\boldsymbol{R}] = [\boldsymbol{R}_1(\psi)][\boldsymbol{R}_2(\theta)] = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi\cos\theta & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.}$$

Un punto del cuerpo en la posición rotada se puede representar mediante sus coordenadas en el triedro fijo en el espacio $(X, Y, Z)^{\mathrm{T}} = \{X_i\}$ (coordenadas espaciales) o en el triedro fijo en el cuerpo $(x, y, z)^{\mathrm{T}} = \{x_i\}$ (coordenadas materiales). Estas últimas son constantes para un punto material dado. Al superponerse ambos triedros en el instante inicial, las coordenadas materiales coinciden con las espaciales iniciales $\{x_i\} = \{X_i^0\}$. La equivalencia de la expresión vectorial en ambas bases permite obtener la relación de coordenadas que define la rotación:

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{E}_i)\{X_i\} = (\boldsymbol{e}_i)\{x_i\} = (\boldsymbol{E}_i)[\boldsymbol{R}]\{x_i\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\{X_i\} = [\boldsymbol{R}]\{x_i\} = [\boldsymbol{R}]\{X_i^0\}\,.}$$

Es fácil deducir que la composición de rotaciones *no es conmutativa*, ya que el producto de matrices que la define tampoco lo es.