Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (17 de Septiembre de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

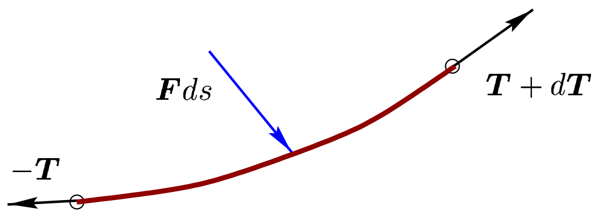
Ejercicio 2.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Expresar las ecuaciones diferenciales del equilibrio en forma vectorial para un cable sometido a cargas continuas. Para el caso particular de un cable homogéneo sometido únicamente a su peso propio (q por unidad de longitud del cable), *obtener* a partir de la ecuación diferencial anterior la expresión en un punto genérico de la tensión del cable, así como de sus componentes vertical y horizontal, en función de z (coordenada vertical), s (longitud del cable medida desde el vértice) y a (parámetro de la catenaria). Asimismo, *deducir* la relación existente entre z, s y a. (5 ptos.)

Llamando $\boldsymbol{T}$ a la tensión y $\boldsymbol{F}$ a las cargas repartidas por unidad de longitud del cable, la ecuación diferencial es

$$\boxed{d\boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}\,ds = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}.} \tag{1}$$



En coordenadas cartesianas, proyectando según (x, y, z) resultan las ecuaciones escalares

$$\frac{dT_x}{ds} + F_x = 0; \quad \frac{dT_y}{ds} + F_y = 0; \quad \frac{dT_z}{ds} + F_z = 0 \tag{2}$$

Si el cable está sometido a su propio peso (q por unidad de longitud, en dirección z descendiente), resulta $F_x = F_y = 0$, y $F_z = -q$. La curva de equilibrio es plana, por lo que tomaremos los ejes xz dentro de este plano. Las ecuaciones (2) se integran de manera inmediata:

$$\begin{cases} \dfrac{dT_x}{ds} = 0 & \Rightarrow \quad \boxed{T_x = T_0 = \text{cte.}} \\ \dfrac{dT_z}{ds} - q = 0 & \Rightarrow \quad \boxed{T_z = qs} \end{cases} \tag{3}$$

donde al integrar hemos supuesto $s = 0$ en el vértice de la curva de equilibrio, donde el cable es horizontal y por tanto $T_z = 0$. Por otra parte, proyectando la ecuación de equilibrio (1) según la dirección de la tangente $\boldsymbol{t} = d\boldsymbol{r}/ds$,

$$d\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{F}\cdot ds\,\boldsymbol{t} = dT + \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = dT - q\,dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = qz} \tag{4}$$

donde se ha elegido adecuadamente el origen de z de forma que, en el vértice de la curva de equilibrio (catenaria) sea $T = T_0 = qa$.

Teniendo en cuenta (3) y (4), de la relación existente entre las componentes de T se deduce

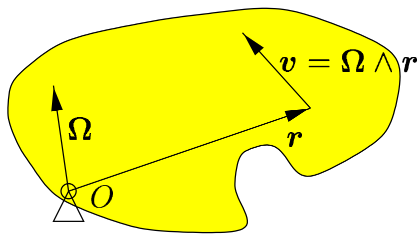
$$T^2 = T_x^2 + T_z^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z^2 = a^2 + s^2}$$

Sea un sólido $\mathcal{B}$ definido como un medio continuo con densidad ρ. 1) *Expresar* la integral que define el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ respecto de un punto fijo O. 2) *Deducir* la expresión del momento cinético, en función de $\boldsymbol{I}_O$ y de la velocidad de rotación del sólido $\boldsymbol{\Omega}$. 3) *Deducir* la expresión del momento de inercia del sólido respecto de un eje que pase por O y dirección definida por el versor $\boldsymbol{e}$. (5 ptos.)

1) La expresión, de forma tensorial y en componentes cartesianas, es

$$\boldsymbol{I}_O = \int_{\mathcal{B}} (r^2\mathbf{1} - \boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})\rho\, dV \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{I}_O)_{ij} = \int_{\mathcal{B}} (r^2\delta_{ij} - r_i r_j)\rho\, dV \tag{1}$$

2) El momento cinético se define mediante



$$\boldsymbol{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v}\rho\, dV = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r})\rho\, dV \tag{2}$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \left[r^2\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{r}\right]\rho\, dV \tag{3}$$

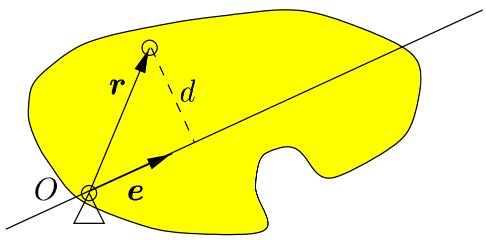
En componentes esta expresión resulta

$$(\boldsymbol{H}_O)_i = \int_{\mathcal{B}} [(r_k r_k)\Omega_i - (r_j\Omega_j)r_i]\,\rho\, dV = \left[\int_{\mathcal{B}} \left(r^2\delta_{ij} - r_i r_j\right)\rho\, dV\right]\Omega_j. \tag{4}$$

Comprobamos que en la última expresión el término entre corchetes coincide con la expresión en componentes del tensor de inercia (1), por lo que

$$\boxed{\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega}}$$

3) Por último, el momento de inercia del sólido queda definido por



$$I_e = \int_{\mathcal{B}} d^2\rho\, dV = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{r})\rho\, dV$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{e}\cdot[\boldsymbol{r}\wedge(\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{r})]\,\rho\, dV$$

Comparando con (2), se comprueba que la expresión anterior puede escribirse en función del tensor de inercia como

$$\boxed{I_e = \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{e})} \tag{5}$$