Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE SEPTIEMBRE (17 de Septiembre de 1998)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 3º Tiempo: 45 min.

Un sólido S se mueve de forma que un punto A del mismo recorre el eje OX de un sistema de referencia fijo $OXYZ$ con velocidad v, otro punto B recorre el eje OY, y la distancia entre A y B es $2a$. Además, un plano (Π) del sólido que contiene a la recta AB ha de pasar constantemente por el punto C de coordenadas $(0, 0, a)$.

Adicionalmente, se define un sistema de referencia móvil $Axyz$ con origen en el punto A de forma que el eje x lleva la dirección del segmento AB, el eje y va según la dirección de máxima pendiente del plano Π y el eje z es perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas.

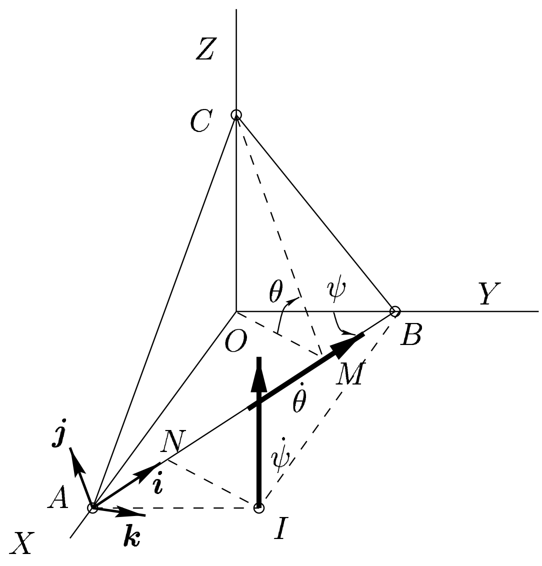
Se pide:

1. Expresar la velocidad angular del sólido en el sistema móvil $Axyz$ y en el sistema fijo $OXYZ$
2. Expresión de la velocidad mínima del sólido.
3. Expresión del eje del movimiento helicoidal tangente.

1.- El movimiento del sólido corresponde a una composición de 2 rotaciones, la del segmento AB dentro del plano OXY alrededor del punto I (ver figura), y una rotación alrededor de la recta AB. Al tratarse de dos rotaciones con ejes no concurrentes, el campo de velocidades del sólido equivale a un movimiento helicoidal general, con una velocidad angular y una velocidad mínima distinta de cero, es decir, el movimiento compuesto no es una rotación pura.

El segmento AB se mueve de forma que I es el centro instantáneo de rotación, con velocidad angular

$$\dot{\psi} = \frac{v}{2a\cos\psi}. \qquad (1)$$



La rotación alrededor de AB queda definida por el ángulo $\theta = \widehat{OMC}$ que forma la recta de máxima pendiente MC con el plano OXY:

$$\tan\theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}} = \frac{1}{\operatorname{sen}(2\psi)} \qquad (2)$$

Derivando esta expresión respecto a ψ,

$$\frac{d}{d\psi}\tan\theta = (1+\tan^2\theta)\frac{d\theta}{d\psi} = -\frac{2\cos(2\psi)}{\operatorname{sen}^2(2\psi)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{d\psi} = -\frac{2\cos(2\psi)}{1+\operatorname{sen}^2(2\psi)}$$

La derivada temporal es por tanto

$$\dot\theta = \frac{d\theta}{d\psi}\dot\psi = -\frac{2\cos 2\psi}{1+\operatorname{sen}^2 2\psi}\dot\psi = -\frac{2\cos 2\psi}{1+\operatorname{sen}^2 2\psi}\frac{v}{2a\cos\psi} \tag{3}$$

la velocidad angular es suma de las dos rotaciones elementales $\dot\psi\boldsymbol{K}$ y $\dot\theta\boldsymbol{i}$. Sus componentes en función del triedro fijo $(\boldsymbol{I},\boldsymbol{J},\boldsymbol{K})$ asociado a las coordenadas XYZ o del triedro móvil $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ asociado a las coordenadas xyz (ver figura) son:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= -\dot\theta\operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{I} + \dot\theta\cos\psi\,\boldsymbol{J} + \dot\psi\,\boldsymbol{K} & (4)\\ &= \dot\theta\,\boldsymbol{i} + \dot\psi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \dot\psi\cos\theta\,\boldsymbol{k} & (5)\end{aligned}$$

2.- La velocidad mínima, correspondiente a los puntos del eje helicoidal tangente, se calcula inmediatamente conociendo la velocidad de un punto cualquiera (en nuestro caso $\boldsymbol{v}_A = v\,\boldsymbol{I}$) y la velocidad angular:

$$v_{\min} = \left|\boldsymbol{v}_A\cdot\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega}\right| = v\operatorname{sen}\psi\frac{\dot\theta}{\sqrt{\dot\theta^2+\dot\psi^2}}, \tag{6}$$

expresión en la que podrían eliminarse si se desease $(\dot\psi,\,\dot\theta)$ mediante (1) y (3) para dejarla expresada en función de v y ψ únicamente.

3.- El eje helicoidal se puede expresar estableciendo que la velocidad de los puntos del mismo sea paralela al vector $\boldsymbol{\Omega}$. La velocidad de un punto genérico P de coordenadas (X,Y,Z) es

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_A);$$

desarrollando esta expresión y empleando (4) resultan las ecuaciones

$$\frac{v+Z\dot\theta\cos\psi - Y\dot\psi}{-\dot\theta\operatorname{sen}\psi} = \frac{(X-2a\operatorname{sen}\psi)\dot\psi + Z\dot\theta\operatorname{sen}\psi}{\dot\theta\cos\psi} = \frac{-[Y\operatorname{sen}\psi + (X-2a\operatorname{sen}\psi)\cos\psi]\dot\theta}{\dot\psi} \tag{7}$$

Otra forma para definir el eje es mediante su dirección, que es la de $\boldsymbol{\Omega}$, y su punto de corte con el plano OXY. Para ello observamos que se trata de componer dos vectores deslizantes que se cruzan perpendicularmente, situándose el eje resultante en la recta de mínima distancia NI entre ambas rectas soporte, a la siguiente distancia medida desde I:

$$d = \frac{\dot\theta^2}{\dot\psi^2+\dot\theta^2}\overline{NI} = \frac{\dot\theta^2}{\dot\psi^2+\dot\theta^2}a\operatorname{sen}(2\psi). \tag{8}$$

Es fácil comprobar que ambas descripciones del eje, (7) y (8), resultan equivalentes.