Mecánica

EXAMEN RECUPERACIÓN 4P (4 de septiembre del 2006)

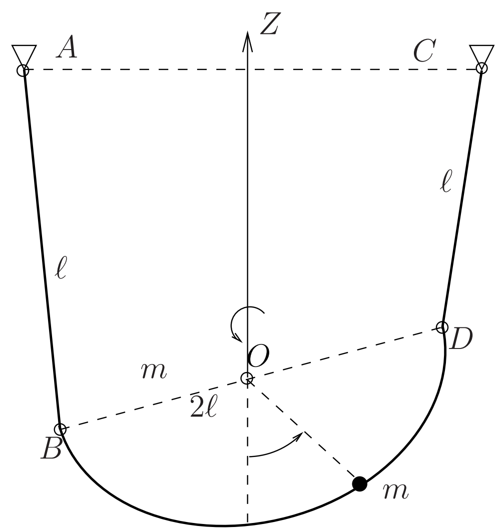
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un semiaro circular BD de masa m y diámetro 2ℓ tiene sus extremos articulados a dos varillas AB y CD de masa despreciable y longitud ℓ. Los extremos A y C de las varillas están articulados y fijos en la misma horizontal a distancia 2ℓ. El semiaro se mantiene constantemente vertical, y su centro O del semiaro está obligado a moverse según la vertical OZ. Ensartada en el semiaro se mueve sin rozamiento una masa puntual m.

Se pide:

1. Expresar la velocidad de O en función del ángulo girado por BD alrededor del eje OZ y calcular la energía cinética del sistema.
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento, linealizadas para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, obteniendo las frecuencias propias del sistema.



1.— El sistema tiene dos grados de libertad, el ángulo ψ girado por el plano del semiaro alrededor de Oz y el ángulo θ girado por la partícula relativo al semiaro dentro de un plano vertical. Al producirse el giro ψ el diámetro BD queda obligado a un desplazamiento vertical definido por la coordenada de su centro z_O, que puede definirse a partir de los triángulos rectángulos iguales $AA'B$ y $CC'D$:

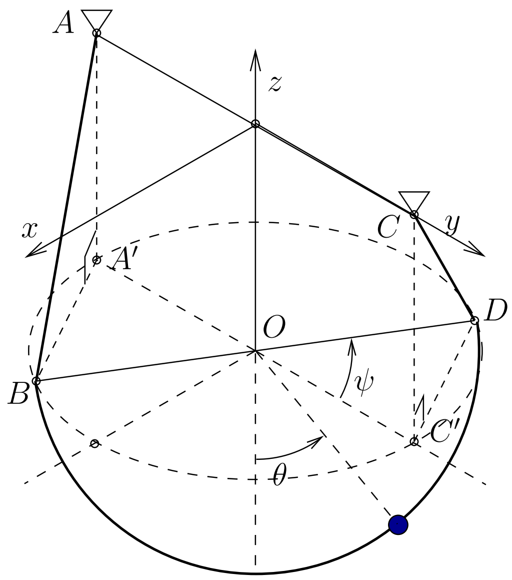
$$\overline{CC'} = |z_O|; \quad \overline{CD} = \ell; \quad \overline{C'D} = 2\ell\,\mathrm{sen}(\psi/2)\,.$$

$$z_O^2 = \ell^2 - (2\ell\,\mathrm{sen}(\psi/2))^2 = \ell^2(2\cos\psi - 1)\,,$$

resultando finalmente

$$z_O = -\ell\sqrt{2\cos\psi - 1}\,;$$

$$\dot{z}_O = \ell\dot{\psi}\frac{\mathrm{sen}\,\psi}{\sqrt{2\cos\psi - 1}}\,.$$



2.— Obtendremos las ecuaciones linealizadas directamente a partir de las expresiones de la energía cinética y potencial. Las energías cinéticas de aro y partícula son respectivamente

$$T_{\text{aro}} = \frac{1}{2}m\dot{z}_O^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\ell^2\right)\dot{\psi}^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\psi}^2\left(\frac{\mathrm{sen}^2\,\psi}{2\cos\psi - 1} + \frac{1}{2}\right)\,;$$

$$T_{\text{part}} = \frac{1}{2}m\left[(\dot{z}_O + \ell\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + (\ell\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\ell\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\psi})^2\right]\,.$$

La expresión de la energía cinética es por tanto

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\left[\dot{\psi}^2\left(\frac{2\operatorname{sen}^2\psi}{2\cos\psi - 1} + \frac{1}{2} + \operatorname{sen}^2\theta\right) + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\frac{\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2\cos\psi - 1}}\right].$$

La energía potencial vale

$$V = mgz_O + mg(z_O - \ell(\cos\theta - 1)) = -2mg\ell\sqrt{2\cos\psi - 1} - mg\ell\cos\theta\,.$$

La forma más directa y sencilla de obtener las ecuaciones linealizadas es derivar las expresiones de T (coeficientes de la matriz de masa) y V (matriz de rigidez) y particularizar en la posición de equilibrio. Esta posición es obviamente la que corresponde a $\psi = 0$, $\theta = 0$. Derivando:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\psi}^2} = m\ell^2\left(\frac{2\operatorname{sen}^2\psi}{2\cos\psi - 1} + \frac{1}{2} + \operatorname{sen}^2\theta\right); \quad \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}^2} = m\ell^2\,; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\psi}\dot{\theta}} = m\ell^2\frac{\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2\cos\psi - 1}}\,;$$

$$[\mathbf{M}] = [m_{ij}] = \left[\left.\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right|_{(0,0)}\right] = m\ell^2\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2} = 2mg\ell\frac{\cos\psi(2\cos\psi - 1) + \operatorname{sen}^2\psi}{(2\cos\psi - 1)^{3/2}}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = mg\ell\,; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\psi\theta} = 0\,;$$

$$[\mathbf{K}] = [k_{ij}] = \left[\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right|_{(0,0)}\right] = mg\ell\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones linealizadas resultan por tanto desacopladas,

$$[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\frac{1}{2}m\ell^2\ddot{\psi} + 2mg\ell\psi = 0\\ m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\theta = 0\,.\end{cases}$$

Las frecuencias propias se obtienen trivialmente,

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,.$$