Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1er EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (26 de enero de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 1º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y dirigidas directamente a lo que se pregunta, escritas con letra clara y *a tinta*. Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

Una partícula de masa m recorre una superficie lisa y fija, definida en forma implícita por la ecuación escalar $f(x, y, z) = 0$, sometida a fuerzas aplicadas $\boldsymbol{F}$. *expresar* en un caso general las ecuaciones diferenciales del movimiento. *Aplicar* al caso particular de la superficie $x^2 + y^2 = z$ con la partícula sometida a su peso según la dirección z descendente. (3.5 ptos.)

La reacción de la superficie es normal a la misma, por lo que su valor será $\boldsymbol{N} = \lambda\,\mathbf{grad}\,f$, en función del escalar λ. Las incógnitas del problema son por tanto cuatro, las tres componentes del vector posición $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ y λ. Las ecuaciones son

$$\begin{cases} \boldsymbol{F} + \lambda\,\mathbf{grad}\,f = m\ddot{\boldsymbol{r}} \\ f(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

que equivalen a cuatro ecuaciones escalares.

Para el caso particular que se pide,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{grad}\,f = (2x, 2y, -1).$$

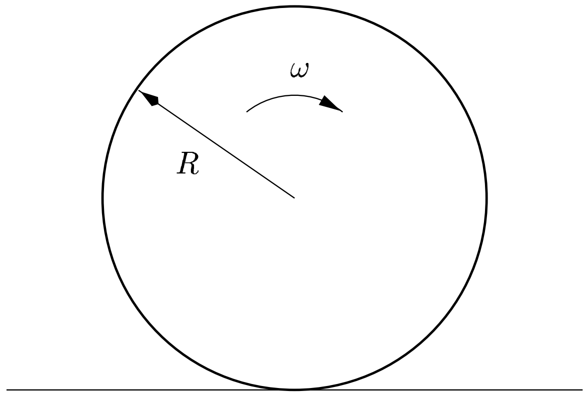
Las ecuaciones resultan

$$\begin{cases} 2\lambda x = m\ddot{x} \\ 2\lambda y = m\ddot{y} \\ -mg - \lambda = m\ddot{z} \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$

Es posible eliminar el multiplicador λ de la tercera de las ecuaciones anteriores, resultando un sistema de 3 ecuaciones en función de (x, y, z):

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2x(\ddot{z} + g) = 0 \\ \ddot{y} + 2y(\ddot{z} + g) = 0 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$

De un sólido en movimiento plano se conoce la velocidad de sucesión del punto geométrico que coincide en cada instante con su centro instantáneo de rotación, $\boldsymbol{v}_C$, y la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$. *Obtener* la velocidad y aceleración del punto C^* del sólido situado sobre C, para un caso general. *Aplicar* al caso particular de la figura, en que el disco rueda sin deslizar con ω constante. (3.5 ptos.)



La velocidad de un punto cualquiera $\boldsymbol{r}_P$ del sólido, conocido el C.I.R. $\boldsymbol{r}_C$, es

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_C).$$

Derivando respecto del tiempo se obtiene la aceleración:

$$\boldsymbol{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_C) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{v}_P - \boldsymbol{v}_C)$$

Para el caso en que $P \equiv C^*$, se cumple $\boldsymbol{r}_{C^*} = \boldsymbol{r}_C$ por lo que

$$\boldsymbol{v}_{C^*} = \boldsymbol{0}; \qquad \boldsymbol{a}_{C^*} = -\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_C.$$

Para el caso particular propuesto, C es el contacto disco/recta. Tomando unos ejes (xyz) dextrógiros (x positivo hacia la derecha e y hacia arriba), es $\boldsymbol{v}_C = \omega R\,\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{\Omega} = -\omega\,\boldsymbol{k}$. La aceleración es por tanto

$$\boldsymbol{a}_{C^*} = \omega^2 R\,\boldsymbol{j}.$$

Enunciar los Principios y teoremas generales de la dinámica de un sistema mecánico general (variación de la cantidad de movimiento, momento cinético, y energía cinética), y *discutir* el papel que juegan en cada uno de ellos las fuerzas internas. (3 ptos.)

Sea un sistema con masas $\{m_i\}_{i=1,\dots N}$ y posiciones $\boldsymbol{r}_i$, sobre el que actúan fuerzas $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{\text{int}} + \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$. Se define la masa del sistema $M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i$, el centro de masas $\boldsymbol{r}_G \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i\boldsymbol{r}_i/M$, la cantidad de movimiento $\boldsymbol{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i$, el momento cinético respecto del origen fijo $\boldsymbol{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \wedge m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i$, y la energía cinética $T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i v_i^2$. La resultante de las fuerzas es $\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$ y la de los momentos $\boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$. Los teoremas pedidos quedan expresados por las ecuaciones siguientes.

Teorema de la cantidad de movimiento: $\boxed{\boldsymbol{F} = \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{v}}_G.}$

Principio del momento cinético: $\boxed{\boldsymbol{M}_O = \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{H}_O.}$

Teorema de la energía cinética: $\boxed{dW = \displaystyle\sum_{i=1}^N \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{F}_i^{\text{int}} \cdot d\boldsymbol{r}_i = dT.}$

El efecto de las fuerzas internas (tanto activas como reactivas) se anula a efectos de cantidad de movimiento y momento cinético. Sin embargo, el trabajo desarrollado por ellas no se anula salvo que se trate de un sistema rígido, por lo que debe considerarse para la variación de la energía cinética en cualquier sistema deformable.