Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE SEPTIEMBRE (16 de Septiembre de 1997)

Apellidos *Nombre* *N”o* *Grupo*

Ejercicio 1”o Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

Demostrar que si una partícula está sometida a un campo de fuerzas central: a) Su trayectoria es plana; b) Su velocidad areolar es constante. (2.5 ptos.)

Si aplicamos el teorema del momento cinético respecto del foco del campo, (al que llamaremos O), como las fuerzas dan momento nulo, se conservará el momento cinético:

$$\boldsymbol{H}_O(t) = \boldsymbol{H}_O(0) = H_O\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r} \wedge m\boldsymbol{v}$$

Como $\boldsymbol{n}$ es un versor constante, $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{v}$ tienen que permanecer en el plano perpendicular a él, luego el movimiento será plano (definido por la posición y velocidad iniciales).

Tenemos

$$H_O\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r} \wedge m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2m\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}$$

donde hemos llamado S al área barrida por el radio vector. Vemos que la velocidad areolar $(\mathrm{d}S/\mathrm{d}t)$ resulta constante $= H_0/2m$.

Deducir la expresión del teorema del momento cinético en el SCM. (2.5 ptos.)

Calculemos el momento cinético en G en el SCM:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_G^{SCM} &= \Sigma(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) \wedge m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_G) \\
&= \Sigma\boldsymbol{r}_i \wedge m_i\boldsymbol{v}_i - \Sigma\boldsymbol{r}_i \wedge m_i\boldsymbol{v}_G - \boldsymbol{r}_G \wedge \Sigma m_i\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{r}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G \\
&= \boldsymbol{H}_O - \boldsymbol{r}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G
\end{aligned}$$

que resulta ser igual a $\boldsymbol{H}_G$, calculado con las velocidades absolutas. Derivando obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G - \boldsymbol{r}_G \wedge M\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{M}_O - \boldsymbol{r}_G \wedge \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}_G$$

Expresar en el triedro intrínseco las componentes de la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve sobre una hélice cilíndrica de ecuaciones:

$$x = R\cos\theta \qquad y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = K\theta$$

(5 ptos.)

Los valores pedidos corresponden a:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v\,\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{t} + \frac{v^2}{\rho}\,\boldsymbol{n} \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \dot{\theta}\sqrt{R^2 + K^2}$$

Se sabe que

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \ddot{\theta}\sqrt{R^2 + K^2} \\ a_n &= \sqrt{a^2 - a_t^2} \end{aligned}$$

donde

$$a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 = R^2\dot{\theta}^4 + (R^2 + K^2)\,\ddot{\theta}^2$$

Resultando finalmente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \sqrt{R^2 + K^2}\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{a} &= \sqrt{R^2 + K^2}\,\ddot{\theta}\,\boldsymbol{t} + R\dot{\theta}^2\,\boldsymbol{n} \end{aligned}$$