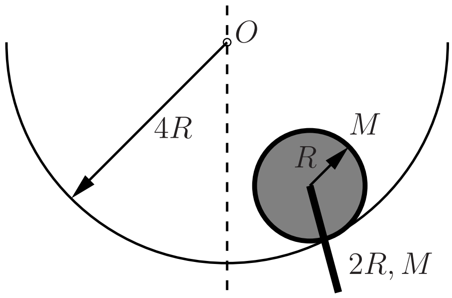
Mecánica

EXAMEN DE RECUPERACIÓN 4.º PARCIAL (10 de septiembre del 2007)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

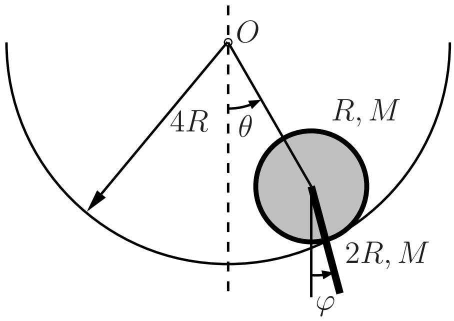
Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

En un plano vertical fijo, un disco de radio R y masa M rueda sin deslizar sobre el interior de un aro fijo de radio $4R$. Desde el centro del disco cuelga articulada una varilla de longitud $2R$, con igual masa M que la del disco, que tampoco puede salirse del plano vertical. Se pide:



1. Determinar las ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Determinar razonadamente la posición de equilibrio estable y las ecuaciones del movimiento linealizadas alrededor de esa posición. Calcular las frecuencias propias y los modos normales de vibración.
3. Fruto de una percusión externa con el sistema en la posición de equilibrio estable, el disco adquiere una velocidad de rotación ω_0 y la varilla una velocidad de rotación $(3/4)\omega_0$. Admitiendo la hipótesis de pequeñas oscilaciones integrar las ecuaciones del sistema para expresar los grados de libertad en función del tiempo.

1.- El sistema tiene dos grados de libertad. Se escoge el conjunto de coordenadas $\{\theta, \varphi\}$, según la figura, para el que se obtendrán las ecuaciones de Lagrange.



La energía potencial del sistema se puede escribir como

$$V = \underbrace{Mg(-3R\cos\theta)}_{\text{disco}} + \underbrace{Mg(-3R\cos\theta - R\cos\varphi)}_{\text{varilla}}. \quad (1)$$

Por otra parte, la energía cinética del disco es

$$T_\mathrm{d} = \frac{1}{2}Mv_{G,d}^2 + \frac{1}{2}I_{G,\mathrm{d}}\dot{\Omega}_\mathrm{d}^2, \quad (2)$$

siendo $v_{G,d}^2 = (3R\dot{\theta})^2$ el cuadrado de la velocidad del centro de masa del disco, $\Omega_\mathrm{d}^2 = (3\dot{\theta})^2$ el cuadrado de velocidad angular teniendo en cuenta que el disco rueda sin deslizar, e $I_{G,\mathrm{d}} = MR^2/2$ el momento de inercia del disco en su centro de masa. Análogamente, la energía cinética de la varilla es

$$T_\mathrm{v} = \frac{1}{2}Mv_{G,\mathrm{v}}^2 + \frac{1}{2}I_{G,\mathrm{v}}\dot{\varphi}^2, \quad (3)$$

siendo $v_{G,\mathrm{v}}^2 = (3R\dot{\theta})^2 + (R\dot{\varphi})^2 + 2(3R\dot{\theta})(R\dot{\varphi})\cos(\theta-\varphi)$ e $I_{G,\mathrm{v}} = M(2R)^2/12$.

Por tanto, la Lagrangiana resulta

$$L = (T_\mathrm{d}+T_\mathrm{v}) - V = \frac{45}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{2}{3}MR^2\dot{\varphi}^2 + 3MR^2\cos(\theta-\varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi} + 6MgRcos\theta + MgRcos\varphi. \quad (4)$$

Se obtienen las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{45}{2}MR^2\ddot{\theta} + 3MR^2\cos(\theta-\varphi)\ddot{\varphi} + 3MR^2\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)\dot{\varphi}^2 + 6MgR\,\mathrm{sen}\,\theta = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{4}{3}MR^2\ddot{\varphi} + 3MR^2\cos(\theta-\varphi)\ddot{\theta} - 3MR^2\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)\dot{\theta}^2 + MgR\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0. \quad (6)$$

2.- La posición de equilibrio estable se corresponde con la de mínima energía potencial, y por tanto con la de menor altura del centro de gravedad del conjunto. Esto es, $\theta = \varphi = 0$.

El sistema de ecuaciones para pequeñas oscilaciones alrededor de esta posición es

$$\left\{\begin{aligned} \frac{45}{2}MR^2\ddot{\theta} + 3MR^2\ddot{\varphi} + 6MgR\theta &= 0, \\ 3MR^2\ddot{\theta} + \frac{4}{3}MR^2\ddot{\varphi} + MgR\varphi &= 0. \end{aligned}\right. \quad (7)$$

En forma matricial, $[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{0}\}$, siendo la matriz de masa y la matriz de rigidez:

$$[\mathbf{M}] = MR^2\begin{pmatrix} \frac{45}{2} & 3 \\ 3 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{K}] = MgR\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Las frecuencias naturales del sistema se obtienen resolviendo la ecuación de segundo grado en ω^2, $\det(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) = 0$, llegándose a las soluciones

$$\omega_1 = 1{,}1035\sqrt{g/R} \quad \text{y} \quad \omega_2 = 0{,}4844\sqrt{g/R}. \quad (9)$$

Los modos normales de vibración se corresponden con vectores no nulos que verifiquen $(-\omega_k^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}_k\} = \{\mathbf{0}\}$. Se proponen los autovectores

$$\{\mathbf{a}_1\} = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ -5{,}8576 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \{\mathbf{a}_2\} = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 1{,}0243 \end{array}\right\}. \quad (10)$$

3.- Por último, la solución del sistema se ecuaciones diferenciales se puede expresar directamente en función de las condiciones iniciales como

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{M_k}\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\frac{1}{\omega_k}\{\dot{\mathbf{q}}_0\}\,\mathrm{sen}(\omega_k t)\{\mathbf{a}_k\}, \quad (11)$$

siendo $M_k = \{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}$, y $\{\dot{\mathbf{q}}_0\}$ el vector columna de velocidades iniciales de las coordenadas generalizadas. En nuestro caso:

$$M_1 = 33{,}1034MR^2, \quad M_2 = 30{,}0448MR^2, \quad \text{y} \quad (12)$$

$$\{\dot{\mathbf{q}}_0\} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\varphi}_0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -(1/3)\Omega_{d0} \\ \dot{\varphi}_0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -(1/3)\omega_0 \\ (3/4)\omega_0 \end{array}\right\}. \quad (13)$$

Operando, resulta

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \omega_0\sqrt{R/g}\Big(-0{,}1437\,\mathrm{sen}(\omega_1 t)\{\mathbf{a}_1\} - 0{,}3607\,\mathrm{sen}(\omega_2 t)\{\mathbf{a}_2\}\Big). \quad (14)$$