Mecánica

EXAMEN PARCIAL (5 de diciembre del 2007)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

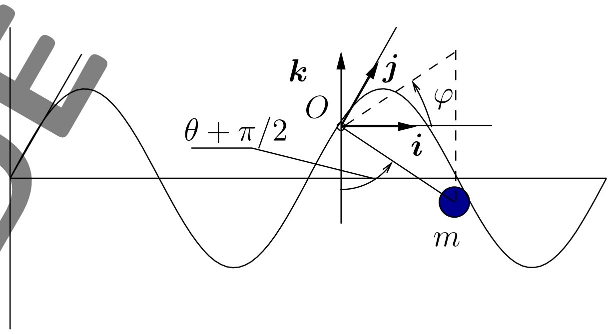
Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una partícula pesada de masa m se encuentra articulada a un punto O a través de una varilla rígida de masa despreciable y longitud a. Este punto O tiene un movimiento conocido, cuya trayectoria es la curva $z = A \operatorname{sen} x$, siendo $x(t) = v_0 t$ con $v_0 = cte$. La varilla tiene el movimiento más general posible en el espacio tridimensional respetando la ligadura sobre su extremo O. Se pide:

1. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento de la partícula en función de sus grados de libertad y sus derivadas;
2. Obtener la reacción que ejerce la curva sobre el extremo O de la varilla;
3. Obtener las expresiones de la velocidad de rotación y de la aceleración angular de la varilla en función de sus grados de libertad y sus derivadas.

⋆

1. El sistema tiene dos grados de libertad, que podemos representar mediante las coordenadas esféricas (φ, θ) respecto de un sistema auxiliar móvil $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ con origen en el extremo O de la varilla y de ejes paralelos a los fijos.



Puesto que la varilla no tiene masa, la acción que ejerce sobre la partícula lleva la dirección de la propia varilla. Por tanto, el planteamiento del principio de cantidad de movimiento según dos direcciones de un plano perpendicular a la varilla proporciona directamente las dos ecuaciones del movimiento buscadas. Este plano es el generado por los vectores $\boldsymbol{u}_\varphi$ y $\boldsymbol{u}_\theta$ de la base natural de las coordenadas esféricas respecto de O. Denotando por $\boldsymbol{P}$ el peso, las ecuaciones se expresan:

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u}_\varphi = m a_\varphi \quad , \qquad \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u}_\theta = m a_\theta \tag{1}$$

Hay que tener en cuenta que $\boldsymbol{P} = -mg\boldsymbol{k}$, y que $\boldsymbol{k} = \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}_r + \cos\theta \boldsymbol{u}_\theta$. Además, puesto que el sistema móvil auxiliar tiene un movimiento de traslación:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{rel} + \underbrace{\boldsymbol{a}_{arr}}_{= \boldsymbol{a}_O} + \underbrace{\boldsymbol{a}_{cor}}_{= \boldsymbol{0}}$$

$$\boldsymbol{a}_{rel} = (-a\dot{\varphi}^2 \cos^2\theta - a\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (-2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + a\ddot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{u}_\varphi + (a\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + a\ddot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta$$

$$\boldsymbol{a}_O = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{z}\boldsymbol{k} = -Av_0^2 \operatorname{sen}(v_0 t)\ \boldsymbol{k}$$

Introduciendo estos resultados en (1) se obtienen las dos ecuaciones del movimiento:

$$-2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + a\ddot{\varphi}\cos\theta = 0$$

$$a\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + a\ddot{\theta} - Av_0^2 \operatorname{sen}(v_0 t)\cos\theta = -g\cos\theta$$

2. La reacción $\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{u}_r$ que ejerce la varilla sobre la partícula se obtiene del planteamiento del principio de cantidad de movimiento según la propia varilla: $T + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}_r = ma_r$, resultando:

$$T = mg\,\mathrm{sen}\,\theta - m\left(a\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + a\dot{\theta}^2 + Av_0^2\,\mathrm{sen}(v_0 t)\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

La reacción que ejerce la curva sobre el extremo O es la misma, puesto que la varilla no tiene masa.

3. La rotación de la varilla es la composición de dos rotaciones de magnitud $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$ respectivamente:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k} - \dot{\theta}\boldsymbol{u}_\varphi = \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi\boldsymbol{i} - \dot{\theta}\cos\varphi\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \quad , \tag{2}$$

y la aceleración angular se obtiene simplemente derivando las componentes en (2), ya que el sistema móvil auxiliar no gira:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{i} - (\ddot{\theta}\cos\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi)\boldsymbol{j} + \ddot{\varphi}\boldsymbol{k}$$