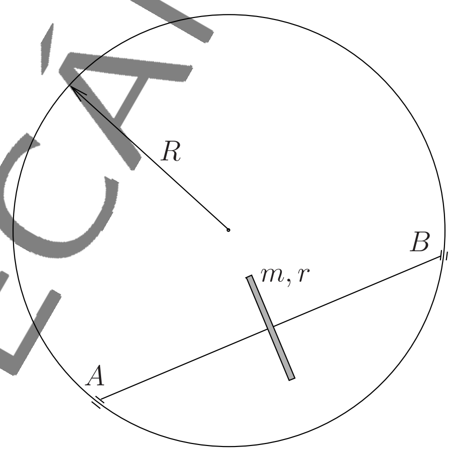
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (24 de marzo del 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un disco pesado, de masa m y radio r, se encuentra unido perpendicularmente en su centro al punto medio de una barra AB, de masa despreciable y longitud $R\sqrt{3}$. Los extremos de esta barra pueden deslizar libremente sobre una circunferencia vertical, fija y lisa, de radio R. El disco puede girar libremente alrededor de AB. Se pide:



1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento del sistema, y en su caso obtenerlas en función de los grados de libertad y sus derivadas;

2. Obtener las reacciones que ejerce la circunferencia fija en A y B.

---

1. El sólido rígido formado por la varilla AB y el disco tiene dos grados de libertad, que representamos mediante el giro θ de la varilla AB y el giro φ del solido alrededor de aquella. Definimos por conveniencia un sistema móvil auxiliar en el centro de masa $\{G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ ortonormal, donde $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección de AB, $\boldsymbol{i}$ es perpendicular al plano de la circunferencia vertical fija y $\boldsymbol{j}$ está contenido en este plano de forma que define un triedro a derechas con los anteriores, como muestra la figura adjunta.

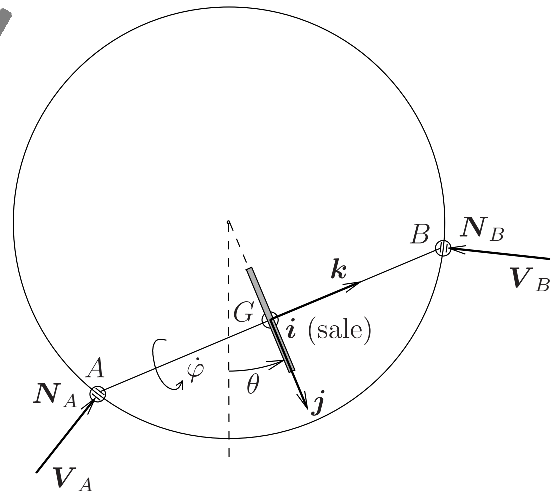


Figura 1: *Definición los grados de libertad y del sistema móvil auxiliar*

Existen dos integrales primeras. La primera es la conservación de la proyección del momento cinético del sólido en G según el eje de revolución AB, ya que todas las fuerzas que actúan (peso y reacciones en A y B) lo cortan. Teniendo en cuenta que el tensor de inercia en G se expresa en el sistema móvil como:

$$\boldsymbol{I}_G = \frac{1}{4}mr^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

y la velocidad de rotación como

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\theta \boldsymbol{i} + \dot\varphi \boldsymbol{k} \tag{2}$$

esta integral primera se expresa finalmente como:

$$\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{k} = cte. \qquad \rightarrow \qquad \dot\varphi = cte.$$

La otra integral primera es la conservación de la energía total, ya que la única fuerza que trabaja, el peso, es conservativa:

$$E = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) + V$$

Teniendo en cuenta (1), (2), que $\boldsymbol{v}_G = (R/2)\dot{\theta}\boldsymbol{k}$ y $V = -mg(R/2)\cos\theta$, tomado como origen de potencial gravitatorio el plano horizontal que pasa por el centro de la circunferencia fija, resulta:

$$E = \frac{1}{8}m(R^2 + r^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 - mg\frac{R}{2}\cos\theta = cte.$$

2. Puesto que la circunferencia fija es lisa, cada una de las reacciones $\boldsymbol{R}_A$ y $\boldsymbol{R}_B$ tiene una componente en dirección radial (V_A y V_B respectivamente) y otra perpendicular el plano de la circunferencia (N_A y N_B respectivamente):

$$\boldsymbol{R}_A = N_A\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}V_A\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}V_A\boldsymbol{k} \quad , \qquad \boldsymbol{R}_B = N_B\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}V_B\boldsymbol{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}V_B\boldsymbol{k}$$

La aplicación del principio de cantidad de movimiento en el plano vertical permite obtener las componentes radiales (V_A, V_B) de las reacciones. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{a}_G = -(R/2)\dot{\theta}^2\boldsymbol{j} + (R/2)\ddot{\theta}\boldsymbol{k}$ y que el peso $\boldsymbol{P} = mg(\cos\theta\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k})$, se obtiene:

$$(\boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_B + \boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{j} = m\boldsymbol{a}_G \cdot \boldsymbol{j} \quad \rightarrow \qquad mg\cos\theta - \frac{1}{2}V_A - \frac{1}{2}V_B = -m\frac{R}{2}\dot{\theta}^2$$
$$(\boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_B + \boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{k} = m\boldsymbol{a}_G \cdot \boldsymbol{k} \quad \rightarrow \qquad -mg\operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}V_A - \frac{\sqrt{3}}{2}V_B = m\frac{R}{2}\ddot{\theta}$$

que permiten despejar V_A y V_B en función de θ y sus derivadas.

La ecuación de cantidad de movimiento en dirección $\boldsymbol{i}$ perpendicular al plano de la circunferencia establece que $N_A + N_B = 0$. Por otro lado, la aplicación del principio del momento cinético en el centro O de la circunferencia fija según la vertical permite obtener otra relación entre estas dos componentes de la reacción:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt} \cdot \boldsymbol{K} = \frac{d(\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K})}{dt} = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{K} = -N_A R\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - N_B R\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = N_A R\sqrt{3}\cos\theta \tag{3}$$

El momento cinético en el punto fijo O puede obtenerse a partir del de G:

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{GO}$$

y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{GO} = -(R/2)\boldsymbol{j}$ y que $\boldsymbol{K} = -\cos\theta\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k}$, resulta:

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta \tag{4}$$

Obsérvese que O es no es un punto material fijo del sólido, si no que es solamente un punto fijo del espacio, por lo que en este caso no sería correcto expresar $\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$.

Finalmente, teniendo en cuenta (3), (4) y que $\ddot{\varphi} = 0$, se obtienen las otras dos componentes buscadas:

$$N_A = -N_B = \frac{mr^2}{2R\sqrt{3}}\dot{\varphi}\dot{\theta}$$