Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (7 de julio de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

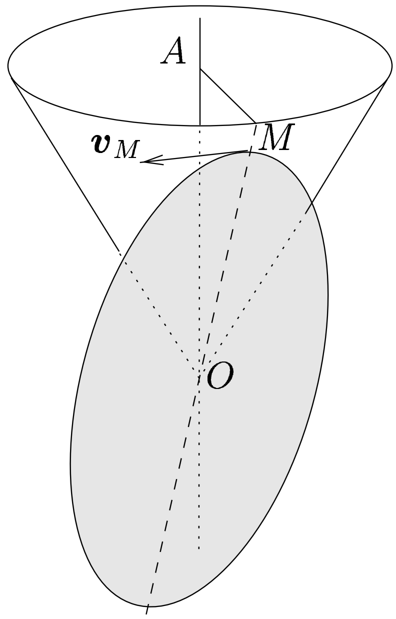
Ejercicio 3º Tiempo: 45 min.

Un disco circular homogéneo de radio R desliza por la superficie exterior de un cono circular recto vertical fijo de semiángulo cónico 30° y eje OA. En todo instante el centro del disco y el vértice del cono coinciden en O, siendo el disco tangente a la superficie del cono.

Del movimiento del disco se sabe que la generatriz de contacto gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje del cono y con sentido OA, y la velocidad de deslizamiento del punto material M, situado en el borde del disco en la generatriz de contacto, vale $3R\omega/2$ con el sentido indicado en la figura adjunta.

Se pide:

1. Velocidad angular del disco.
2. Velocidad angular de pivotamiento del disco respecto del cono.
3. Aceleración angular del disco.
4. Aceleración del punto material M del disco.
5. Axoides del movimiento.
6. ¿Cuál debería ser la velocidad del punto material M del disco si se deseara que el axoide móvil fuera un plano?



1.- Emplearemos el triedro $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ donde $\boldsymbol{i}$ lleva la dirección de AM, $\boldsymbol{k}$ la de OA, y $\boldsymbol{j}$ es ortogonal a ambos formando un triedro a derechas. También emplearemos el triedro $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ donde $\boldsymbol{v}$ lleva la dirección del radio OM del disco, $\boldsymbol{w}$ es perpendicular al disco, y $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}$ está orientado según otro radio del disco, perpendicular a los anteriores y formando un triedro a derechas.

Descomponemos el movimiento como una rotación $\dot{\psi}\,\boldsymbol{k} = \omega \boldsymbol{k}$ que proporciona el giro de la generatriz de contacto OM, además de una rotación $\dot{\varphi}\,\boldsymbol{w}$ alrededor del eje del disco que proporcione la velocidad de deslizamiento v_M indicada:

$$v_M = -\omega R \operatorname{sen} 30° + \dot{\varphi} R = \frac{3R}{2}\omega \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = 2\omega. \tag{1}$$

por tanto la velocidad angular es, efectuando la suma vectorial,

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\,\boldsymbol{k} + 2\omega\,\boldsymbol{w} = \omega\,\boldsymbol{k} + 2\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right) = \sqrt{3}\omega\,\boldsymbol{i} \tag{2}$$

2.- La velocidad de pivotamiento es la proyección según la normal $\boldsymbol{w}$:

$$\Omega_{\mathrm{piv}} = \sqrt{3}\omega\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{w} = \frac{3}{2}\omega \tag{3}$$

3.- A lo largo del movimiento, el módulo de la velocidad angular se conserva, efectuando ésta simplemente una rotación alrededor del eje del cono con velocidad ω:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega\,\boldsymbol{k}\wedge\sqrt{3}\omega\,\boldsymbol{i} = \sqrt{3}\omega^2\,\boldsymbol{j} \tag{4}$$

4.- La aceleración de M se evalúa mediante:

$$\boldsymbol{a}_M = \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{OM} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\underbrace{(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{OM})}_{\boldsymbol{v}_M} = \sqrt{3}\omega^2\,\boldsymbol{j}\wedge R\,\boldsymbol{v} + \sqrt{3}\omega\,\boldsymbol{i}\wedge\left(-\frac{3R}{2}\omega\,\boldsymbol{j}\right),$$

es decir,

$$\boldsymbol{a}_M = \omega^2 R\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{i} - 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{k}\right) = \omega^2 R\left(-\frac{9}{4}\boldsymbol{v} + \frac{7\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{w}\right) \tag{5}$$

5.- Puesto que $\boldsymbol{\Omega}$ es horizontal por O, el axoide fijo es un plano perpendicular al eje (fijo) del cono por O. Forma un ángulo constante de $30°$ con el eje (móvil) del disco, por lo que el axoide móvil es un cono de semiángulo $30°$.

6.- Para que el axoide sea un plano, la velocidad angular debe llevar en todo instante la dirección del radio del disco OM, con lo que el axoide sería el propio disco. En este caso la velocidad de M sería nula, al estar sobre el eje de rotación.