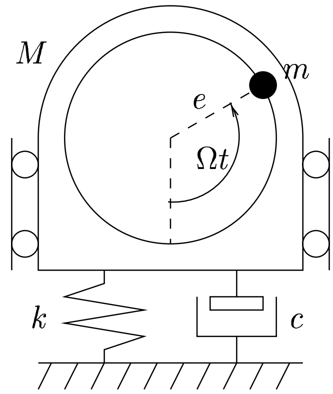
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (30 de Enero de 1999)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 50 min.

Un equipo tiene un bastidor rígido de masa M sobre una fundación elástica que puede idealizarse como un resorte de constante k que permite únicamente el movimiento vertical, con un amortiguamiento del 5 % del crítico. Dentro del bastidor hay un motor cuyo efecto dinámico equivale a una masa m con excentricidad e, girando a una velocidad constante Ω.
Considerando los valores numéricos $M = 900$ kg, $m = 100$ kg, $e = 0{,}01$ m, $k = 10^7$ N/m, $\Omega = 2000$ r.p.m., se pide:



1. Ecuación diferencial del movimiento.
2. Solución general de la ecuación anterior, tanto para el régimen transitorio como para el permanente (pasado suficiente tiempo). Se considerará que en el instante inicial la masa excéntrica está en la posición inferior con el bastidor en reposo.
3. Obtener el valor de Ω que produce resonancia para la amplitud del movimiento, y calcular dicha amplitud resonante.

1.- La aceleración en dirección vertical de m (positiva en sentido ascendente) vale $\ddot{y}_m = \ddot{y} + e\Omega^2\cos(\Omega t)$, siendo y el desplazamiento vertical del bastidor. Estableciendo la ecuación fundamental de la dinámica en esta dirección para el sistema completo, resulta la ecuación diferencial pedida:

$$\underbrace{(M+m)}_{M'}\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -me\Omega^2\cos(\Omega t) \tag{1}$$

2.- La solución general resulta de sumar la solución general de la homogénea y una particular de la completa,

$$y(t) = \underbrace{A_h\cos(\omega_D t + \phi_h)\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}}_{y_h(t)} + \underbrace{A_p\cos(\Omega t + \phi_p)}_{y_p(t)}, \tag{2}$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M'}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 100\,\mathrm{rad/s}}$$
$$\omega_D = \omega_0\sqrt{1-\xi^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_D = 99{,}875\,\mathrm{rad/s}}$$

Los parámetros (A_p, ϕ_p) de la solución particular y_p los obtendremos imponiendo que cumpla la ecuación diferencial (1). Las derivadas de y_p son

$$\begin{aligned} \dot{y}_p &= -A_p\Omega \operatorname{sen}(\Omega t + \phi_p); \\ \ddot{y}_p &= -A_p\Omega^2 \cos(\Omega t + \phi_p). \end{aligned} \tag{3}$$

Sustituyendo en (1),

$$-M' A_p \Omega^2 \cos(\Omega t + \phi_p) - c A_p \Omega \operatorname{sen}(\Omega t + \phi_p) + k A_p \cos(\Omega t + \phi_p) = -me\Omega^2 \cos(\Omega t) \tag{4}$$

Particularizando para $\Omega t = \pi/2$, podemos despejar

$$\operatorname{tg} \phi_p = \frac{c\Omega}{M'\Omega^2 - k} = \frac{2\xi\omega_0\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \tag{5}$$

Por otra parte, particularizando para $\Omega t + \phi_p = \pi/2$ se obtiene

$$A_p = \frac{me\Omega^2 \operatorname{sen} \phi_p}{c\Omega} = \frac{(m/M')e}{\sqrt{4\xi^2\omega_0^2/\Omega^2 + (1 - \omega_0^2/\Omega^2)^2}} \tag{6}$$

Sustituyendo los valores numéricos del enunciado, resulta

$$\boxed{A_p = -0{,}001293\,\mathrm{m}, \quad \phi_p = 3{,}539\,^\circ} \tag{7}$$

Los parámetros (A_h, ϕ_h) de la solución de la homogénea y_h los obtendremos imponiendo las condiciones iniciales a la solución completa. Las expresiones de estas son

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A_h \cos \phi_h + A_p \cos \phi_p \\ 0 &= \dot{y}(0) = -\xi\omega_0 A_h \cos \phi_h - \omega_D A_h \operatorname{sen} \phi_h - \Omega A_p \operatorname{sen} \phi_p \end{aligned} \tag{8}$$

De la primera de las anteriores se puede despejar

$$A_h = -A_p \frac{\cos \phi_p}{\cos \phi_h}, \tag{9}$$

y sustituyendo este valor en la segunda se obtiene

$$\operatorname{tg} \phi_h = \frac{\Omega \operatorname{tg} \phi_p - \xi\omega_0}{\omega_D} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi_h = 4{,}553\,^\circ}$$

Sustituyendo este valor en (9) resulta $\boxed{A_h = 0{,}001294\,\mathrm{m}}$, con lo cual quedan definidos todos los parámetros de (2).

3.- Para obtener el máximo de A_p en (6), basta con obtener el mínimo del radicando en el denominador. Derivando éste respecto a $\alpha = \omega_0^2/\Omega^2$:

$$\frac{d}{d\alpha}\left[4\xi^2\alpha + (1-\alpha)^2\right] = 4\xi^2 - 2(1-\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 - 2\xi^2.$$

Por lo que la frecuencia de resonancia es

$$\Omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_r = 100{,}25\,\mathrm{rad/s} = 957{,}3\,\mathrm{rpm}}$$

La amplitud resonante, sustituyendo Ω_r en (6), resulta

$$A_r = \frac{(m/M')e}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{me\omega_0^2}{c\omega_D} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_r = 0{,}01001\,\mathrm{m}.}$$