Mecánica

2º EXAMEN PARCIAL (9 de junio de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 3º Tiempo: 60 min.

Sea un cono de revolución de masa M, radio R y semiángulo cónico $\alpha = 30^\circ$ que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. En el perímetro exterior de la base dispone de una masa puntual $m = 3M/10$ rígidamente unida al mismo, sin que estorbe su rodadura.

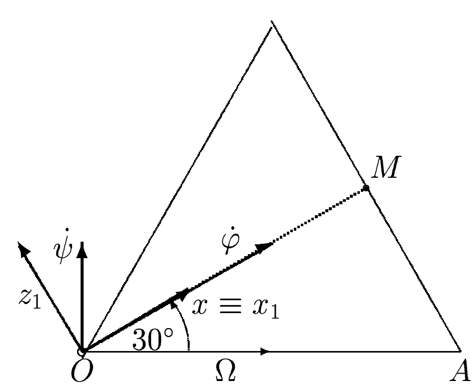
Se define un sistema de referencia $Oxyz$ unido rígidamente al cono, siendo O el vértice, de forma que Ox es el eje de revolución y Oy es paralelo en todo instante al radio que une el centro de la base con la masa puntual. En el instante inicial este radio está horizontal y el cono en reposo.

Se pide:

1. Definir de forma completa el movimiento del sólido mediante coordenadas generalizadas libres.
2. Expresar la velocidad angular en los ejes $Oxyz$ para un instante genérico, en función de dichas coordenadas y sus derivadas.
3. Expresar la energía cinética del sistema en un instante genérico.
4. Obtener las ecuaciones que definen el movimiento.
5. Calcular la velocidad angular cuando la masa puntual esté en contacto con el plano.

1.- Al rodar el cono su vértice O permanece fijo y la generatriz de contacto describe un movimiento circular. El movimiento del sólido se puede describir mediante una rotación propia (φ) alrededor del eje de revolución del cono y una rotación (ψ) alrededor del eje vertical por O, perpendicular al plano.
La condición de rodadura sin deslizamiento establece una relación entre estas dos rotaciones, que no son independientes. Estableciendo la velocidad nula del extremo de la base en contacto con el plano (A),

$$\dot{\varphi} R + \dot{\psi}\frac{R}{\operatorname{sen}\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = -\dot{\varphi}\operatorname{sen}\alpha$$



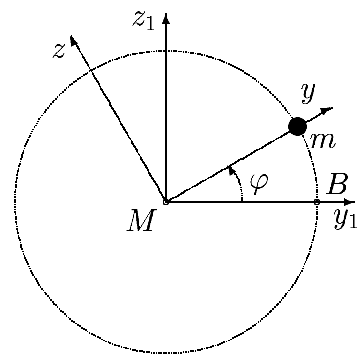
El sistema tiene pues un sólo grado de libertad, que tomaremos como la rotación φ alrededor del eje de revolución del cono.

2.- La figura anterior representa un plano vertical por la generatriz de rodadura del cono. Tomemos unos ejes $Ox_1 \equiv Ox$ según el eje del cono, Oy_1 paralelo al radio horizontal de la base (perpendicular a la figura, hacia dentro) y Oz_1 perpendicular a los anteriores, en el plano de la figura. Los ejes (Oy_1, Oz_1) no participan de la rotación propia del sólido, por lo que sólo coinciden con los (Oy, Oz) del sólido en el instante inicial.

Expresaremos en primer lugar la velocidad angular en los ejes $Ox_1y_1z_1$, proyectando en la figura anterior:

$$\begin{aligned} \Omega_{x_1} &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \operatorname{sen} \alpha = \dot{\varphi}(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \dot{\varphi} \cos^2 \alpha \\ \Omega_{y_1} &= 0 \\ \Omega_{z_1} &= \dot{\psi} \cos \alpha = -\dot{\varphi} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \end{aligned} \tag{1}$$

proyectando de nuevo en una posición genérica φ obtenemos las componentes en los ejes $Oxyz$:



$$\begin{aligned} \Omega_y &= \Omega_{y_1} \cos \varphi + \Omega_{z_1} \operatorname{sen} \varphi \\ \Omega_z &= -\Omega_{y_1} \operatorname{sen} \varphi + \Omega_{z_1} \cos \varphi \end{aligned} \tag{2}$$

Por lo que, en los ejes pedidos, la velocidad angular resulta

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{sen} \varphi, -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos \varphi) \tag{3}$$

3.- El tensor de inercia del cono (sin masa puntual) en los ejes citados tiene las componentes

$$(\boldsymbol{I}_O)_{\text{cono}} = \frac{3M}{10} \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2h^2 + \frac{R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2h^2 + \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

donde $h = R\sqrt{3}$ es la altura del cono. El tensor correspondiente a la masa m se obtiene, a partir de su posición $\boldsymbol{r} = (h, R, 0)$, mediante la expresión tensorial

$$(\boldsymbol{I}_O)_{\text{masa}} = m(r^2 \mathbf{1} - \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r}) = m \begin{pmatrix} R^2 & -hR & 0 \\ -hR & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 + R^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Sumando ambos resulta

$$\boldsymbol{I}_O = mR^2 \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 19/2 & 0 \\ 0 & 0 & 21/2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Obtenemos la energía cinética directamente a partir de (3) y (6):

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{18}{16} + \frac{57}{32} \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{63}{32} \cos^2 \varphi + \frac{18}{16} \operatorname{sen} \varphi \right) \tag{7}$$

4.- El sistema es conservativo, por lo que basta la ecuación de conservación de la energía total para definir el movimiento. El incremento de potencial en una posición genérica en función del de partida es $V = mgR \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi$, por lo que la ecuación es:

$$0 = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{18}{16} + \frac{57}{32} \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{63}{32} \cos^2 \varphi + \frac{18}{16} \operatorname{sen} \varphi \right) + mgR \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \varphi \tag{8}$$

5.- Cuando la masa m está en contacto con el plano, la posición es $\varphi = -90°$. Particularizando en (8),

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{32\sqrt{3}}{57}\frac{g}{R},$$

y teniendo en cuenta que por (3) $\Omega^2 = (12/16)\dot{\varphi}^2$,

$$\Omega^2 = \frac{8\sqrt{3}}{19}\frac{g}{R}.$$