Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

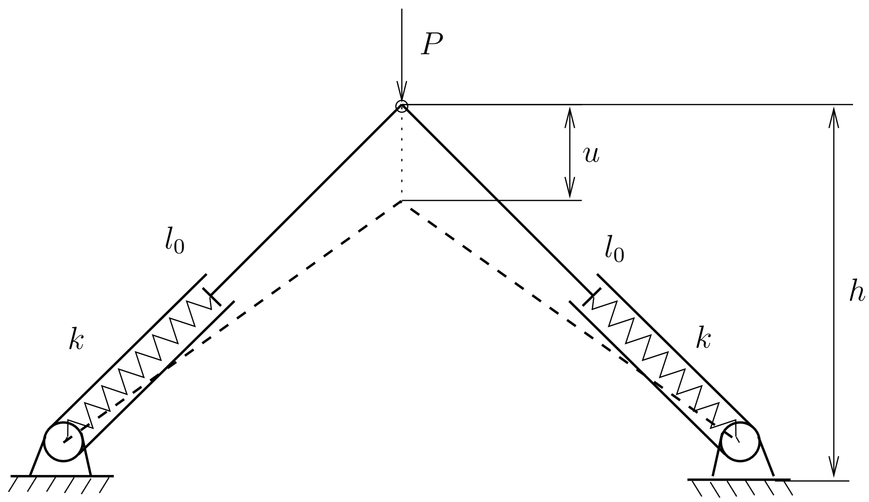
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de septiembre de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*N”o*	*Grupo*

Ejercicio 6”o Tiempo: 60 min.

El pórtico triarticulado simétrico de la figura está formado por dos barras telescópicas elásticas de masa despreciable de tal forma que cada una de ellas se mantiene recta y tiene insertado un resorte lineal de constante elástica k. La longitud natural de cada barra es l_0 y la altura del pórtico en esta configuración descargada es h. Sobre el vértice central del pórtico se aplica una carga vertical constante de valor P.



Se pide:

1. Obtener la expresión exacta de la energía potencial del sistema para una posición genérica definida por u (desplazamiento vertical del vértice central del pórtico).

2. Obtener una expresión aproximada de la longitud deformada de cada barra $l(u)$ empleando la aproximación de la raíz cuadrada

$$l(u) = \sqrt{l_0^2 + \varepsilon(u)} \simeq l_0 + \frac{\varepsilon(u)}{2l_0}$$

siendo $\varepsilon(u)$ un término función de u que deberá determinarse y que puede suponerse pequeño en relación a l_0. Utilizar esta expresión aproximada $l(u)$ para obtener una expresión aproximada del potencial del sistema.

3. Empleando la expresión aproximada del potencial, obtener la carga de equilibrio $P(u)$ como función del desplazamiento genérico u.

4. Valor máximo que puede tomar la carga P para que el pórtico permanezca en equilibrio estable. Particularizar para los valores numéricos $l_0 = 2$ m, $h = l_0/10$, $k = 10^7$ N/m.

1.- El pórtico es simétrico respecto del eje vertical, en el que está contenida también la carga actuante P, por lo que una configuración deformada arbitraria conserva la simetría respecto de la vertical.

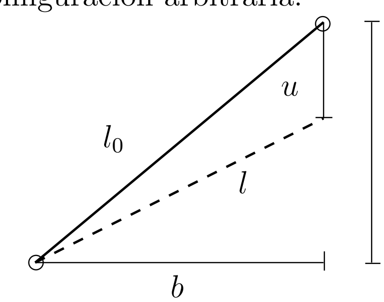
Llamemos l a la longitud de cualquiera de las dos barras en una posición deformada arbitraria. Teniendo en cuenta que cuando el muelle se encuentra en su logitud natural la barra mide l_0, la expresión exacta de la energía potencial del sistema viene dada por:

$$V = 2\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - Pu \tag{1}$$

Para expresar V en función exclusivamente del desplazamiento del nodo central (u), hace falta relacionar la longitud de cada barra con u en una configuración arbitraria.

Con la ayuda de la figura adjunta, se deduce que:

$$\begin{aligned} b^2 &= l_0^2 - h^2 \\ l^2 &= b^2 + (h-u)^2 = l_0^2 - 2hu + u^2 \end{aligned}$$



con lo que V dado en (1) se expresa en función de u como:

$$V(u) = k\left(\sqrt{l_0^2 - 2hu + u^2} - l_0\right)^2 - Pu \tag{2}$$

2.- Según se ha deducido en el apartado anterior, la longitud de cada barra se relaciona con el desplazamiento del nodo central mediante la expresión:

$$l(u) = \sqrt{l_0^2 - 2hu + u^2} \tag{3}$$

Tal y como sugiere en el enunciado, llamando $\varepsilon(u) = u^2 - 2hu$, y suponiendo que $\varepsilon(u) \ll l_0$, podemos obtener la siguiente aproximación de $l(u)$:

$$l(u) = \sqrt{l_0^2 \underbrace{-2hu + u^2}_{\varepsilon(u)}} \simeq l_0 + \frac{\varepsilon(u)}{2l_0} = l_0 - \frac{hu}{l_0} + \frac{u^2}{2l_0} \tag{4}$$

Introduciendo esta aproximación en la expresión (1) del potencial, resulta:

$$V(u) \simeq k\left(-\frac{hu}{l_0} + \frac{u^2}{2l_0}\right)^2 - Pu \tag{5}$$

3.- La carga P de equilibrio se obtiene imponiendo que la función potencial $V(u)$ alcance un extremo, es decir, $\mathrm{d}V(u)/\mathrm{d}u = 0$. Derivando respecto de u en la expresión (5), y operando, se obtiene la expresión:

$$\frac{\mathrm{d}V(u)}{\mathrm{d}u} = \frac{2ku}{l_0^2}\left(\frac{u}{2} - h\right)(u-h) - P \tag{6}$$

Igualando a 0 la expresión (6), se puede despejar el valor de la fuerza P de equilibrio correspondiente a un determinado valor de u, que resulta:

$$P = \frac{2ku}{l_0^2}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{3uh}{2} + h^2\right) \tag{7}$$

4.- La estabilidad de la posición de equilibrio se discute estudiando el signo de la derivada segunda de la función potencial, que tiene la expresión:

$$\frac{\mathrm{d}^2V(u)}{\mathrm{d}u^2} = \frac{2ku}{l_0^2}\left(\frac{3u^2}{2} - 3uh + h^2\right) \tag{8}$$

Una determinada posición de equilibrio definida por u es estable si la expresión (8) es > 0 (la función potencial presenta un mínimo) e inestable si es < 0 (la función potencial presenta un máximo).

Los puntos de inestabilidad se presentan para aquellos valores de u que anulan la expresión (8). Esta condición conduce a una ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$u = h\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{9}$$

Se trata ahora de identificar cual es el mínimo valor de u para el que se presenta la inestabilidad. La posición de equilibrio con $u = 0$ (pórtico descargado) es estable, ya que introduciendo $u = 0$ en la expresión (8), resulta $\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}u^2 = (2kh^2/l_0^2) > 0$. Luego el primer valor de u para el que el sistema pasa de estar en equilibrio estable a inestable es el valor más pequeño de los obtenidos en (9). En la práctica, este valor de u va a ser el máximo posible, ya que por encima de él cualquier configuración es inestable y la mínima perturbación aparta al pórtico de ella. Por tanto:

$$u_{max} = h\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{10}$$

El valor máximo de P se obtiene sustituyendo (10) en (7), resultando:

$$P_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{kh^3}{l_0^2} \tag{11}$$

Con los valores numéricos proporcionados en el enunciado, resulta $P_{max} = 7{,}69 \cdot 10^3$ N, que produce un desplazamiento del vértice central de $u_{max} = 84{,}5$ mm