Mecánica

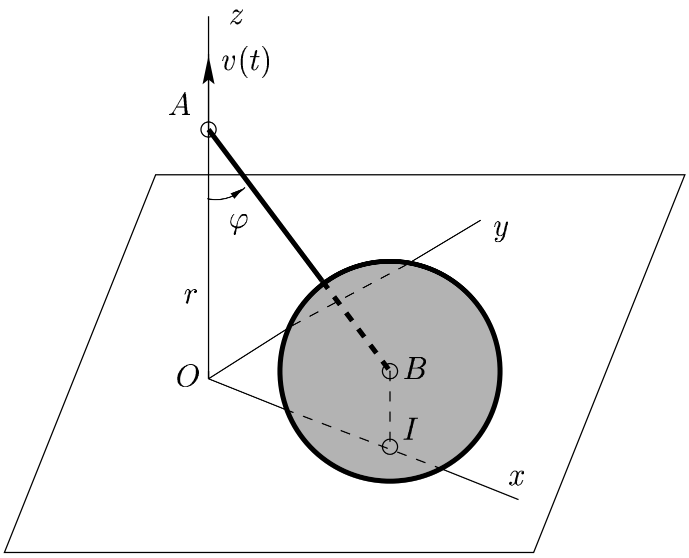
EXAMEN PARCIAL (30 de Enero de 1999)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º Tiempo: 60 min.

El sistema de la figura está formado por una varilla AB de longitud L, y una esfera de centro B y radio R. El extremo A de la varilla desliza sobre el eje fijo Oz con velocidad $v(t)$ dada. El otro extremo B está articulado en el centro de la esfera. Además se tienen los siguientes datos:

1. En todo momento la esfera rueda sin deslizar sobre el plano fijo Oxy, perpendicular a Oz;
2. Las componentes de rodadura y pivotamiento de la velocidad angular de la esfera son iguales;
3. La velocidad de B tiene una componente perpendicular al plano Oxz de valor igualmente $v(t)$ (además de la componente dirigida hacia Oz que induce el movimiento de A).



Refiriendo los resultados a los ejes $Oxyz$, tal que Ox lleva la dirección de la recta que une O con el punto I de contacto de la esfera con el plano, se pide:

1. Velocidades angulares de la varilla AB y de la esfera.
2. Aceleraciones angulares de la varilla AB y de la esfera.
3. Velocidad y aceleración del centro B de la esfera.
4. Lugares geométricos de los puntos de velocidad mínima de AB y la esfera. Determinar además los módulos de dichas velocidades mínimas.

1.- La relación entre las velocidades del sólido en los puntos A y B de la varilla proporciona una ecuación en la que interviene la velocidad angular de la misma:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\Omega}_{AB} \wedge \boldsymbol{BA} \tag{1}$$

Considerando que la distancia de B a Oxy es constante ($\boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{k} = 0$) y que $\boldsymbol{\Omega}_{AB} \cdot \boldsymbol{i} = 0$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_A &= v\,\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{v}_B &= v_{Bx}\,\boldsymbol{i} + v\,\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{\Omega}_{AB} &= \Omega_y\,\boldsymbol{j} + \Omega_z\,\boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $v = v(t)$ es la ley de velocidad variable mencionada en el enunciado. Sustituyendo en (1), resulta:

$$\boldsymbol{\Omega}_{AB} = \frac{v}{L\,\mathrm{sen}\,\varphi}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \tag{3}$$

Para obtener la velocidad angular de la esfera ($\boldsymbol{\omega}$), partimos de la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_I + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{IB} \tag{4}$$

Si se sustituyen $\boldsymbol{v}_I = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{IB} = R\,\boldsymbol{k}$ y (2) resulta:

$$\omega_x = -\frac{v}{R}; \quad \omega_y = -\frac{v}{R\,\mathrm{tg}\,\varphi}. \tag{5}$$

Imponiendo la condición de que la velocidad de pivotamiento (ω_z) sea igual a la de rodadura,

$$\omega_z = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = \frac{v}{R\,\mathrm{sen}\,\varphi}. \tag{6}$$

La velocidad angular de la esfera resulta:

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{v}{R}\left(\boldsymbol{i} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\mathrm{sen}\,\varphi}\boldsymbol{k}\right) \tag{7}$$

2.- Para obtener las aceleraciones angulares derivamos las expresiones (3) y (7). Debemos tener en cuenta que los ejes $Oxyz$ son móviles, girando con velocidad angular:

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{ref}} = \frac{v}{L\,\mathrm{sen}\,\varphi}\boldsymbol{k} \tag{8}$$

Operando:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{AB} &= \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{AB}}{dt}\right)_{\mathrm{rel}} + \frac{v}{L\,\mathrm{sen}\,\varphi}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega}_{AB} \\ &= -\frac{v^2}{L^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}\boldsymbol{i} + \left(\frac{\dot{v}}{L\,\mathrm{sen}\,\varphi} - \frac{v\dot{\varphi}\cos\varphi}{L\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}\right)(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\mathrm{rel}} + \frac{v}{L\,\mathrm{sen}\,\varphi}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\omega} \\ &= \left(-\frac{\dot{v}}{R} + \frac{v^2\cos\varphi}{LR\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}\right)\boldsymbol{i} + \left(-\frac{\dot{v}}{R\,\mathrm{tg}\,\varphi} + \frac{v\dot{\varphi}}{R\,\mathrm{sen}^2\,\varphi} - \frac{v^2}{LR\,\mathrm{sen}\,\varphi}\right)\boldsymbol{j} + \\ &\quad \left(-\frac{\dot{v}}{R\,\mathrm{sen}\,\varphi} + \frac{v\dot{\varphi}\cos\varphi}{R\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}\right)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{10}$$

donde debe sustituirse el valor:

$$\dot{\varphi} = -\frac{v}{L\,\mathrm{sen}\,\varphi} \tag{11}$$

3.- De la velocidad del punto B, las componentes según $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ son dato y valen respectivamente v y 0. La componente según $\boldsymbol{i}$ se obtiene de la ecuación (1), resultando:

$$\boldsymbol{v}_B = -\frac{v}{\operatorname{tg}\varphi}\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} \tag{12}$$

La aceleración se calcula derivando la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_B &= \left(\frac{d\boldsymbol{v}_B}{dt}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega}_{\text{ref}} \wedge \boldsymbol{v}_B \\ &= \left(-\frac{\dot{v}\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} + \frac{v\dot{\varphi}}{\operatorname{sen}^2\varphi} - \frac{v^2}{L\operatorname{sen}\varphi}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dot{v} - \frac{v^2\cos\varphi}{L\operatorname{sen}^2\varphi}\right)\boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{13}$$

4.- Los lugares geométricos pedidos son las rectas correspondientes al eje del movimiento helicoidal tangente de cada uno de los sólidos.

Para la varilla es la recta que pasa por el punto $(1/2\,L\operatorname{sen}\varphi, 0, R + L\cos\varphi)$ y lleva la dirección de $\boldsymbol{\Omega}_{AB}$, es decir, $(0, 1, 1)$. La velocidad mínima de sus puntos es:

$$v_{\min} = \boldsymbol{v}_A \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}_{AB}}{\Omega_{AB}} = \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{14}$$

Para la esfera, es la recta que pasa por el punto de contacto de la misma con el plano Oxy (que es un punto de velocidad nula) y lleva la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. Por ser un movimiento de rodadura sin deslizamiento, la velocidad de los puntos del eje es nula (se trata de un eje instantáneo de rotación).