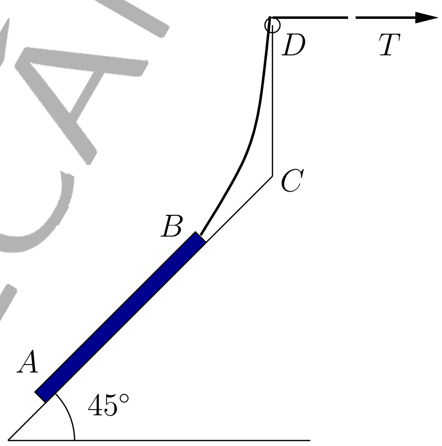
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (5 de diciembre del 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una barra homogénea recta AB de sección despreciable, longitud 20 m y peso 2000 kg está obligada a deslizar ascendiendo por un plano inclinado 45 °, elevándola mediante un cable de peso unitario 16 kg/m. El cable a su vez pasa por una polea D de radio despreciable situada a una altura de 20 m sobre un determinado punto C del plano. Entre el plano y la barra existe un rozamiento de coeficiente $\mu = 0{,}4$.



LLega un momento en que el extremo superior de la barra está a punto de levantarse; para ese instante se pide:

1. En la hipótesis de que el peso del cable fuera despreciable, definir la tensión en el cable, la reacción del plano sobre la barra y la configuración de equilibrio.
2. Considerando a partir de ahora el peso del cable, calcular los mismos valores, definiendo además la curva de equilibrio del hilo.
3. Calcular la distancia horizontal entre el extremo B de la barra a la vertical por la polea D.

⋆

1.— En este primer apartado se considera que el hilo no pesa por lo que su configuración será una recta BD, con tensión constante T_B. Sobre la barra actúa además el peso P, la normal al plano N y el rozamiento F_R. Puesto que la barra está deslizando el valor del rozamiento será el límite $F_R = \mu N$. Por otra parte, al estar a punto de levantarse en B la resultante N estará desplazada hasta el extremo A. Para obtener las incógnitas N, T_x, T_y se plantean las ecuaciones cardinales de la estática a la barra AB:

$$\sum F_x : \quad 0 = -N\frac{1}{\sqrt{2}} - F_R\frac{1}{\sqrt{2}} + T_x\,; \tag{1}$$

$$\sum F_y : \quad 0 = N\frac{1}{\sqrt{2}} - F_R\frac{1}{\sqrt{2}} - P + T_y\,; \tag{2}$$

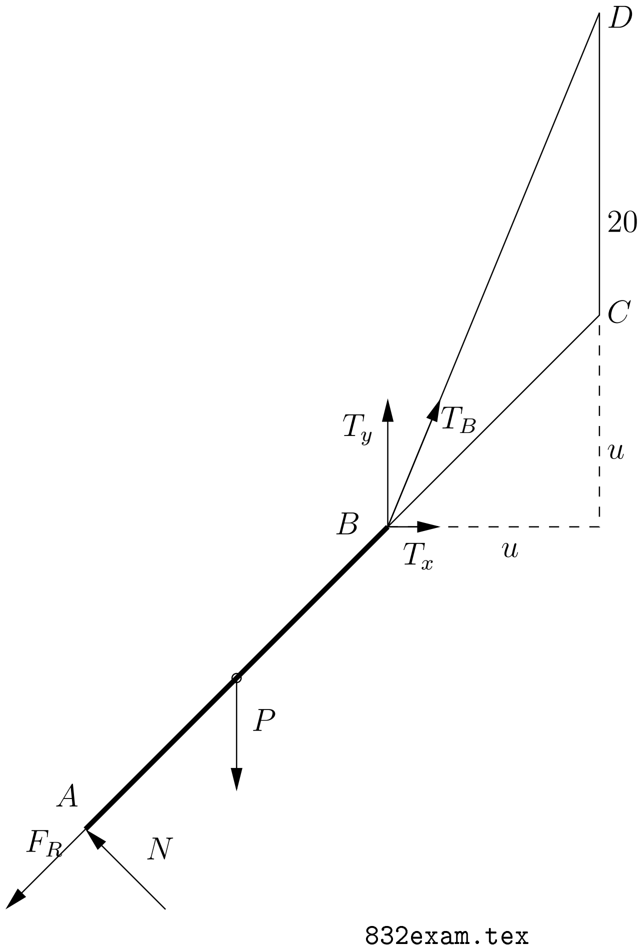
$$\sum M_B : \quad 0 = -N\ell + P\frac{\ell}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{3}$$

Resolviendo resulta

$$N = 500\sqrt{2}\,\text{kg}\,; \quad T_x = 700\,\text{kg}\,; \quad T_y = 1700\,\text{kg}\,. \tag{4}$$

La distancia horizontal u se obtiene de la inclinación de BD, coincidente con la tensión del hilo:

$$\frac{20+u}{u} = \frac{1700}{700} \;\Rightarrow\; u = 14\,\text{m}. \tag{5}$$



2.— Si el cable pesa formará un arco de catenaria entre B y D. Las condiciones del equilibrio de la barra AB no cambian, por lo que la tensión del cable en B será la misma calculada en el apartado anterior. La ecuación de la catenaria será

$$y = a \cosh \frac{x}{a}, \quad \text{con} \quad a = \frac{T_0}{q} = \frac{700}{16} = 43{,}75\,\text{m}. \tag{6}$$

Para obtener la abscisa de B en el sistema de referencia de la catenaria (distancia horizontal hasta el vértice) se plantea la condición de la tensión vertical conocida:

$$T_y = qa \operatorname{senh} \frac{x_B}{a} = 1700 \quad \Rightarrow \quad x_B = 70{,}891\,\text{m}. \tag{7}$$

3.— Por último hace falta calcular la distancia u, para lo que plantearemos la diferencia de cotas de la catenaria entre B y D:

$$y_D - y_B = 20 + u = a \cosh \frac{x_B + u}{a} - a \cosh \frac{x_B}{a}. \tag{8}$$

Esta expresión es una ecuación trascendente en función de u y para resolverla se debe emplear un método numérico iterativo. Emplearemos el método de Newton, cuyo algoritmo recursivo es el siguiente.

1. Valor inicial para la incógnita:
   $n = 0$; u_0 dado.

2. Evaluación de la función y de la derivada en u_n:
   $f(u_n) = \cosh \frac{x_B + u}{a} - \cosh \frac{x_B}{a} - \frac{20 + u}{a}$;
   $\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right)_n = \frac{1}{a}\left[\operatorname{senh}\left(\frac{x_B + u_n}{a}\right) - 1\right]$.

3. Cálculo del siguiente valor de la incógnita:
   $\Delta u_n = -\frac{f(u_n)}{(\mathrm{d}f/\mathrm{d}u)_n}$;
   $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$.

4. Comprobación de la convergencia para finalizar o continuar iteraciones:
   $\text{si} \begin{cases} |\Delta u_n| \le \epsilon: & u = u_{n+1}; \quad \text{(fin)} \\ |\Delta u_n| > \epsilon: & n \leftarrow n + 1; \quad \text{vuelve a 2} \end{cases}$

Como valor inicial se puede tomar el correspondiente al cable sin peso $u_0 = 14$ m calculado en el primer apartado. Las iteraciones efectuadas resultan:

n	u_n	Δu_n
0	14,00000	$-2{,}705341$
1	11,29466	$-0{,}1327026$
2	11,16196	$-3{,}119047 \cdot 10^{-4}$
3	11,16164	$-3{,}600198 \cdot 10^{-6}$

Se deduce finalmente que la distancia pedida es $u = 11{,}16164$ m. La tensión aplicada en D valdrá $T = qa \cosh \frac{x_B + u}{a} = 2337{,}06$ kg.