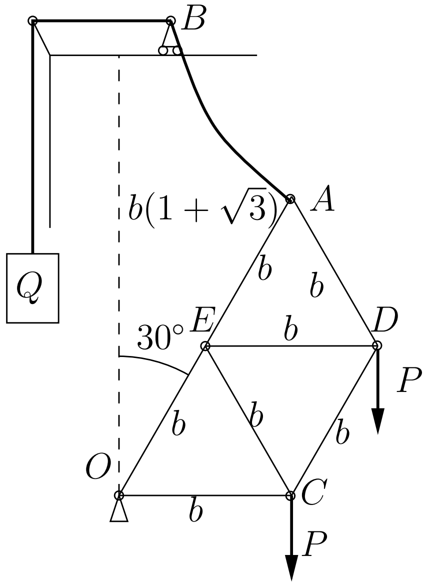
Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL (22 de junio del 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30 ó 10/45) Tiempo: 60 min.

Se considera una estructura de barras articuladas siendo la longitud de cada barra b y su peso despreciable. Para izar dicha estructura manteniendo uno de sus extremos O en una articulación fija se utiliza un cable en la forma que se indica en la figura. Dicho cable es homogéneo, perfectamente flexible e inextensible, de longitud $2b$ y peso total P. Un extremo se une a la articulación A, mientras que el otro extremo B del cable está anclado a una deslizadera situada a una altura $b(1+\sqrt{3})$ respecto de O y se sujeta con un contrapeso Q. En los puntos C y D de la estructura actúan sendos pesos P. Se pide:



1. Obtener la configuración de equilibrio del cable y el valor del contrapeso Q necesario para que sea posible el equilibrio en la posición de la estructura tal que OA forme 30° con la vertical. Calcular la distancia horizontal entre los extremos A y B del cable.

2. Calcular la reacción en la articulación O y los esfuerzos en las barras AD y AE.

1.— El cable forma un arco de catenaria entre A y B, cuyas acciones sobre la estructura en A son la tensión horizontal $T_0 = Q$ y la vertical $T_{z,A}$. El equilibrio de la estructura se puede expresar mediante la ecuación del momento en O:

$$Pb + P(b + b/2) = T_{z,A}b + Qb\sqrt{3}\,. \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que $T_{z,A} = qa\,\mathrm{senh}(x_A/a)$ y $T_0 = Q = qa$, siendo $q = P/(2b)$, se puede expresar como

$$\mathrm{senh}\left(\frac{x_A}{a}\right) = 5\frac{b}{a} - \sqrt{3}\,. \tag{2}$$

Otra ecuación se puede obtener de la expresión de la longitud del cable entre A y B:

$$2b = a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_B}{a} - a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_A}{a}\,. \tag{3}$$

Asimismo, teniendo en cuenta que la diferencia de cotas entre A y B es $(1+\sqrt{3})b - \sqrt{3}b = b$, resulta:

$$b = a\cosh\frac{x_B}{a} - a\cosh\frac{x_A}{a}\,. \tag{4}$$

El problema queda planteado con las tres ecuaciones (2), (3), (4) para las tres incógnitas (a, x_A, x_B). Para operar con ellas y simplificar las expresiones denominaremos en lo que sigue $\alpha = x_A/a$, $\beta = x_B/a$ y $\delta = b/a$:

$$\mathrm{senh}\,\alpha = 5\delta - \sqrt{3}\,; \tag{5}$$

$$2\delta = \mathrm{senh}\,\beta - \mathrm{senh}\,\alpha\,; \tag{6}$$

$$\delta = \cosh\beta - \cosh\alpha\,. \tag{7}$$

Eliminando $\operatorname{senh}\alpha$ mediante (5) en (6) y (7):

$$\operatorname{senh}\beta = 7\delta - \sqrt{3}\,; \tag{8}$$

$$\cosh\beta = \delta + \sqrt{1 + (5\delta - \sqrt{3})^2}\,. \tag{9}$$

Combinando estas dos ecuaciones mediante la expresión $\cosh^2\beta = 1 + \operatorname{senh}^2\beta$ se obtiene:

$$\delta^2 + \left[1 + (5\delta - \sqrt{3})^2\right] + 2\delta\sqrt{1 + (5\delta - \sqrt{3})^2} = 1 + (7\delta - \sqrt{3})^2\,. \tag{10}$$

Aislando la raíz cuadrada y elevando al cuadrado resulta una ecuación cuadrática en δ con dos soluciones posibles:

$$429\delta^2 - 144\sqrt{3}\delta + 32 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = 0{,}19114\,,\ \delta_2 = 0{,}39025\,. \tag{11}$$

La solución δ_1 no es válida, ya que sustituyendo en las ecuaciones (5), (6) y (7) se comprueba que no se cumplen. Esta solución espuria ha sido introducida al elevar al cuadrado las expresiones anteriores. Por tanto, la única solución es

$$\delta = 0{,}39025 \quad \Rightarrow \quad a = 2{,}56248b\,. \tag{12}$$

El resto de parámetros del cable se deduce inmediatamente:

$$Q = 1{,}2812P\,;\ x_B = 2{,}2579b\,;\ x_A = 0{,}5573b\,;\ x_B - x_A = 1{,}7007b\,;\ T_{z,A} = 0{,}2808P\,. \tag{13}$$

2.— Las componentes de la reacción en O se obtienen mediante las ecuaciones de equilibrio de la estructura:

$$\begin{aligned} R_x &= Q = 1{,}2812P\,; \\ R_z &= 2P - T_{z,A} = 1{,}7192P\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Finalmente, para obtener las tensiones en las barras expresamos las ecuaciones de equilibrio en el nudo A:

$$-\frac{1}{2}T_{AE} + \frac{1}{2}T_{AD} = Q\,, \tag{15}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_{AE} + \frac{\sqrt{3}}{2}T_{AD} = T_{z,A}\,. \tag{16}$$

Resolviendo estas ecuaciones resulta:

$$T_{AD} = 1{,}4434P\,; \quad T_{AE} = -1{,}1191P\,. \tag{17}$$