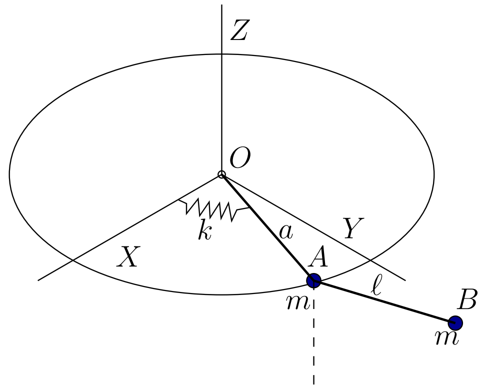
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (3 de julio del 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación 10/45) Tiempo: 60 min.

Se considera un sistema formado por dos varillas rígidas OA y AB de masa despreciable y longitudes a y ℓ respectivamente, con masas puntuales m en los extremos A y B. El punto O es fijo, mientras que A se mantiene en un plano horizontal por O, pudiendo girar la varilla en dicho plano bajo la acción de un resorte torsional que produce un momento proporcional al ángulo girado por OA respecto a OX, con constante de proporcionalidad $k = 2mga^2/\ell$. La varilla AB oscila libremente dentro de un plano vertical móvil perpendicular a OA, sometida a su peso. Se pide:



1. Obtener las expresiones de las energías cinética y potencial en función de los grados de libertad.
2. Ecuaciones de la dinámica linealizadas para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
3. Frecuencias propias y modos normales de vibración (no es necesario normalizar respecto de la matriz de masas).
4. El sistema se somete a un movimiento sísmico en dirección del eje horizontal OY, de amplitud $y = b \operatorname{sen} \Omega t$, siendo $\Omega^2 = 2g/\ell$. Admitiendo la misma hipótesis de pequeñas oscilaciones, obtener el movimiento en régimen permanente (suponiendo un pequeño amortiguamiento inevitable).

⋆

1.— El sistema tiene dos grados de libertad, el giro θ de la varilla OA respecto a OX y el ángulo φ de la varilla AB respecto a la vertical descendente. La energía cinética resulta

$$T = \frac{m}{2}\left(2a^2\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\varphi}^2 + 2a\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \ell^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2\varphi\right) . \tag{1}$$

La energía potencial vale

$$V = \frac{1}{2}k\theta^2 - mg\ell\cos\varphi \, . \tag{2}$$

2.— Consideramos el vector de coordenadas $\{\mathbf{q}\}^{\mathrm{T}} = (\theta, \varphi)$. La forma más sencilla de calcular los coeficientes de las matrices de masa y de rigidez de las ecuaciones linealizadas es derivar las expresiones de la energía cinética (1) y potencial (2) respectivamente, y particularizar en la posición de equilibrio ($\theta = 0, \varphi = 0$):

$$[m_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right] \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{M}] = m\begin{pmatrix} 2a^2 & a\ell \\ a\ell & \ell^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$[k_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right] \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix} \tag{4}$$

Las ecuaciones matriciales para pequeñas oscilaciones libres son

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2ma^2\ddot{\theta} + ma\ell\ddot{\varphi} + k\theta = 0 \\ ma\ell\ddot{\theta} + m\ell^2\ddot{\varphi} + mg\ell\varphi = 0 \end{cases} \tag{5}$$

3.— Las frecuencias propias resultan de la ecuación característica

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = (ma\ell)^2\lambda^2 - (m\ell^2 k + 2m^2a^2g\ell)\lambda + kmg\ell = 0\,, \tag{6}$$

y sustituyendo el valor del enunciado $k = 2mga^2/\ell$ y simplificando,

$$\ell^2\lambda^2 - 4g\ell\lambda + 2g^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{g}{\ell}(2 \pm \sqrt{2})\,. \tag{7}$$

Las frecuencias propias y los modos normales asociados son por tanto

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\ell}(2+\sqrt{2}) \qquad \{\mathbf{a}_1\}^{\mathrm{T}} = (-\ell/(a\sqrt{2}), 1) \tag{8}$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{\ell}(2-\sqrt{2}) \qquad \{\mathbf{a}_2\}^{\mathrm{T}} = (\ell/(a\sqrt{2}), 1) \tag{9}$$

4.— El movimiento sísmico impuesto en la base se puede considerar a través de un sistema no inercial de referencia que tendría el movimiento de traslación $y(t) = b\,\mathrm{sen}\,\Omega t$. Para ello basta incluir en el modelo las fuerzas de inercia en cada una de las masas A y B:

$$\boldsymbol{f}_A^{\text{iner}} = \boldsymbol{f}_B^{\text{iner}} = -m\ddot{y}\,\boldsymbol{j} = mb\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\Omega t\,\boldsymbol{j}\,. \tag{10}$$

Para introducir en las ecuaciones se deben calcular las fuerzas generalizadas según los grados de libertad del sistema. Estas las evaluamos a través del trabajo para pequeños desplazamientos virtuales sobre la posición de equilibrio:

$$\delta\boldsymbol{r}_A = a\delta\theta\,\boldsymbol{j}\,; \quad \delta\boldsymbol{r}_B = (a\delta\theta + \ell\delta\varphi)\boldsymbol{j} \tag{11}$$

$$\delta W = \boldsymbol{f}_A^{\text{iner}} \cdot \delta\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{f}_B^{\text{iner}} \cdot \delta\boldsymbol{r}_B = mb\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\Omega t(2a\delta\theta + \ell\delta\varphi)\,. \tag{12}$$

Las ecuaciones se obtienen a partir de las de vibraciones libres (5) completando el vector de fuerzas a la derecha del signo $=$:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{F}\}\,\mathrm{sen}\,\Omega t \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2ma^2\ddot{\theta} + ma\ell\ddot{\varphi} + k\theta = 2mba\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\Omega t \\ ma\ell\ddot{\theta} + m\ell^2\ddot{\varphi} + mg\ell\varphi = mb\ell\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\Omega t \end{cases} \tag{13}$$

La solución para el régimen permanente (supuesto que se ha alcanzado gracias a un pequeño amortiguamiento, pero cuyo valor despreciaremos frente a los otros términos en el cálculo) es del tipo $\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{B}\}\,\mathrm{sen}\,\Omega t$, y sustituyendo en las ecuaciones (13),

$$\left(-[\mathbf{M}]\Omega^2 + [\mathbf{K}]\right)\{\mathbf{B}\}\,\mathrm{sen}\,\Omega t = \{\mathbf{F}\}\,\mathrm{sen}\,\Omega t\,, \tag{14}$$

de donde se puede despejar

$$\{\mathbf{B}\} = \left(-[\mathbf{M}]\Omega^2 + [\mathbf{K}]\right)^{-1}\{\mathbf{F}\}\,. \tag{15}$$

Teniendo en cuenta los valores de $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{K}]$ y $\{\mathbf{F}\}$ de las ecuaciones (13), así como el valor que da el enunciado $\Omega^2 = 2g/\ell$, resulta finalmente

$$\{\mathbf{B}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2\dfrac{b}{\ell} \end{Bmatrix}\,. \tag{16}$$