



TV: TeleVisión – Plan 2010

Codificación de transformadas

Contenido

- ★ Introducción
 - ★ Estadísticas de una imagen
 - ★ Cambio de base
 - ★ Estadísticas de los coeficientes de la transformada
- ★ Transformadas unidimensionales
- ★ Transformadas bidimensionales
 - ★ Transformadas multidimensionales
 - ★ Transformadas bidimensionales separables
 - ★ Transformadas bidimensionales separables de núcleo simétrico
- ★ Codificación
 - ★ Esquema de transmisor y receptor
 - ★ Efecto de la cuantificación
 - ★ Asignación óptima de bits ($N=2$)
 - ★ Asignación óptima de bits ($N>2$)
 - ★ Reoptimización gráfica
- ★ Transformada óptima

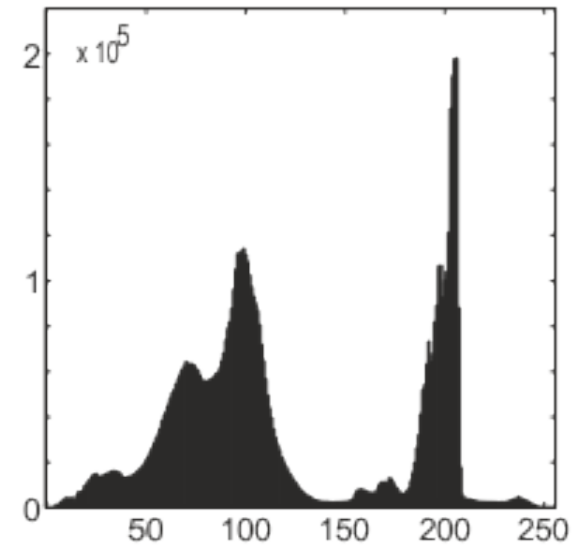


Contenido

- ★ Transformadas subóptimas
 - ★ Transformada de Hadamard
 - ★ Transformada de Haar
 - ★ Transformada Discreta de Fourier
 - ★ Transformada Discreta del Coseno
 - Relación DCT-KLT
 - Ejemplo de cálculo
 - Relación DFT-DCT
 - Fenómeno de Gibbs. Comportamiento en los bordes
 - ★ Transformadas solapadas. La MDCT

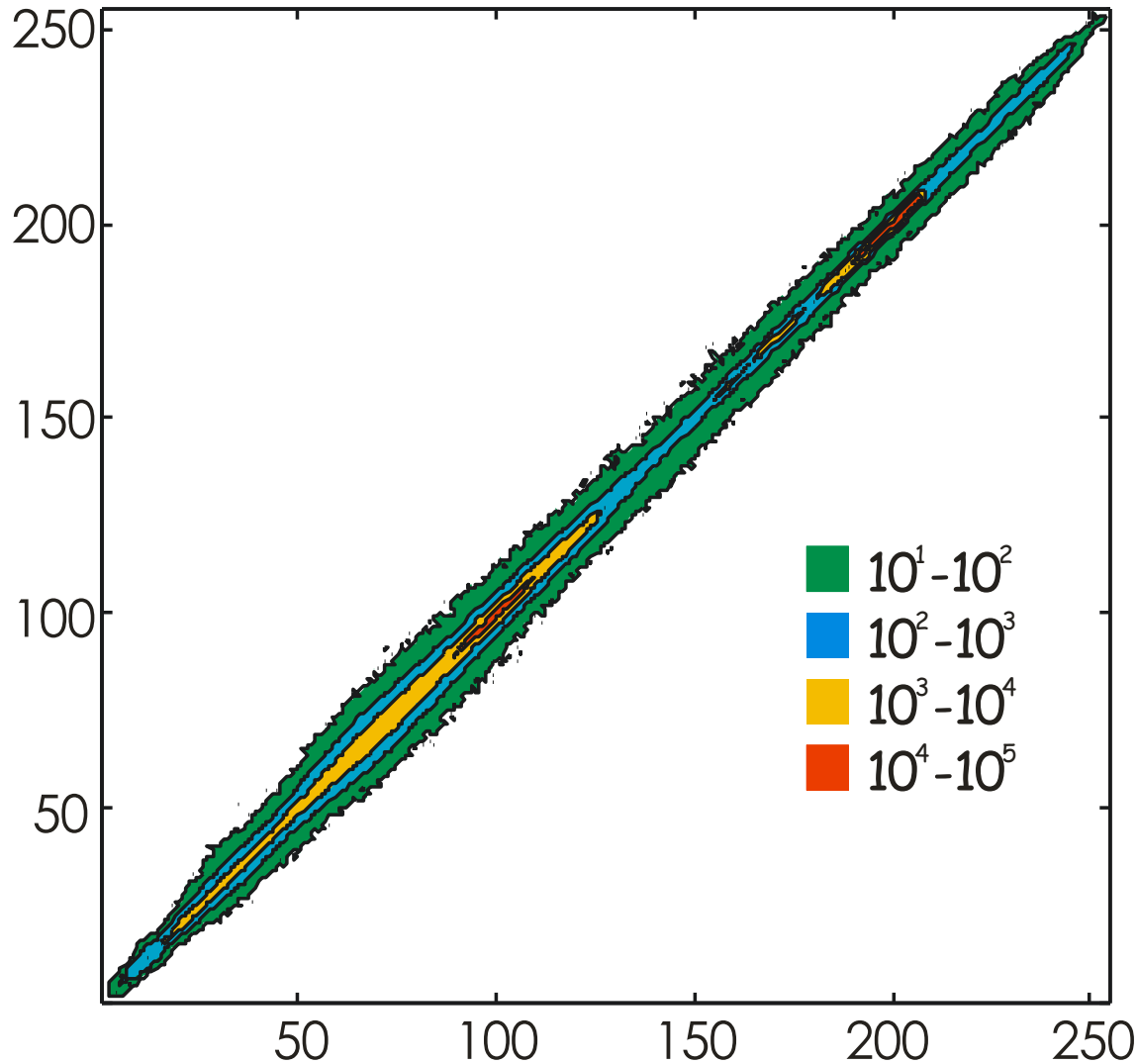
Introducción

Los elementos contiguos de una imagen son, con mucha frecuencia, muy parecidos entre sí. Si se tratan como símbolos independientes no es posible sacar partido de esta característica.



histograma

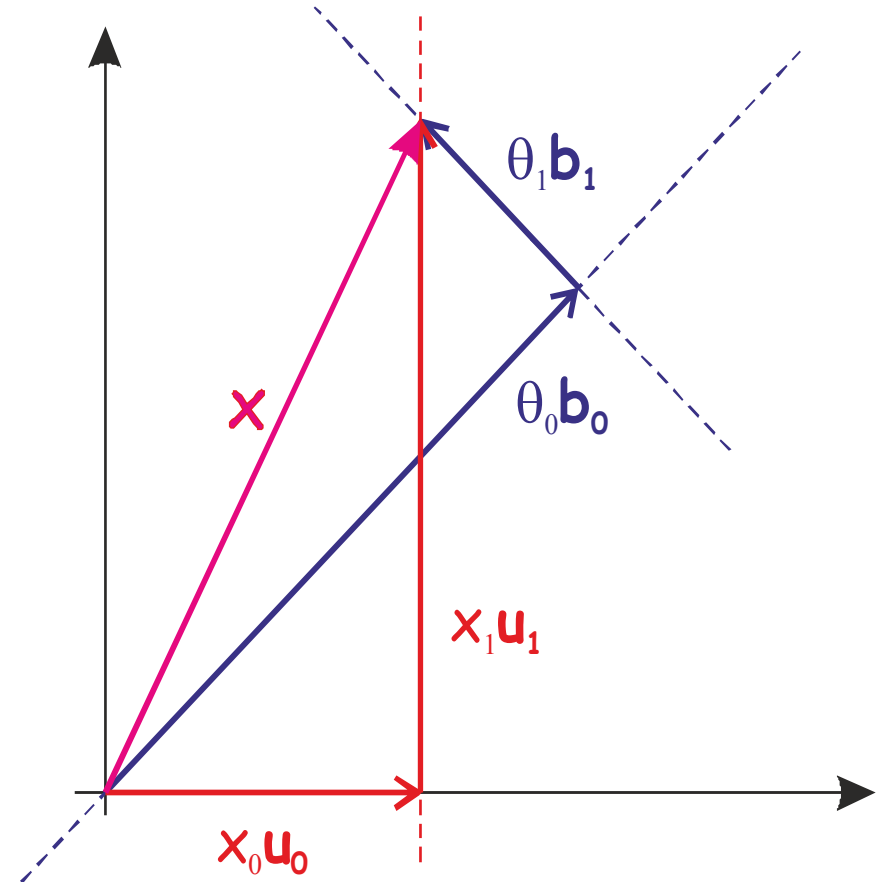
Introducción



- ★ Histograma de parejas de píxeles. La mayor parte se agrupan alrededor de la diagonal $x_0=x_1$

Introducción

- ★ Una forma de sacar partido a esta propiedad es plantear un cambio de coordenadas como el que se ilustra en la figura. Al realizar este cambio, cabe esperar que la incertidumbre sobre la segunda coordenada del vector disminuya (sabemos que muy probablemente va a estar próxima a cero) aún a pesar de incrementar ligeramente la incertidumbre sobre la primera coordenada.



Introducción

- Un bloque de dimensión 2, $\mathbf{x} = (x_0, x_1)^T$, extraído de una imagen \mathbf{x} puede interpretarse como un vector:

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1)^T = x_0(1,0)^T + x_1(0,1)^T = x_0\mathbf{u}_0 + x_1\mathbf{u}_1$$

- La nueva base $B = \{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1\}$, será *ortonormal*: esto es $\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_1 = 0$ y $\|\mathbf{b}_0\| = \|\mathbf{b}_1\| = 1$.
- Ejemplo: Los vectores $\mathbf{v}_0 = (1,1)$ y $\mathbf{v}_1 = (1,-1)$ son ortogonales:

$$\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$$

y dividiendo por su módulo:

$$B = \{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1\} = \left\{ \frac{\mathbf{v}_0}{\|\mathbf{v}_0\|}, \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Introducción

Las coordenadas del vector \mathbf{x} con respecto a la nueva base son:

$$\mathbf{x} = x_0 \mathbf{u}_0 + x_1 \mathbf{u}_1 = \theta_0 \mathbf{b}_0 + \theta_1 \mathbf{b}_1$$

Multiplicando la expresión anterior, alternativamente por cada vector de la nueva base obtenemos un sistema de ecuaciones del que pueden obtenerse las nuevas coordenadas:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_0 = \theta_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 + \theta_1 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_0 = \theta_0$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_1 = \theta_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_1 + \theta_1 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \theta_1$$

Introducción

Para el ejemplo, expresando los productos escalares en forma matricial:

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

que puede expresarse de forma más sintética como:

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Introducción

Las coordenadas obtenidas son reales (aunque múltiplos de $1/\sqrt{2}$):

$$\theta_{1,\min} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \right) = 0$$

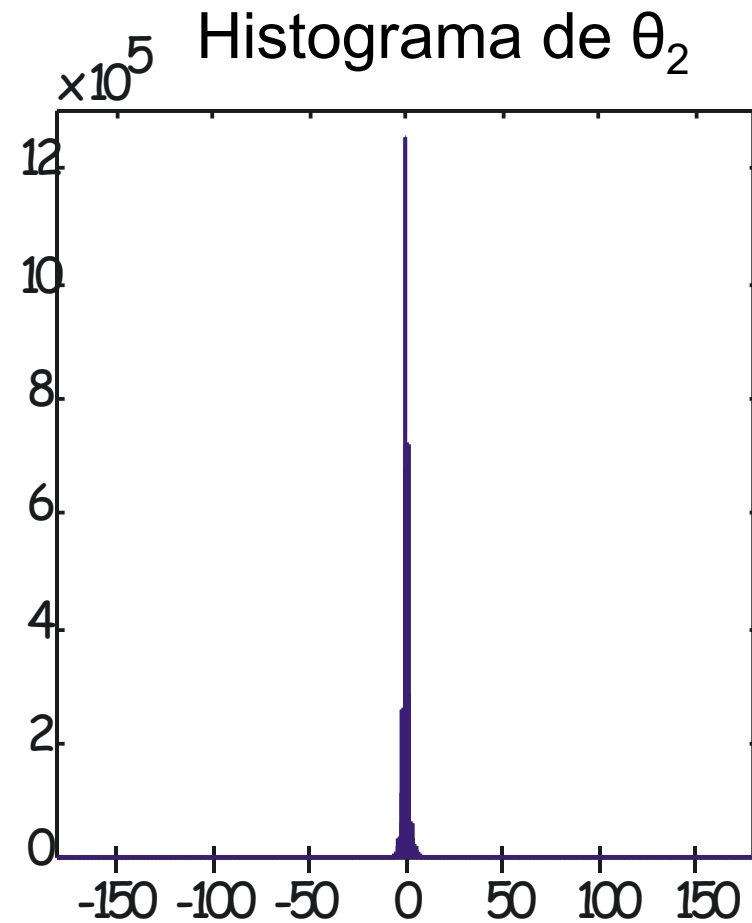
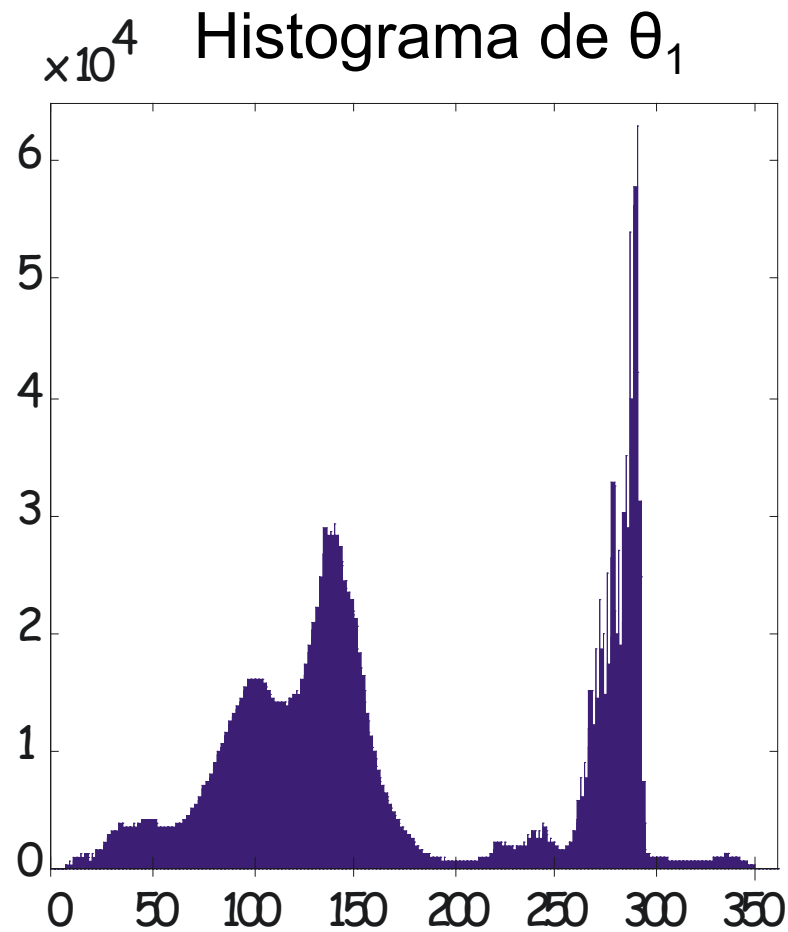
$$\theta_{1,\max} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 255 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 255 \right) \approx 360,628$$

$$\theta_{2,\min} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 255 \right) \approx -180,314$$

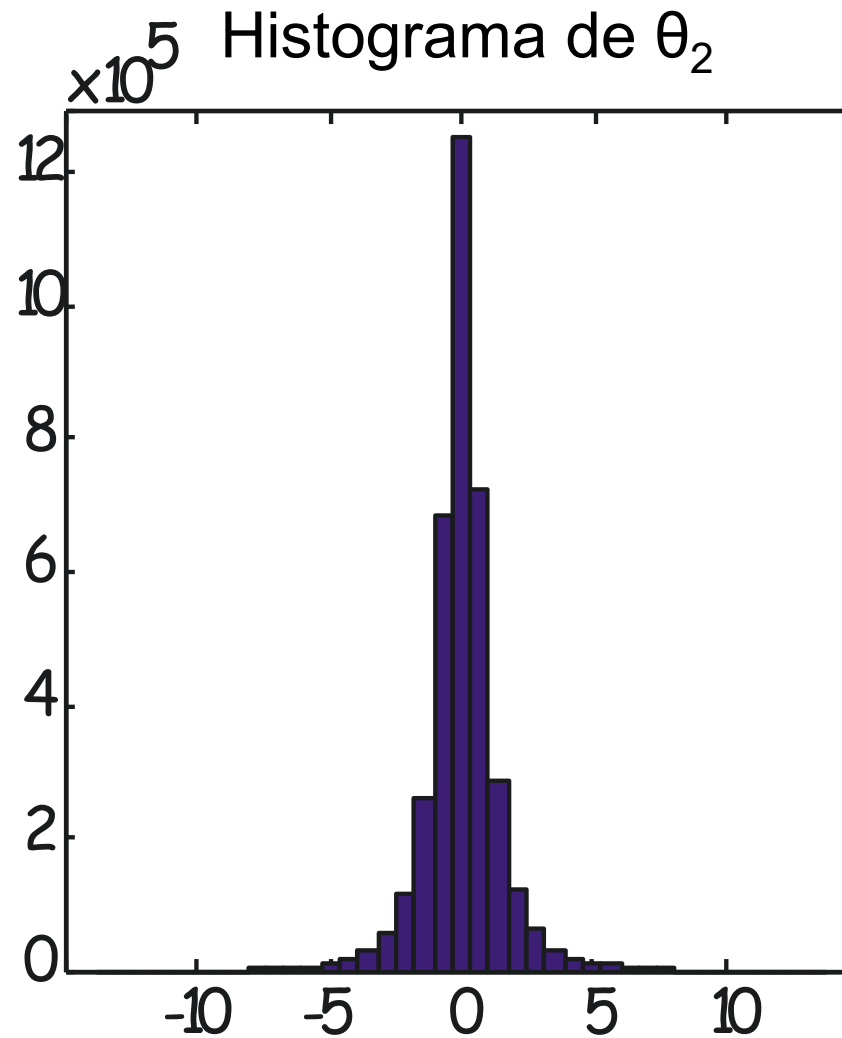
$$\theta_{2,\max} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 255 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \right) \approx +180,314$$

La ventaja se aprecia al examinar el histograma:

Introducción



Introducción





Codificación de transformadas

Transformadas unidimensionales

Transformadas unidimensionales

Aplicar una transformada lineal a un bloque de dimensión N consiste simplemente en interpretar el bloque como un vector y calcular sus coordenadas respecto a una nueva base. Dicha base define la transformada.

Sea la nueva base

$$B = \{ \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-1} \},$$

$$\text{con } \mathbf{a}_k = [a(0, k), a(1, k), \dots, a(N-1, k)]^T$$

La transformada, θ , es tal que

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{N-1} \theta_k \cdot \mathbf{a}_k.$$

Transformadas unidimensionales ortonormales

Una transformada ortonormal está definida por una base ortonormal. Definiendo el producto escalar: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}^*$ debe verificarse:

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{a}_j^* = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

La coordenada k-esima de la nueva base se calcula premultiplicando por \mathbf{a}_k :

$$\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x} \rangle = \left\langle \mathbf{a}_k, \sum_{i=0}^{N-1} \theta_i \cdot \mathbf{a}_i \right\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \theta_i^* \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_i \rangle = \theta_k^* \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \rangle = \theta_k^* \|\mathbf{a}_k\|^2 = \theta_k^* = \mathbf{a}_k^T \cdot \mathbf{x}$$

$$\theta_k = \mathbf{a}_k^{T*} \cdot \mathbf{x}$$

Relación que puede representarse de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{*T} \\ \mathbf{a}_1^{*T} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N-1}^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^*(0,0) & a^*(1,0) & \cdots & a^*(N-1,0) \\ a^*(0,1) & a^*(1,1) & \cdots & a^*(N-1,1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^*(0,N-1) & a^*(1,N-1) & \cdots & a^*(N-1,N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Transformadas unidimensionales ortonormales

En consecuencia la transformada, θ del vector columna \mathbf{x} de dimensión N se determina premultiplicando éste (conjugado si es complejo) por una matriz cuadrada, \mathbf{A} , cuyas filas son los vectores de la base:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

$$\theta_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_n a^*(n, k)$$

Para calcular la transformada inversa basta premultiplicar $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ por la inversa de la matriz \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Transformadas unidimensionales ortonormales

La inversa de \mathbf{A} es muy fácil de determinar. Para ello basta tener en cuenta que las filas de la matriz \mathbf{A} son los vectores de la base y por tanto, multiplicada por una matriz cuyas columnas sean los vectores conjugados de la base produce la matriz identidad:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{*T} \\ \mathbf{a}_1^{*T} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N-1}^{*T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{N-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{*T} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_0^{*T} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_0^{*T} \mathbf{a}_{N-1} \\ \mathbf{a}_1^{*T} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1^{*T} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1^{*T} \mathbf{a}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{N-1}^{*T} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_{N-1}^{*T} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{N-1}^{*T} \mathbf{a}_{N-1} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{*T} \cdot \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de $\mathbf{a}_i^{*T} \mathbf{a}_j = (\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j^*)^* = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle^* = \delta_{ij}^* = \delta_{ij}$

En consecuencia, $\mathbf{A}^{*T} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{*T} = \mathbf{I}$, de donde se deduce $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{*T}$.



Codificación de transformadas

Transformadas bidimensionales

Transformadas multidimensionales

Los resultados anteriores pueden aplicarse a señales multidimensionales apilando los datos para formar un vector. Así, en dos dimensiones:

$$\begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,n} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,0} & x_{m,1} & \cdots & x_{m,n} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{0,0} \\ x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{m,0} \\ x_{0,1} \\ x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{m,1} \\ \vdots \\ x_{m-1,n} \\ x_{m,n} \end{bmatrix}$$

Transformadas multidimensionales

De forma más compacta puede escribirse, en dos dimensiones:

$$\theta(i, j) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) \cdot a(i, j, n, m)$$

Y en tres:

$$\theta(i, j, k) = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(l, m, n) \cdot a(i, j, k, l, m, n)$$

En dos dimensiones el núcleo de la transformación se describe por $(N \cdot M)^2$ elementos, y en tres por $(N \cdot M \cdot L)^2$.

En codificación de imágenes suelen emplearse subimágenes bidimensionales de dimensiones 4x4 (N=4), 8x8 (N=8) o 16x16 (N=16).

Cuando se trabaja con transformadas tridimensionales se utilizan, con mayor motivo, bloques de dimensiones reducidas: 4x4x4, 8x8x4, por ejemplo.

Transformadas bidimensionales separables

En la práctica, para limitar la complejidad se trabaja con *transformadas de núcleo separable*, que pueden calcularse mediante la aplicación iterada de transformaciones unidimensionales.

Una transformada bidimensional separable es aquella en la que cada elemento de su núcleo puede escribirse como producto de los términos correspondientes a los núcleos de dos transformaciones unidimensionales:

$$a(i, j, n, m) = a_v(i, n) \cdot a_h(j, m)$$

La transformación en dos dimensiones puede realizarse en dos etapas:

$$\begin{aligned} \theta(i, j) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) \cdot a_v(i, n) \cdot a_h(j, m) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} a_v(i, n) \cdot \left(\sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) \cdot a_h(j, m) \right) \end{aligned}$$

Transformadas bidimensionales separables

Matricialmente:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}_v (\mathbf{A}_h \mathbf{X}^T)^T = \mathbf{A}_v \mathbf{X} \mathbf{A}_h^T$$

Donde \mathbf{X} tiene dimensiones $n \times m$, \mathbf{A}_h tiene dimensiones $m \times m$ y \mathbf{A}_v tiene dimensiones $n \times n$.

Para calcular la transformación inversa basta tener en cuenta que

$$\mathbf{A}_v^{-1} = \mathbf{A}_v^{*T} \quad \mathbf{A}_h^{-1} = \mathbf{A}_h^{*T}$$

$$\mathbf{A}_v^{*T} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}_v^{-1} \mathbf{A}_v (\mathbf{A}_h \mathbf{X}^T)^T = (\mathbf{A}_h \mathbf{X}^T)^T$$

$$\mathbf{A}_h \mathbf{X}^T = (\mathbf{A}_v^{*T} \cdot \boldsymbol{\theta})^T$$

$$\mathbf{A}_h^{*T} \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{X}^T = \mathbf{A}_h^{*T} (\mathbf{A}_v^{*T} \cdot \boldsymbol{\theta})^T$$

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}_h^{*T} (\mathbf{A}_v^{*T} \boldsymbol{\theta})^T \right)^T = \mathbf{A}_v^{*T} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{A}_h^*$$

Transformadas bidimensionales separables de núcleo simétrico

En la práctica suelen utilizarse núcleos simétricos, que verifican:

$$\mathbf{A}_v = \mathbf{A}_h = \mathbf{A}$$

Resultando:

Transformada directa:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}^T$$

Transformada inversa:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{*T} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{A}^*$$



Codificación de transformadas

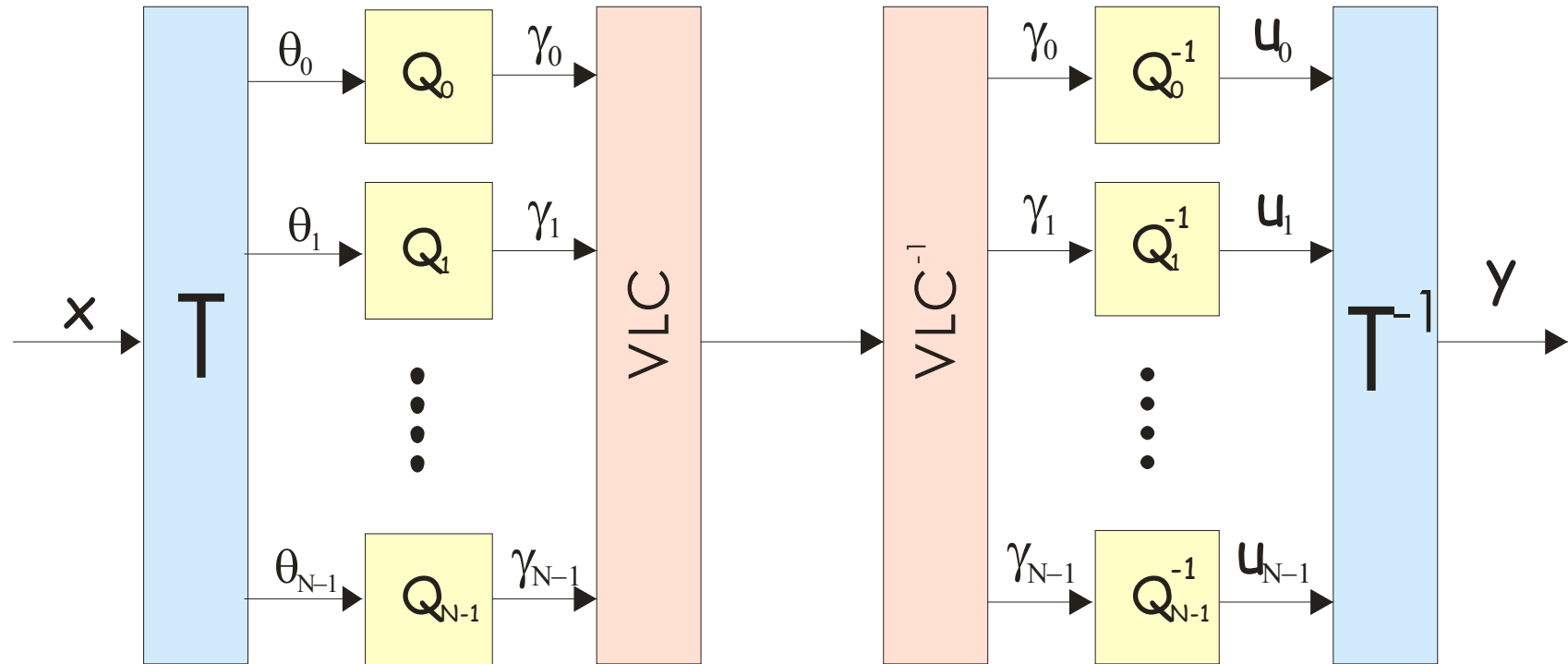
Codificación

Codificación de transformadas

La codificación de una imagen mediante transformadas se realiza de la siguiente manera:

- Se descompone la imagen original en un conjunto de subimágenes, \mathbf{x} , generalmente de menores dimensiones, cuya superposición coincide con la imagen a codificar. La dimensión de cada subimagen suele ser pequeña (4x4, 8x8, 16x16...).
- Se calcula la transformada de cada una de las subimágenes anteriores, obteniendo para cada una de ellas una matriz (vector) de coeficientes θ .
- Se cuantifica y codifica la matriz (vector) de coeficientes, $\mathbf{u} = Q(\theta)$
- El decodificador, a partir del vector cuantificado, \mathbf{u} , calculando la transformación inversa, obtiene una aproximación, \mathbf{y} , a cada bloque de la imagen original. La superposición de los bloques define la aproximación a la imagen original.

Codificación de transformadas



Codificación de transformadas

Empleando, para simplificar, transformadas ortonormales reales en una dimensión, y suponiendo la señal de media nula, tenemos:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{u} = Q(\boldsymbol{\theta})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$$

Este tipo de transformación conserva la energía total de la imagen:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] = \frac{1}{N} E[x^T x] = \frac{1}{N} E[(\mathbf{A}^T \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\theta}] = \frac{1}{N} E[\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{A} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\theta}] = \frac{1}{N} E[\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}] = \sigma_\theta^2$$

donde

$$\sigma_\theta^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{\theta_k}^2 \qquad \sigma_{\theta_k}^2 = E[\theta_k^2]$$

Codificación de transformadas: Efecto de la cuantificación

El potencia del error de reconstrucción puede calcularse de manera similar:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{rk}^2 = \frac{1}{N} E[(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} - \mathbf{Y})] = \frac{1}{N} E[(\mathbf{A}^T (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{u}))^T \mathbf{A}^T (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{u})]$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{N} E[(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{u})^T (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{u})] = \frac{1}{N} E[\mathbf{q}^T \mathbf{q}]$$

donde $\mathbf{q} = \boldsymbol{\theta} - \mathbf{u}$, luego, el error de reconstrucción coincide con el error de cuantificación en los coeficientes de la transformada. De hecho, el vector de errores de reconstrucción puede obtenerse calculando la transformación inversa del vector de errores de cuantificación de los coeficientes de la transformada:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}^T \mathbf{q}$$

Codificación de transformadas: Efecto de la cuantificación

El error de cuantificación de cada coeficiente de la transformada dependerá de su distribución estadística. Podemos escribir en consecuencia:

$$\sigma_{qk}^2 = \varepsilon_{qk}^2 \sigma_{\theta k}^2 \approx \varepsilon^2 2^{-2R_k} \sigma_{\theta k}^2$$

Esta aproximación sólo es válida para valores de R_k suficientemente elevados.

$$R_k = \frac{1}{2} \log_2 \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{\theta k}^2}{\sigma_{qk}^2}$$

Asignación óptima de bits

Minimizar el error de reconstrucción:

$$\sigma_q^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{qk}^2$$

teniendo en cuenta que no puede sobrepasarse la capacidad del canal, medida en bits por muestra, R .

$$R = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R_k$$

Asignación óptima de bits para N=2

Minimizar:

$$\sigma_r^2 = \sigma_q^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{q0}^2 + \sigma_{q1}^2) \approx \frac{\varepsilon^2}{2}(2^{-2R_0} \sigma_{\theta 0}^2 + 2^{-2R_1} \sigma_{\theta 1}^2)$$

sujeto a la restricción $R_0 + R_1 = 2R$.

Substituyendo $R_1 = 2R - R_0$, calculando la derivada parcial e igualando a cero resulta:

$$\frac{\partial \sigma_r^2}{\partial R_0} = 2 \ln 2 \left[-\sigma_0^2 2^{-2R_0} + \sigma_1^2 2^{+2R_0-4R} \right] = 0$$

$$\sigma_1^2 2^{2R_0-4R} = \sigma_0^2 2^{-2R_0} \rightarrow 2^{4R_0-4R} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \rightarrow 4(R_0 - R) = \log_2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} = 2 \log_2 \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$$

de donde:

$$\frac{\sigma_0^2}{2^{2R_0}} = \frac{\sigma_1^2}{2^{2R_1}} \quad R_0 = R + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \quad R_1 = R + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$$

Asignación óptima de bits para N=2

La potencia de ruido de cuantificación es independiente del coeficiente (aunque tengan potencias diferentes):

$$\sigma_q^2 = \sigma_{q0}^2 = \sigma_{q1}^2 = \varepsilon^2 2^{-2R} (\sigma_0 \sigma_1)$$

La ganancia de la codificación de transformaciones para N=2 resulta:

$$G_{TC,Max} = \frac{\sigma_{r,PCM}^2}{\sigma_{r,TC}^2} = \frac{\varepsilon^2 2^{-2R} \sigma_x^2}{\varepsilon^2 2^{-2R} (\sigma_0 \sigma_1)} = \frac{\frac{1}{2} (\sigma_0^2 + \sigma_1^2)}{(\sigma_0 \sigma_1)} = \frac{\frac{1}{2} (\sigma_0^2 + \sigma_1^2)}{\sqrt{\sigma_0^2 \sigma_1^2}}$$

La relación anterior indica el incremento de calidad que puede esperarse al codificar la transformada de una señal en vez de ésta (PCM) cuando se utiliza el mismo número de bits por muestra., suponiendo que el rendimiento de los cuantificadores es idéntico.

Asignación óptima de bits ($N > 2$)

La formulación del problema es similar a la del caso anterior:

$$\text{Minimizar } \sigma_q^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{q_k}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k^2 2^{-2R_k} \sigma_k^2$$

$$\text{Sujeto a } \sum_{k=0}^{N-1} R_k = NR$$

Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, debe resolverse:

$$\frac{\partial}{\partial R_k} \left[\sigma_q^2 - \lambda \left(R - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R_k \right) \right] = 0 \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Puede obtenerse a partir de las ecuaciones precedentes la siguiente solución:

$$R_k = R + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\varepsilon_k^2 \cdot \sigma_k^2}{\sqrt[N]{\prod_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i^2 \cdot \sigma_i^2}}$$

Asignación óptima de bits ($N > 2$)

Suponiendo $\varepsilon_k^2 = \varepsilon^2 \quad \forall k$,

$$R_k = R + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_k^2}{\sqrt[N]{\prod_{i=0}^{N-1} \sigma_i^2}}$$

que, análogamente al caso $N=2$, conduce a una potencia de ruido de cuantificación independiente del orden del coeficiente de la transformada:

$$\sigma_r^2 = \sigma_q^2 = \sigma_{qk,opt}^2 = \varepsilon^2 2^{-2R} \sqrt[N]{\prod_{i=0}^{N-1} \sigma_i^2}$$

Para conseguir este efecto basta con que todos los cuantificadores, independientemente del orden del coeficiente que cuantifican, tengan el mismo escalón de cuantificación (cuantificación uniforme). El paso de cuantificación sería Δ , de manera que

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

Asignación óptima de bits ($N > 2$)

La ganancia G_{TC} puede obtenerse teniendo en cuenta que, para las transformaciones ortonormales, la potencia total de la señal se conserva:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k^2$$

$$G_{TC, \max} = \frac{\sigma_{PCM}^2}{\sigma_{TC, \min}^2} = \frac{\varepsilon^2 2^{-2R} (\sigma_x^2)}{\sigma_{TC, \min}^2} = \frac{\varepsilon^2 2^{-2R} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k^2 \right)}{2^{-2R} \left[\prod_{k=0}^{N-1} \varepsilon^2 \sigma_k^2 \right]^{\frac{1}{N}}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k^2}{\left[\prod_{k=0}^{N-1} \sigma_k^2 \right]^{\frac{1}{N}}}$$

$$SNR|_{TC} (dB) = SNR|_{PCM} (dB) + 10 \log G_{TC}$$

En la práctica las distribuciones de la señal y y de los coeficientes transformados tienden a ser diferentes (uniforme para la primera y laplaciana, aproximadamente, para los segundos), por lo que el parámetro ε de rendimiento del cuantificador no se cancela y la ganancia debería corregirse con un factor que puede aproximarse por unos 6-6.5 dB.

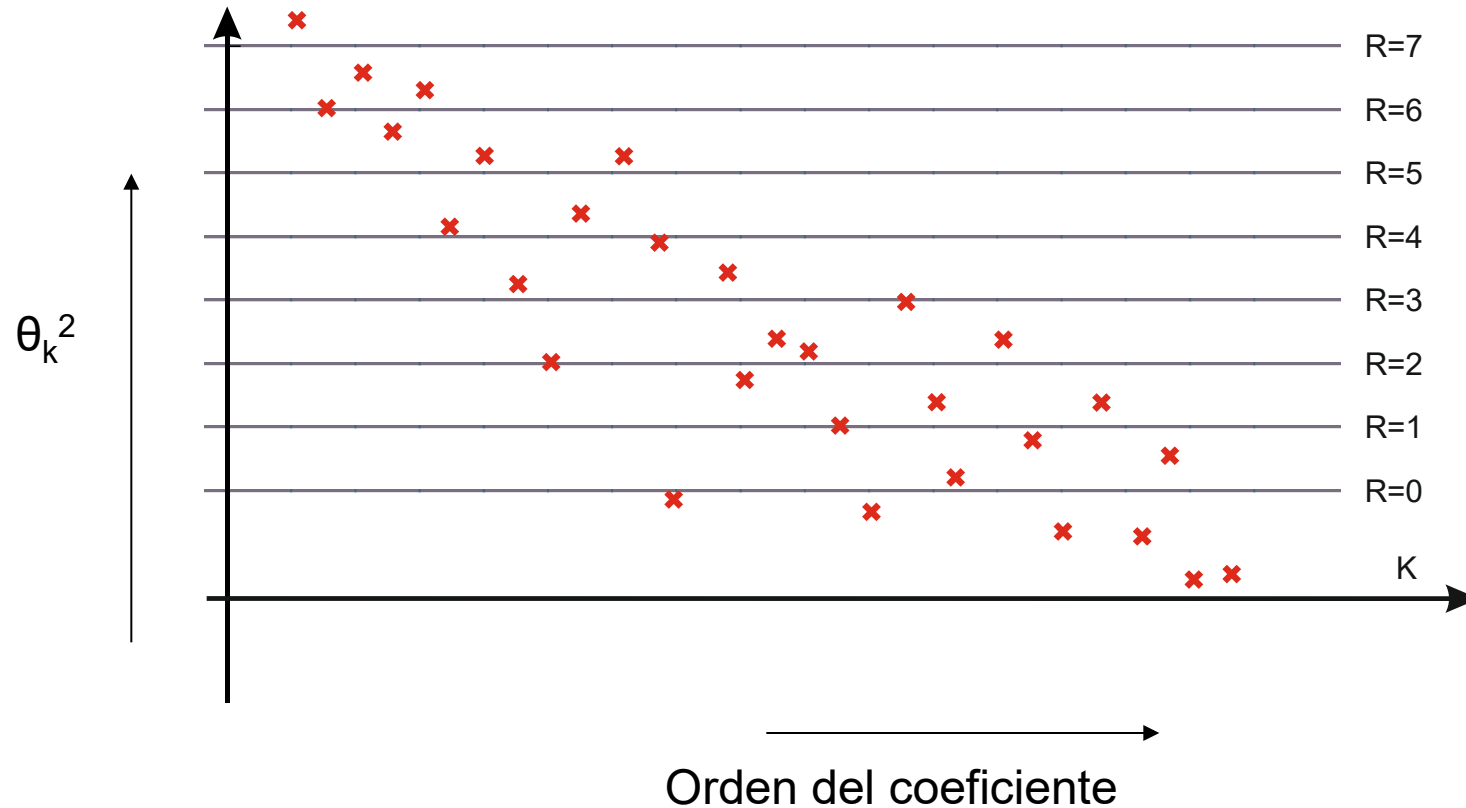
Puede demostrarse que:

$$G_{TC, \max} = G_{DPCM, \max}$$

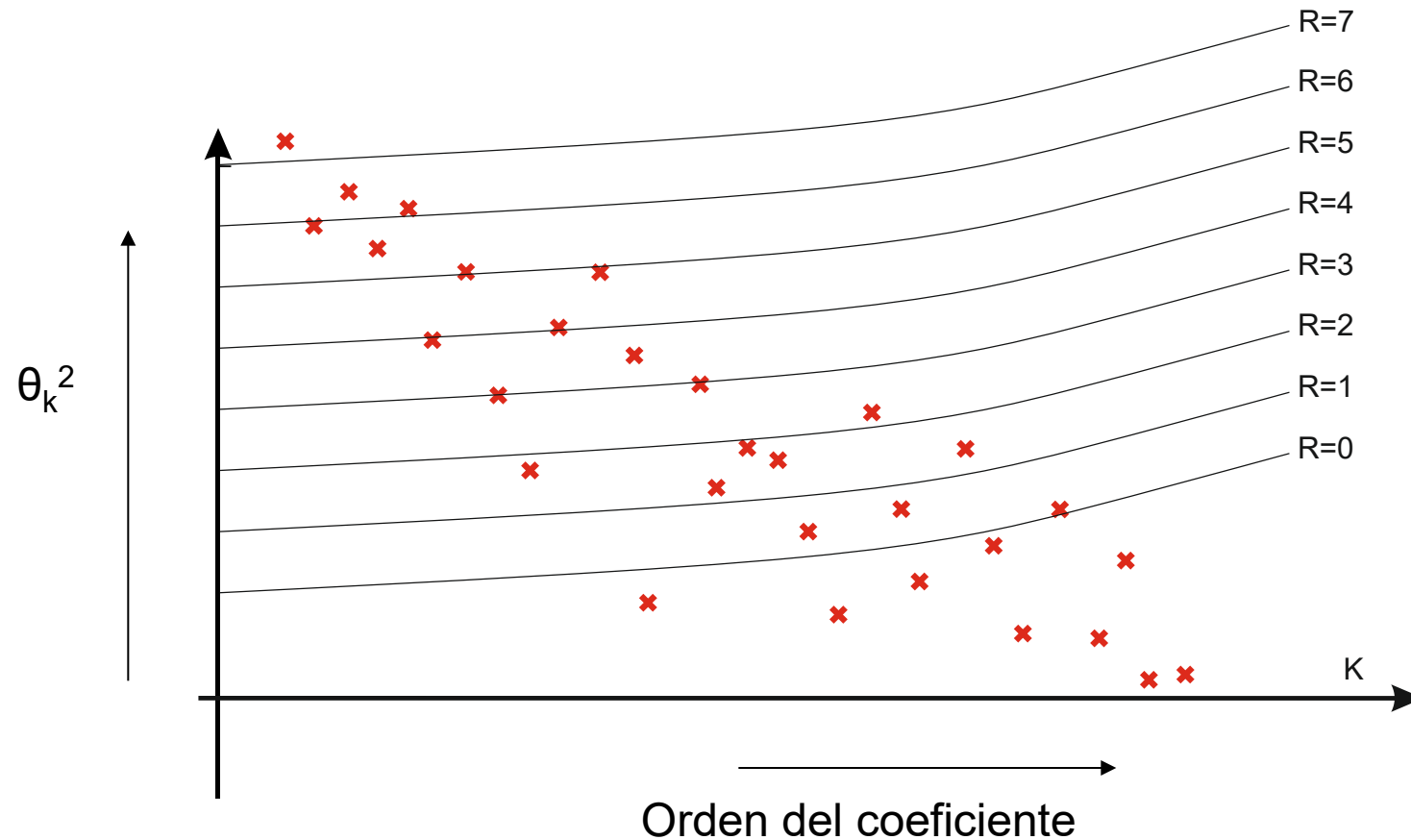
Asignación óptima de bits

- El número de bits asignados a la cuantificación de un coeficiente es mayor que la media por muestra, R , si su varianza es mayor que la media geométrica de las varianzas (el argumento del logaritmo en base 2 es mayor que la unidad).
- Cuanto menor es la varianza de un coeficiente en comparación con la media geométrica de las varianzas, menor es el número de bits requerido.
- Si la varianza es suficientemente pequeña, el número de bits requerido, R_k , puede ser negativo. Dado que lo más que puede hacerse es no transmitir el coeficiente (asignar cero bits), la solución obtenida no siempre es realizable.
- De la misma forma, en la práctica suele requerirse un número de bits entero.
- La solución práctica implica la reoptimización de la solución obtenida

Reoptimización gráfica



Reoptimización gráfica



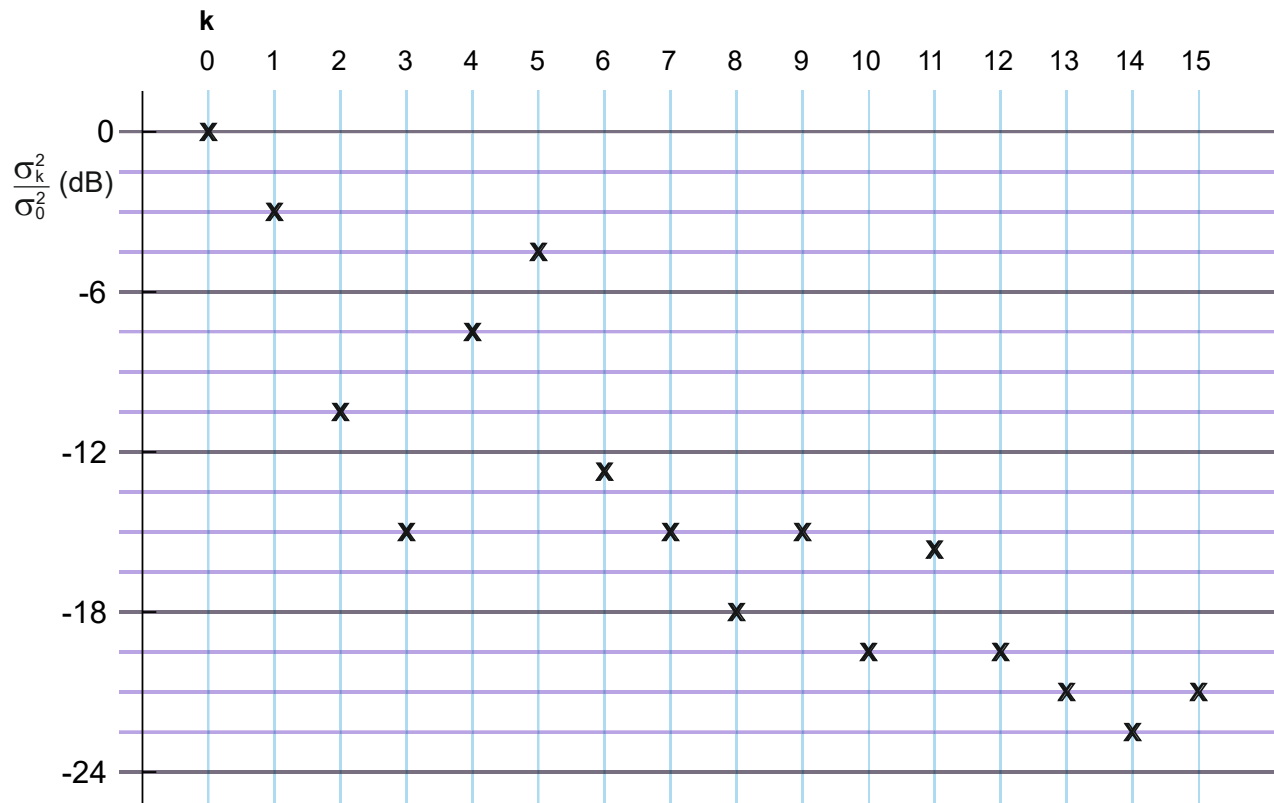
Muestreo zonal (*zonal sampling*)

1. Calcular $\sigma_{\theta(k)}^2$, varianzas de los coeficientes de la transformada.
2. Hacer $R_k = 0$ para todo k y $R_b = MR$, donde R es el número de bits por muestra disponible para la transmisión. En consecuencia R_b es el número total de bits disponible
3. Seleccionar el máximo de entre todas las varianzas. Supongamos que este valor es $\sigma_{\theta(i)}^2$
4. Incrementar R_l en una unidad y dividir $\sigma_{\theta(i)}^2$ por 4.
5. Hacer $R_b \leftarrow R_b - 1$
6. Si $R_b > 0$ volver a 3, si no, parar

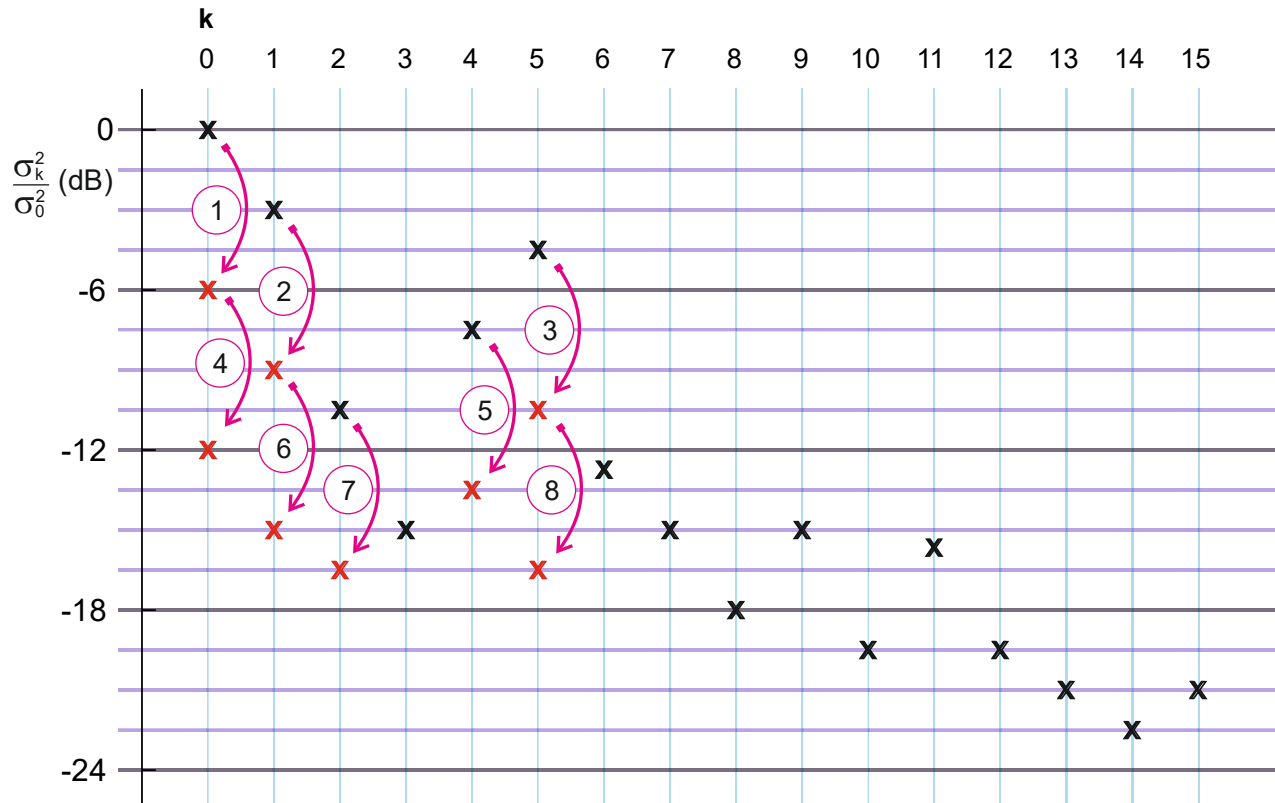
El nombre de esta técnica se deriva del aspecto que presenta el número de bits asignados en función del orden del coeficiente.

Muestreo zonal (*zonal sampling*) Ejemplo

En la figura adjunta se presentan las varianzas de los 16 coeficientes de una transformación, llevando en abscisas el n número del coeficiente y en ordenadas la magnitud de cada varianza comparada con la del primer coeficiente (0) en dB. Se pide determinar el número de bits a asignar a cada coeficiente utilizando el algoritmo de cuantificación zonal.



Muestreo zonal (*zonal sampling*) Solución



En consecuencia se asignan 2 bits al coeficiente 0, 2 bits al coeficiente 1, 1 bit al coeficiente 2, 1 bit al coeficiente 4, 2 bits al coeficiente 5, y cero bits a todos los demás.

Muestreo zonal (*zonal sampling*)

Por ejemplo, para una transformada de 8x8

8	7	5	3	1	1	0	0
7	5	3	2	1	0	0	0
4	3	2	1	1	0	0	0
3	3	2	1	1	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

La principal ventaja de este método es su simplicidad. Una vez que se ha diseñado la asignación de bits correspondiente, cada coeficiente se cuantifica con el número de bits que corresponden a su localización.

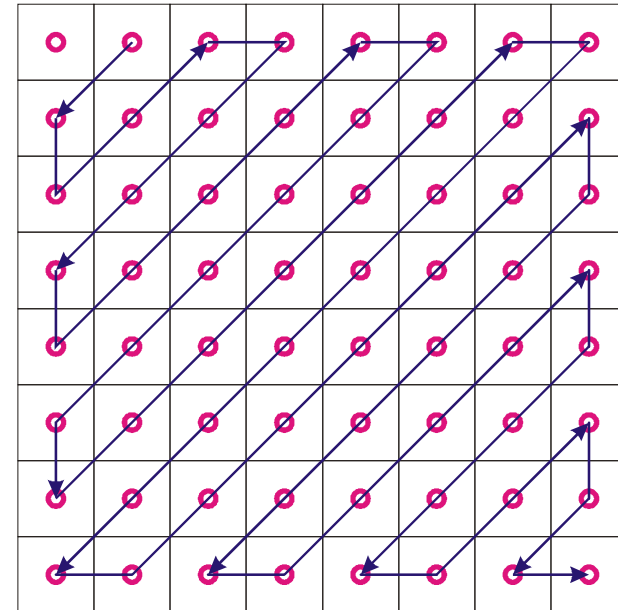
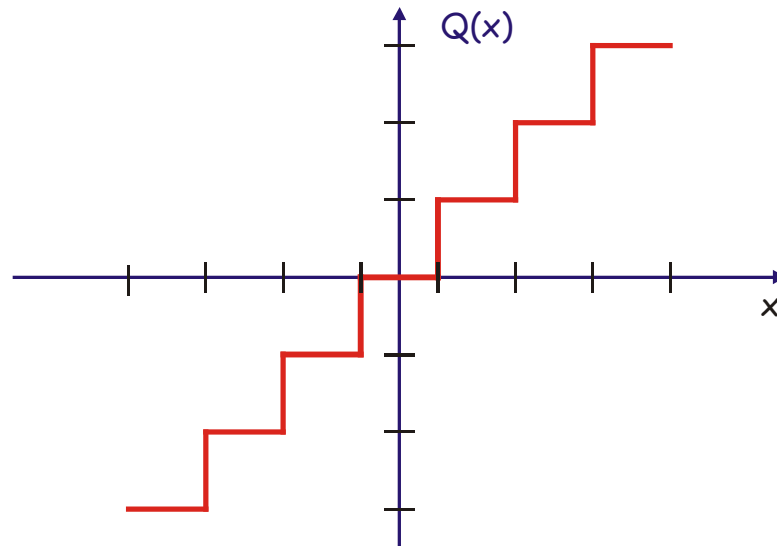
El principal inconveniente se deriva de que las varianzas obtenidas corresponden a valores medios, por lo que las fluctuaciones a nivel local no son recogidas de manera adecuada.

Este problema puede evitarse mediante la técnica siguiente.

Threshold coding

- ★ En esta técnica, los coeficientes que van a retenerse y los que van a eliminarse no se deciden a priori.
- ★ En su forma más simple se especifica un umbral. Sólo los coeficientes que superan ese umbral son cuantificados y transmitidos.
- ★ La información acerca de que coeficientes van a ser cuantificados y cuáles no debe ser transmitida al receptor. Una forma fácil de hacerlo es recorrer el bloque de coeficientes en zigzag y decidir a partir de que coeficiente se termina la transmisión (los coeficientes en el recorrido que no superan el umbral son transmitidos como cero).
- ★ La finalización de la secuencia de coeficientes se señala con un código especial (EOB).
- ★ El cuantificador es en principio diferente para cada coeficiente. Suele utilizarse un cuantificador uniforme simétrico con “zona muerta” alrededor del origen.

Threshold coding





Codificación de transformadas

Selección de la transformación

Transformada Óptima

El ruido de cuantificación es $\sigma_r^2 = \sigma_q^2 = \sigma_{qk,opt}^2 = \varepsilon^2 2^{-2R} \sqrt[N]{\prod_{i=0}^{N-1} \sigma_i^2}$

La ganancia de la codificación de transformaciones, G_{TC} , para un ordenado, N , es máxima cuando la media geométrica de las varianzas de las distribuciones de los coeficientes de la transformada es mínima:

$$G_{TC,max} = \frac{\sigma_{PCM}^2}{\sigma_{TC,min}^2} = \frac{2^{-2R} \sigma_x^2}{\left[\prod_{k=0}^{N-1} \sigma_k^2 \right]^{\frac{1}{N}}}$$

La transformación óptima es aquella que minimiza la media geométrica de las varianzas.

Transformada Óptima

Las varianzas de los coeficientes de la transformación son los elementos de la diagonal de la matriz:

$$\mathbf{R}_{\theta\theta} = E[\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T] = E[\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T] = \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}\mathbf{A}^T$$

En cualquier matriz cuadrada se verifica que el producto de los elementos de la diagonal es mayor o igual que el determinante de la matriz, luego, para transformadas ortonormales:

$$\prod_{k=0}^{N-1} \sigma_k^2 \geq |\mathbf{R}_{\theta\theta}| = |\mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}||\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}||\mathbf{A}^T| = |\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}|$$

La transformada que maximiza la ganancia será aquella que verifique:

$$\prod_{k=0}^{N-1} \sigma_k^2 = |\mathbf{R}_{\theta\theta}| = |\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}|$$

Esta igualdad se verifica, por ejemplo, en el caso de una matriz diagonal que es el procedimiento que va a seguirse para encontrar la transformación óptima.

Transformada Óptima

Como $\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ es una matriz simétrica positiva de dimensiones $N \times N$ tiene exactamente N autovalores distintos, λ_k tales que:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} \mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Por existir exactamente N autovalores diferentes los autovectores \mathbf{v}_k forman una base, y normalizándolos, puede obtenerse una base \mathbf{B} que define la transformación ortonormal que diagonaliza la matriz $\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$:

$$B = \{\mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_{N-1}\}, \quad \mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} \mathbf{I}_k = \lambda_k \mathbf{I}_k, \quad \mathbf{I}_j^T \mathbf{I}_i = \delta_{ij}$$

esta es la transformación óptima, \mathbf{L} , conocida como transformación de Hotelling, transformación de Karhunen-Loeve, o, abreviadamente KLT.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_0^T \\ \mathbf{I}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{N-1}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{I}_0 \quad \mathbf{I}_1 \quad \dots \quad \mathbf{I}_{N-1}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_0^T \\ \mathbf{I}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{N-1}^T \end{bmatrix} \cdot [\lambda_0 \mathbf{I}_0 \quad \lambda_1 \mathbf{I}_1 \quad \dots \quad \lambda_{N-1} \mathbf{I}_{N-1}] = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{N-1} \end{bmatrix}$$

Transformada Óptima

Los coeficientes de la transformada están incorrelados entre sí ($\mathbf{R}_{\theta\theta}$ es diagonal).

Los autovalores son, de hecho, las varianzas de los coeficientes de la transformada.

El error de reconstrucción mínimo se obtiene aplicando los resultados obtenidos para la asignación óptima de bits, resultando:

$$\sigma_{r,\min}^2 = \varepsilon^2 2^{-2R} \left[\prod_{k=0}^{N-1} \lambda_k \right]^{\frac{1}{N}}$$



Codificación de transformadas

Transformadas subóptimas

Transformada de Walsh-Hadamard

La transformada discreta de Walsh Hadamard (DWHT) se obtiene normalizando matrices de Hadamard cuyas columnas han sido reordenadas adecuadamente. Así:

La DWHT de orden dos se define mediante la matriz:

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Las matrices correspondientes a transformaciones de orden superior se definen recurrentemente utilizando el producto de Kronecker:

$$H_{2^n} = \bigotimes_{i=1}^n H_2$$

Donde

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & a_{n1}\mathbf{B} & \cdots & a_{nn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Transformada de Walsh-Hadamard

Ejemplo:

$$\mathbf{H}_4 = \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{H}_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{H}_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{H}_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices que definen la transformación son simétricas, por lo que la transformación directa e inversa se obtienen de idéntica manera:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{X}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta}$$

Para transformaciones bidimensionales:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{H}$$

La principal ventaja de la transformada de Hadamard estriba en la simplicidad de cálculo (los coeficientes son +1 o -1, por lo que solo es necesario realizar sumas y restas). Solo existe para ordenes (N) potencia de 2.

Transformada discreta de Fourier

La DFT es una transformada ortonormal definida en el campo complejo.

Se define la transformada discreta de Fourier (DFT) en una dimensión según:

$$\theta(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

El resultado de transformar una secuencia de N números reales es un conjunto de N coeficientes complejos. Las relaciones existentes entre las partes real e imaginaria de los coeficientes, unido a que el coeficiente de orden 0 representa el valor medio de la secuencia (y es real por consiguiente) y el coeficiente $N/2$ también debe ser real (porque la exponencial compleja se transforma en $(-1)^k$ implican que tan sólo N números reales sean independientes entre sí. Estos números son los únicos que deberían cuantificarse y transmitirse por el codificador. La transformación inversa se calcula de manera similar:

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \theta(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Transformada discreta de Fourier

En forma matricial:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}^* \cdot \boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right\}_{k,n=0,1,\dots,N-1}$$

Debido a la simetría de \mathbf{F} se verifica $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{*T} = \mathbf{F}^*$

La DFT en dos dimensiones es separable y simétrica, por lo que, teniendo en cuenta la simetría de \mathbf{F} puede escribirse

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{F} \qquad \mathbf{X} = \mathbf{F}^* \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{F}^*$$

Transformada discreta de Fourier

Ejemplo. Calcular la DFT de la secuencia $x(n) = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$. Para $N=4$ resulta:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1+j \\ -1 \\ -1-j \end{bmatrix}$$

y la transformada inversa:

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -1+j \\ -1 \\ -1-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Transformada discreta del Coseno

La DCT es una transformada ortonormal. Si C representa la matriz de la transformación se tiene:

$$\theta = Cx$$

$$x = C^{-1} \cdot \theta = C^T \cdot \theta$$

Se han clasificado cuatro transformadas discretas del coseno. En todos los casos los vectores que forman la base se obtienen muestreando una función coseno.

La transformada discreta del coseno tiene varias ventajas sobre otras transformadas:

- Es quasioptima para procesos AR(1) en los que ρ tiende a la unidad.
- Puede calcularse por medio de la FFT.
- No se origina el fenómeno de Gibbs al codificar bloques (como ocurre al emplear la DFT)

Transformada discreta del Coseno

$$\text{DCT-I} \quad \mathbf{C}_{N+1}^{\text{I}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[k_m \cdot k_n \cos\left(\frac{mn\pi}{N}\right) \right] \quad m, n = 0, 1 \dots N$$

$$\text{DCT-II} \quad \mathbf{C}_N^{\text{II}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[k_m \cos\left(\frac{m\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{N}\right) \right] \quad m, n = 0, 1 \dots N - 1$$

$$\text{DCT-III} \quad \mathbf{C}_N^{\text{III}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[k_n \cdot \cos\left(\frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)n\pi}{N}\right) \right] \quad m, n = 0, 1 \dots N - 1$$

$$\text{DCT-IV} \quad \mathbf{C}_N^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[\cos\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{N}\right) \right] \quad m, n = 0, 1 \dots N - 1$$

$$\text{Donde } k_j = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{si } j = 0 \text{ ó } j = N \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Transformada discreta del Coseno

$$DCTI(3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$DCTII(4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\cos(\pi/8)}{\sqrt{2}} & \frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}} & -\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}} & -\frac{\cos(\pi/8)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}} & -\frac{\cos(\pi/8)}{\sqrt{2}} & \frac{\cos(\pi/8)}{\sqrt{2}} & -\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$DCTIII(4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\cos(\pi/8)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\cos(\pi/8)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\cos(\pi/8)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\cos(\pi/8)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$DCTIV(4) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\pi/16)}{\sqrt{2}} & \frac{\cos(3\pi/16)}{\sqrt{2}} & \frac{\sin(3\pi/16)}{\sqrt{2}} & \frac{\sin(\pi/16)}{\sqrt{2}} \\ \frac{\cos(3\pi/16)}{\sqrt{2}} & \frac{\sin(\pi/16)}{\sqrt{2}} & -\frac{\cos(\pi/16)}{\sqrt{2}} & -\frac{\sin(3\pi/16)}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin(3\pi/16)}{\sqrt{2}} & -\frac{\cos(\pi/16)}{\sqrt{2}} & \frac{\sin(\pi/16)}{\sqrt{2}} & \frac{\cos(3\pi/16)}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin(\pi/16)}{\sqrt{2}} & -\frac{\sin(3\pi/16)}{\sqrt{2}} & \frac{\cos(3\pi/16)}{\sqrt{2}} & -\frac{\cos(\pi/16)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Transformada discreta del Coseno

La DCT-II es la más comúnmente utilizada

Ejemplo:

$$C_4^{\text{II}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} & \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{8} & -\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{8} & -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{8} & -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} & \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} & -\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{8} \end{bmatrix}$$

$$\theta = C_4^{\text{II}} \cdot \mathbf{x} \approx \begin{bmatrix} 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 \\ 0,65 & 0,26 & -0,26 & -0,65 \\ 0,50 & -0,50 & -0,50 & 0,50 \\ 0,26 & -0,65 & 0,65 & -0,26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,00 \\ -2,21 \\ 0,00 \\ -0,13 \end{bmatrix}$$

Transformada discreta del Coseno

$$\mathbf{x} = (\mathbf{C}_4^H)^T \cdot \boldsymbol{\theta} \approx \begin{bmatrix} 0,50 & 0,65 & 0,50 & 0,26 \\ 0,50 & 0,26 & -0,50 & -0,65 \\ 0,50 & -0,26 & -0,50 & 0,65 \\ 0,50 & -0,65 & 0,50 & -0,26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5,00 \\ -2,21 \\ 0,00 \\ -0,13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,03 \\ 2,00 \\ 3,00 \\ 3,97 \end{bmatrix}$$

Relación DCT-DFT

Si se extiende de forma par el bloque a transformar:

$$x'(n) = \begin{cases} x(n) & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ x(2N-1-n) & n = N, N+1, \dots, 2N \end{cases}$$

La DFT de esta nueva secuencia es:

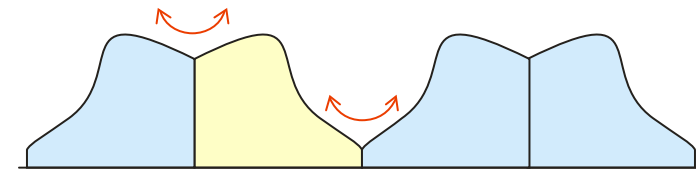
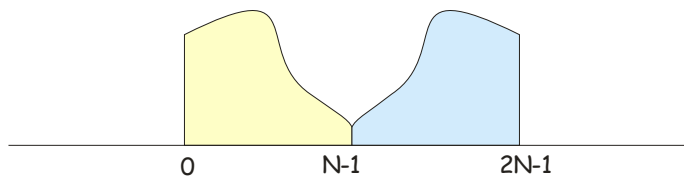
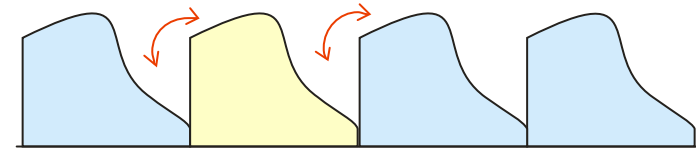
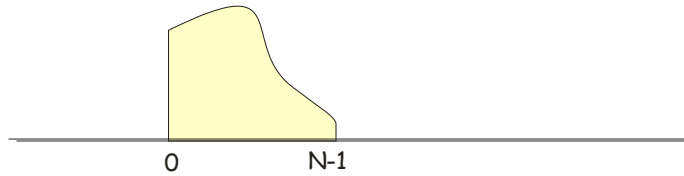
$$\theta'(k) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=0}^{2N-1} x'(n) e^{-j(2\pi \frac{kn}{2N})} = \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{-j\pi \frac{k}{2N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{(2n+1)k\pi}{2N}\right)$$

de donde:

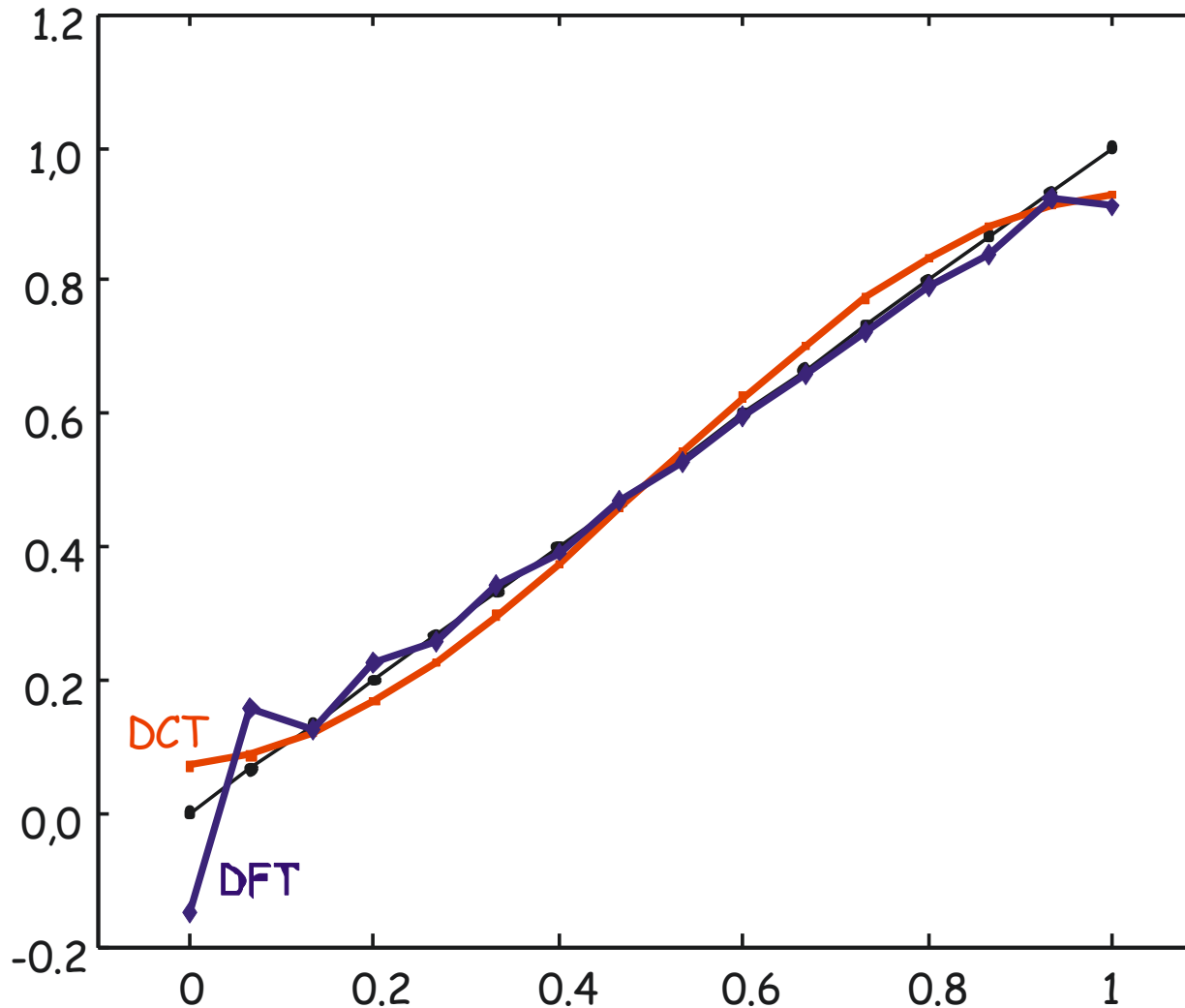
$$\theta(k) = 2\alpha(k) e^{-j\pi \frac{k}{2N}} \theta'(k)$$

Esto es, la transformada del coseno puede obtenerse de los primeros coeficientes de la transformada discreta de Fourier de la señal obtenida extendiendo especularmente la secuencia original.

DFT vs. DCT: Fenómeno de Gibbs

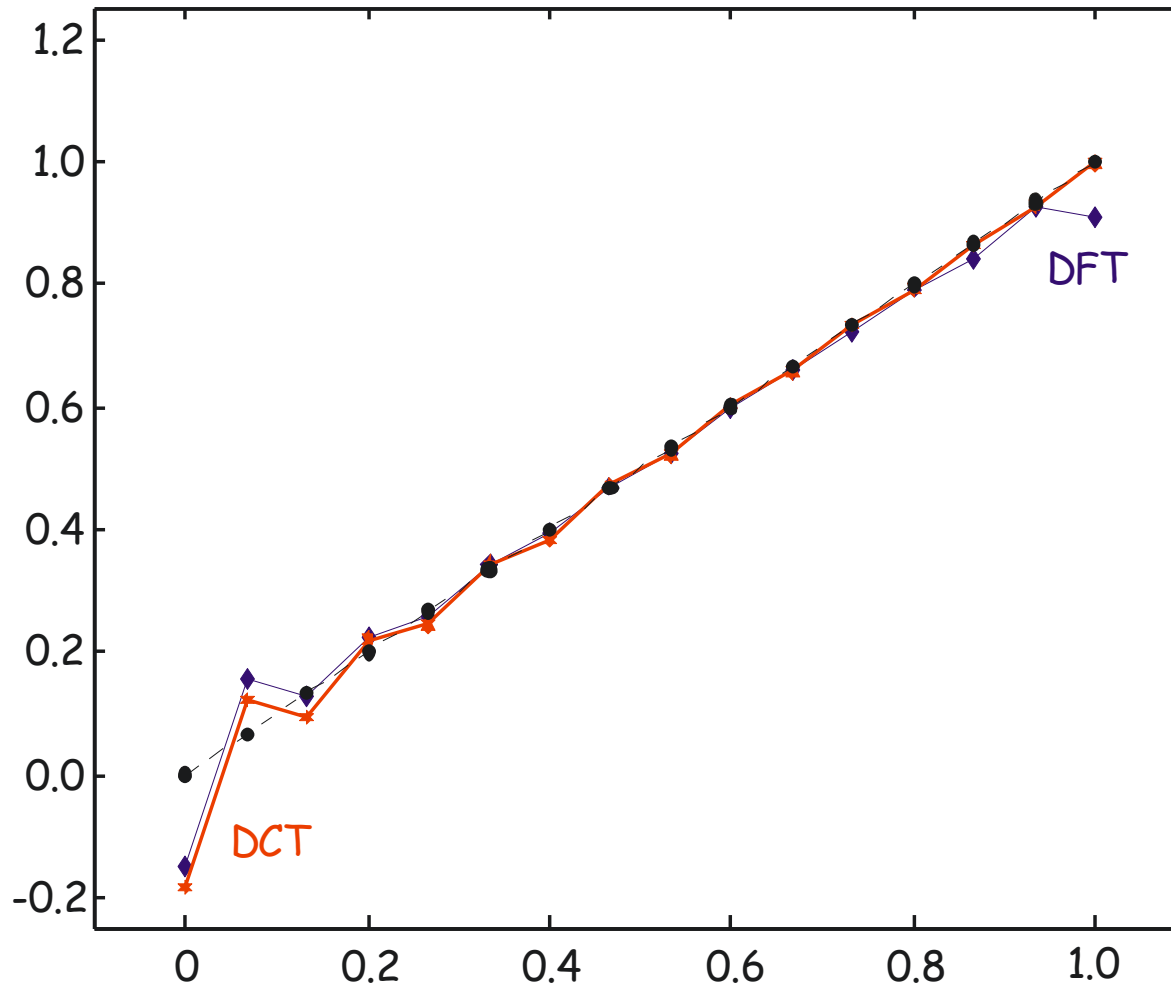


DFT vs. DCT



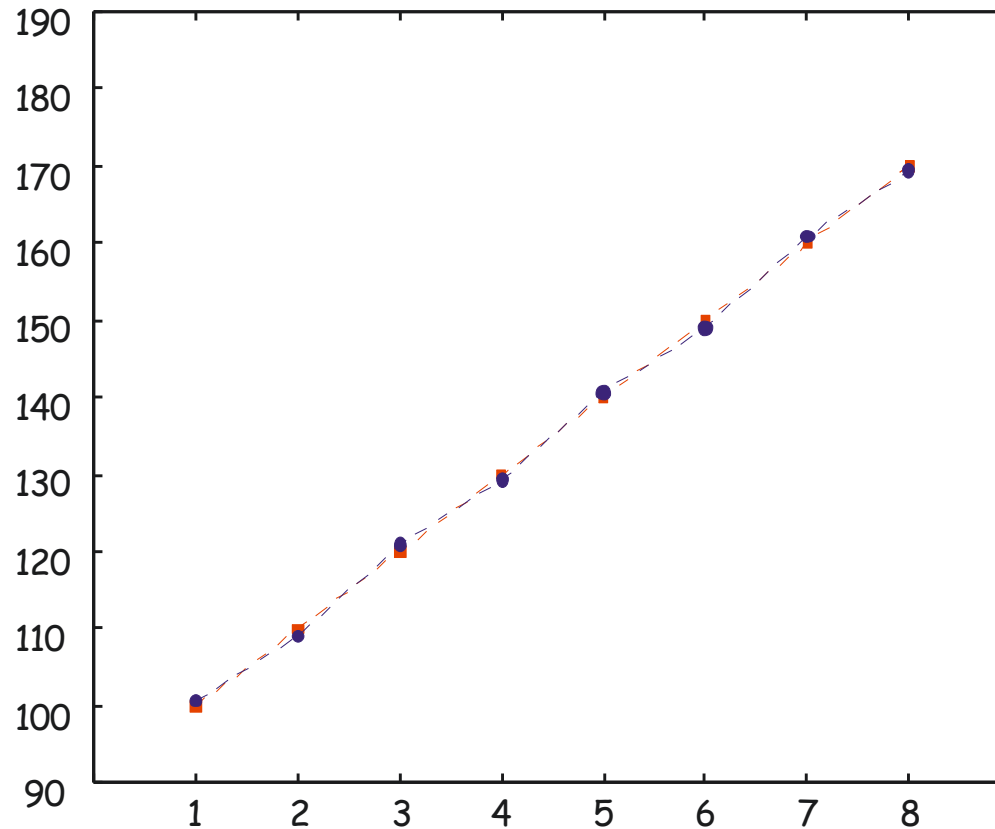
★ Efecto de borde en la codificación de transformadas. Secuencia de 16 puntos en rampa (negro) y secuencias obtenidas a partir de su DCT (rojo) y DFT (azul) conservando tan solo los dos primeros coeficientes

DFT vs. DCT



- ★ Secuencia de 16 puntos en rampa (negro) y secuencias obtenidas a partir de sus DCT (rojo) y DFT (azul) habiendo introducido el mismo error (0.05) en cada coeficiente

DCT



Secuencia original (en azul) y secuencia obtenida conservando tres coeficientes en cada bloque (rojo)

Bibliografía

- ★ N.S: Jayant y P. Noll, “***Digital Coding of Waveforms: Principles and Applications to Speech and Video***”, Prentice Hall Signal Processing Series, New Jersey, 1984.
- ★ K. Sayood, “***Introduction to Data Compression***”, 3rd ed., Elsevier, San Francisco, 2006.
- ★ W.B. Pennebaker y J.L. Mitchell, “***JPEG Still Image Data Compression Standard***”, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.
- ★ K.R.Rao y P.Yip, “***Discrete Cosine Transform. Algorithms, Advantages, Applications***”, Academic Press, London, 1990.