Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

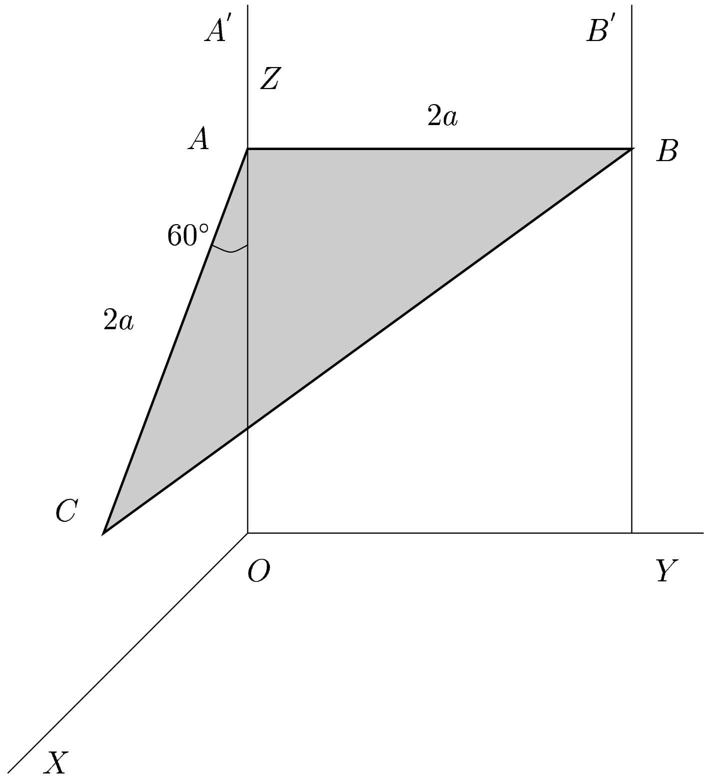
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (8 de Junio de 1998)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

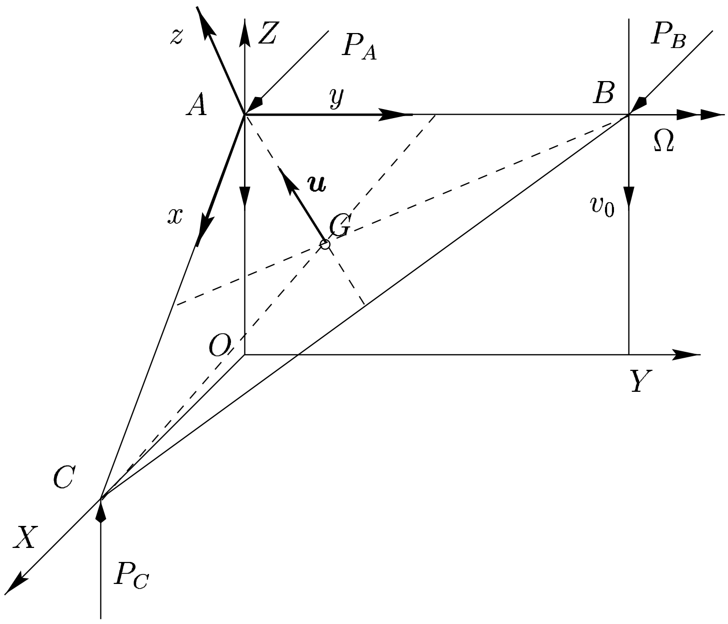
Ejercicio 2º Tiempo: 60 min.

Un triángulo rectángulo isósceles ABC tiene los vértices del cateto AB obligados a deslizar por dos guías verticales lisas AA' y BB' que distan $2a$. Inicialmente el plano del triángulo forma 60° con el plano OYZ y se deja caer sin velocidad inicial desde una altura $OA = 2a$, impactando el vértice C con el plano horizontal liso OXY. El choque es perfectamente elástico.
Se pide:

1. Campo de velocidades de la placa en el instante posterior al choque
2. Percusión en el vértice C
3. Percusiones en los vértices A y B según la dirección OX



1.- Bajo la acción de la gravedad, la placa cae sin rotación, al no introducir las guías ningún impedimento. La altura inicial de C es $z_C|_0 = a$, luego la velocidad antes del choque es $v_0 = \sqrt{2ga}$.
Sean $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ los versores según las direcciones (X, Y, Z) respectivamente. Después del choque, la placa rebotará con un movimiento que consta de una traslación vertical de AB, que se mantendrá horizontal entre las guías, y una rotación alrededor de AB. Sea $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B = v\,\boldsymbol{K}$ la velocidad de AB después del choque, y $\Omega\,\boldsymbol{J}$ la velocidad de rotación.
El choque produce en C una percusión vertical ($P_C\,\boldsymbol{K}$), y en A y B percusiones reactivas horizontales ($P_A\,\boldsymbol{I}, P_B\,\boldsymbol{I}$).



Para resolver el movimiento planteamos las siguientes ecuaciones.

1. *Balance de cantidad de movimiento según Z.*
   Después del choque la velocidad de G es

$$\boldsymbol{v}_G = v\boldsymbol{K} + \Omega\,\boldsymbol{J} \wedge \left(\frac{2a}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{I} + \frac{2a}{3}\boldsymbol{J} - \frac{2a}{3}\frac{1}{2}\boldsymbol{K}\right) = -\frac{a}{3}\Omega\,\boldsymbol{I} + \left(v - a\frac{\sqrt{3}}{3}\Omega\right)\boldsymbol{K}, \tag{1}$$

   con lo cual la ecuación de balance es

$$-mv_0 + P_C = m\left(v - a\frac{\sqrt{3}}{3}\Omega\right) \tag{2}$$

2. *Balance de momento cinético en A según la dirección de AB.*
   El momento cinético en A antes del choque es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_A|_0 &= \boldsymbol{AG} \wedge (-mv_0\,\boldsymbol{K})\\ &= \left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{I} + a\frac{2}{3}\boldsymbol{J} - \frac{a}{3}\boldsymbol{K}\right) \wedge (-mv_0\,\boldsymbol{K})\\ &= -mv_0\left(-a\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{J} + a\frac{2}{3}\boldsymbol{I}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

   La única percusión cuyo momento tiene componente según AB es P_C:

$$\boldsymbol{AC} \wedge P_C\,\boldsymbol{K} = -a\sqrt{3}P_C\,\boldsymbol{J} \tag{4}$$

   Teniendo en cuenta que la rotación lleva la dirección Y, la componente Y del momento cinético en A después del choque es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_A \cdot \boldsymbol{J} &= I_{YY}^G\Omega + (\boldsymbol{AG} \wedge m\boldsymbol{v}_G)\cdot\boldsymbol{J}\\ &= \frac{2}{9}ma^2\Omega + \frac{4}{9}ma^2\Omega - \frac{\sqrt{3}}{3}mav\\ &= \frac{2}{3}ma^2\Omega - \frac{\sqrt{3}}{3}mav\end{aligned} \tag{5}$$

   Teniendo en cuenta (3), (4) y (5) el balance se expresa como

$$\frac{\sqrt{3}}{3}mav_0 - a\sqrt{3}P_C = \frac{2}{3}ma^2\Omega - \frac{\sqrt{3}}{3}mav \tag{6}$$

3. *Restitución elástica.*
   Esta ecuación expresa

$$v_0 = \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{K} = v - a\sqrt{3}\Omega \tag{7}$$

Mediante las ecuaciones (2) y (6) se elimina P_C, y la ecuación resultante junto con (7) permite obtener v y Ω:

$$v = -\frac{7}{5}v_0 \tag{8}$$

$$\Omega = -\frac{4\sqrt{3}}{5}\frac{v_0}{a} \tag{9}$$

2.- Una vez conocidas (8) y (9), de (2) se obtiene directamente

$$P_C = \frac{2}{5} m v_0 \tag{10}$$

3.- Obtendremos primero P_B, para lo que plantearemos el balance del momento cinético según el eje GA, que es principal al tratarse de un eje de simetría del triángulo. Llamaremos $\boldsymbol{u} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{I} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{J} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{K}$ al versor correspondiente. El momento de inercia según este eje es

$$I_{uu}^A = I_{uu}^G = \frac{1}{3} m a^2,$$

por lo que la componente del momento cinético es

$$\boldsymbol{H}_A \boldsymbol{u} = \frac{1}{3} m a^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \Omega \right) \tag{11}$$

La componente del momento cinético antes del choque según GA es nula, al pasar el eje por G. La componente de la percusión en C es, empleando (4),

$$(\boldsymbol{AC} \wedge P_C \boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} a P_C \tag{12}$$

Análogamente, la componente de la percusión en B es

$$(\boldsymbol{AB} \wedge P_B \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{u} = (-2aP_B) \frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{a}{\sqrt{2}} P_B \tag{13}$$

A partir de (11), (12) y (13), el balance expresa

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} a P_C - \frac{a}{\sqrt{2}} P_B = -\frac{1}{3\sqrt{2}} m a^2 \Omega \tag{14}$$

De esta ecuación, empleando (10) y (9), resulta

$$P_B = \frac{2\sqrt{3}}{15} m v_0 \tag{15}$$

Por último, planteando el balance de la cantidad de movimiento según la dirección X,

$$P_A + P_B = m \boldsymbol{v}_G \cdot \boldsymbol{I} = -m \frac{a}{3} \Omega, \tag{16}$$

y mediante (15) y (9) se obtiene

$$P_A = P_B = \frac{2\sqrt{3}}{15} m v_0. \tag{17}$$

Otra forma de operar podría haber sido plantear el balance del momento cinético según el eje AC, en este caso habría que tener en cuenta que al tratarse de una dirección no principal, aunque la velocidad de rotación sea ortogonal a este eje, existe una componente del momento cinético en esta dirección debido al producto de inercia no nulo. Llamando x a la dirección local AC e y a la dirección AB, la componente del tensor de inercia (producto de inercia con signo menos) es $I_{xy} = -\frac{1}{3} m a^2$. Así, el balance se expresaría como

$$-ma\frac{\sqrt{3}}{3} v_0 + a P_B = -\frac{1}{3} m a^2 \Omega + ma \frac{\sqrt{3}}{3} v \tag{18}$$

De aquí se despeja P_B obteniendo igual valor que antes (15).