ENUNCIADO DEL EJEMPLO 27

Un sólido homogéneo de masa **m** se compone de un semiaro de centro O y radio **a** y una varilla de longitud **2a** coincidente con el diámetro. El punto O permanece fijo en el origen de coordenadas, y la varilla se mantiene en todo momento en el plano horizontal, sobre el cual desliza. Además, el punto medio del semiaro está unido mediante un resorte lineal de constante **k** y longitud natural **l** a un punto fijo que se encuentra en la vertical de O, a una altura **a**.

```
> restart:
```

Cargamos los paquetes de Maple que vamos a emplear.

```
> with(linalg):with(plots):with(plottools):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined

```
> libname:="C:\",libname:
```

```
> with(mecapac3d):
```

Definimos las coordenadas generalizadas, que en este caso son dos, al tener el sistema dos grados de libertad. Las coordenadas que usaremos serán psi y theta para representar la nutación y la precesión.

```
> cg:=[psi,theta];
```

$$cg := [\psi, \theta]$$

A continuación definimos las coordenadas de los centros de masas de la varilla (punto O, fijo) y del semiaro.

```
> xgv:=[0,0,0]:
```

```
> xgs:=[(2*a/Pi)*cos(theta)*(-sin(psi)),(2*a/Pi)*cos(theta)*cos(psi),(2*a/Pi)*sin(theta)]:
```

Se trata de un sólido homogéneo, así que las masas de la varilla y el semiaro por separado serán, respectivamente:

```
> mv:=m*2*a/((2+Pi)*a):
```

```
> ms:=m*Pi*a/((2+Pi)*a):
```

Ahora calculamos las matrices de rotación de cada sólido, teniendo en cuenta que hemos empleado giros absolutos, por lo que multiplicamos las matrices por la izquierda.

```
> rotv:=evalm(rota(psi,3)&*rota(theta,1)&*rota(Pi/2,2)):
```

```
> rots:=evalm(rota(psi,3)&*rota(theta,1)):
```

Y por último definimos totalmente el sistema con todos sus elementos: sólido (compuesto por varilla y semiaro), muelle, y sistema de coordenadas fijo.

```
> v1:=[varilla,xgv,rotv,mv,2*a]:
```

```
> s1:=[semiaro,xgs,rots,ms,a]:
```

```
> m1:=[muelle,[0,0,a],[-a*cos(theta)*sin(psi),a*cos(theta)*cos(psi),a*sin(theta)],k,l]:
```

```
> ejeY:=[vector,[0,0,0],[0,2,0],green]:
```

```
> ejeX:=[vector,[0,0,0],[2,0,0],red]:
```

```
> ejeZ:=[vector,[0,0,0],[0,0,2],blue]:
```

```
> TO := [texto,[0,0,-1],"O"]:
```

```
> TY := [texto,[0,2,1],"Y"]:
```

```
> TZ := [texto,[0,0,2.5],"Z"]:
```

```
> TX := [texto,[2.5,0,0],"X"]:
```

```
> sistema:=[v1,s1,m1,ejeX,ejeY,ejeZ,TO,TX,TY,TZ];
```

$$sistema := \left[\left[varilla, [0, 0, 0], rotv, \frac{2\,m}{2+\pi}, 2\,a \right], \left[semiaro, \left[-\frac{2\,a\cos(\theta)\sin(\psi)}{\pi}, \frac{2\,a\cos(\theta)\cos(\psi)}{\pi}, \frac{2\,a\sin(\theta)}{\pi} \right], rots, \frac{m\,\pi}{2+\pi}, a \right], [mu\right.$$
$$[vector, [0, 0, 0], [0, 2, 0], green], [vector, [0, 0, 0], [0, 0, 2], blue], [texto, [0, 0, -1], \text{"O"}], [texto, [2.5, 0, 0], \text{"X"}], [texto, [0, 2, 1],$$
$$\left. [texto, [0, 0, 2.5], \text{"Z"}] \right]$$

Calculamos la función lagrangiana, calculando antes sus componentes.

```
> T:=fT(sistema):
```

```
> V:=fV(sistema):
```

```
> L:=simplify(T-V);
```

$$L := \frac{-12\,k\,l^2 - 6\,k\,\pi\,l^2 + 3\,\psi 1^2 \cos(\theta)^2\,m\,a^2\,\pi - 24\,m\,g\,a\sin(\theta) + 3\,\theta 1^2\,m\,a^2\,\pi - 24\,k\,a^2 + 24\,k\,a^2\sin(\theta) - 12\,k\,\pi\,a^2 + 12\,k\,\pi\,a^2\sin(\theta)\,\cdot}{12\,(2+\pi)}$$

Y obtenemos las dos ecuaciones diferenciales de movimiento:

> ecua:=ec_lag();

$$ecua := \left[\frac{6\left(\frac{d^2}{dt^2}\psi(t)\right)\cos(\theta(t))^2\,m\,a^2\,\pi - 12\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right)\cos(\theta(t))\,m\,a^2\,\pi\sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) + 8\left(\frac{d^2}{dt^2}\psi(t)\right)m\,a^2 + 6\left(\frac{d^2}{dt^2}\psi(t)\right)m\,\pi}{12\,(2+\pi)} \right.$$

$$\frac{\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)m\,a^2\,\pi}{2\,(2+\pi)} - \frac{-6\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right)^2\cos(\theta(t))\,m\,a^2\,\pi\sin(\theta(t)) - 24\,m\,g\,a\cos(\theta(t)) + 24\,k\,a^2\cos(\theta(t)) + 12\,k\,\pi\,a^2\cos(\theta(t)) - \frac{12\,k\,\wedge}{\sqrt{-a^2}}}{12\,(2+\pi)}$$

Para poder resolver el sistema de ecuaciones obtenido, primero hay que dar valores numéricos a **m**, **a**, **k**, **l** y **g** (aceleración de la gravedad).

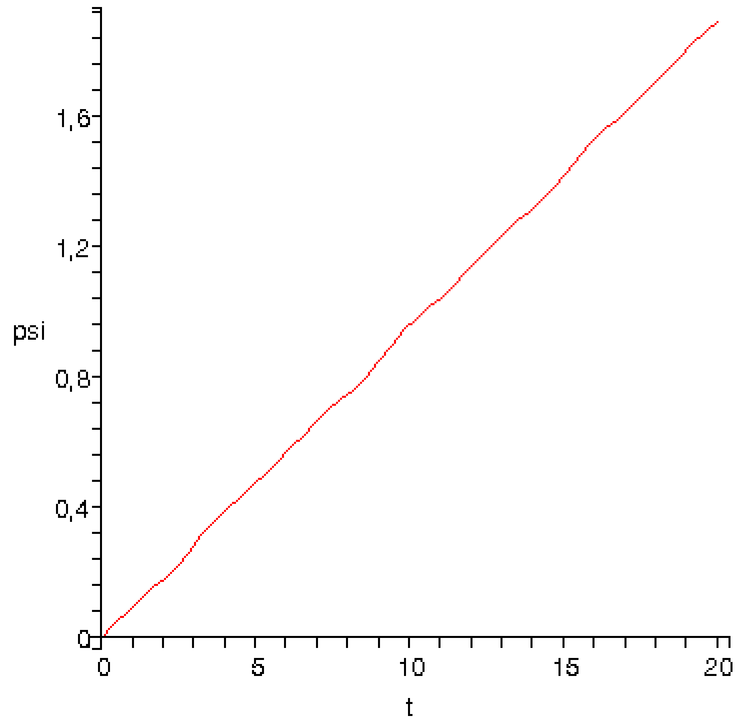
En primer lugar, veamos un caso en el que el muelle tiene longitud natural nula. Obtenemos las gráficas de las coordenadas generalizadas en el tiempo y la animación.

> a:=1:m:=1:g:=9.8:k:=4:l:=0:

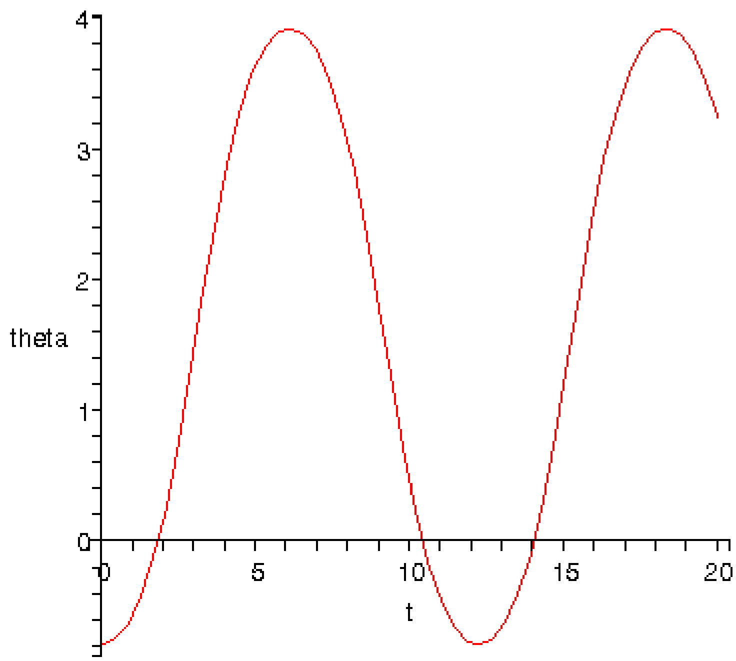
> res:=fint([0,0.1,-Pi/4,0]);

$res :=$ **proc**(x_rkf45) ... **end proc**

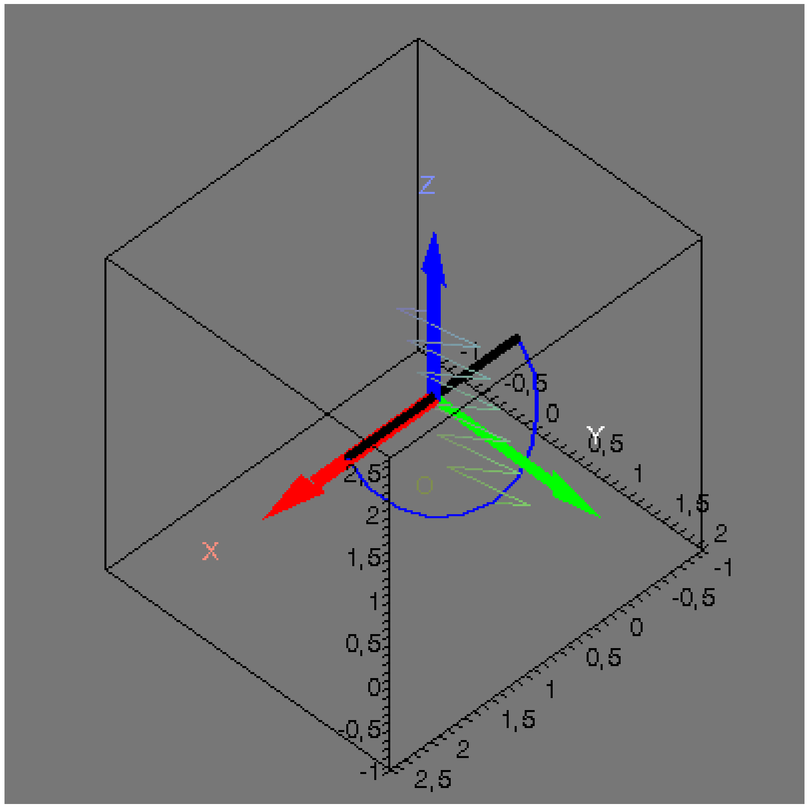
> odeplot(res,[t,psi(t)],0..20);



> odeplot(res,[t,theta(t)],0..20);



> dibu3(20,100);



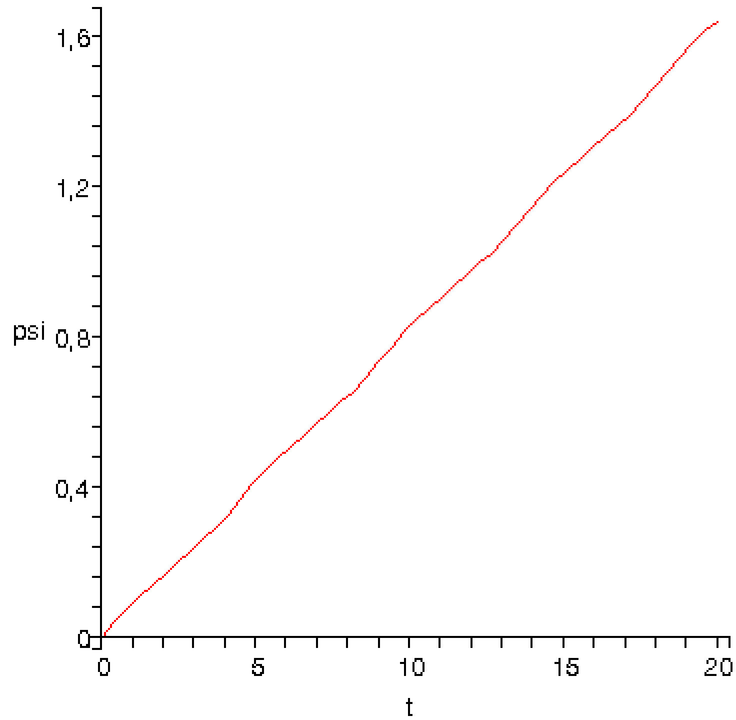
En segundo lugar, veamos otro caso en el que la longitud natural del muelle no es nula. Obtenemos las gráficas de las coordenadas generalizadas en el tiempo y la animación.

```
> a:=1:m:=1:g:=9.8:k:=5.8:l:=0.5:
```

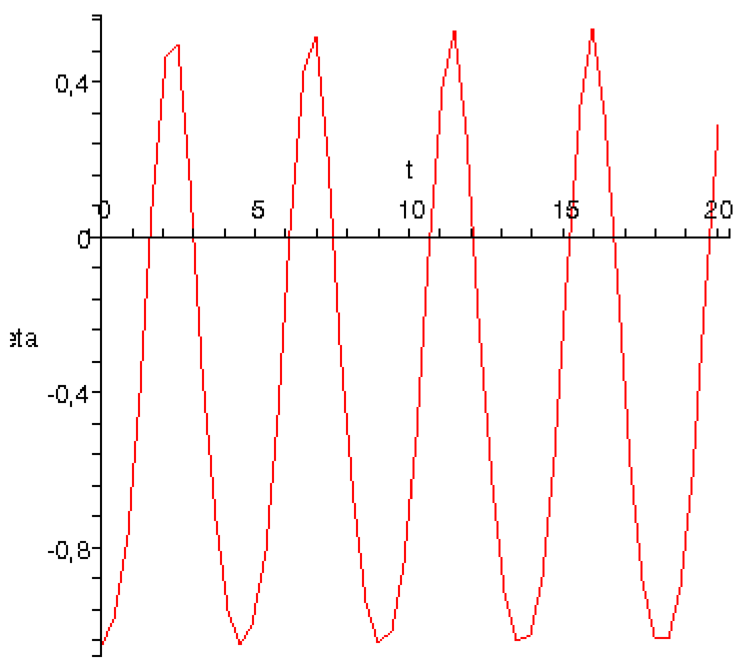
```
> res:=fint([0,0.1,-Pi/3,0]);
```

$$res := \mathbf{proc}(x\_rkf45)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

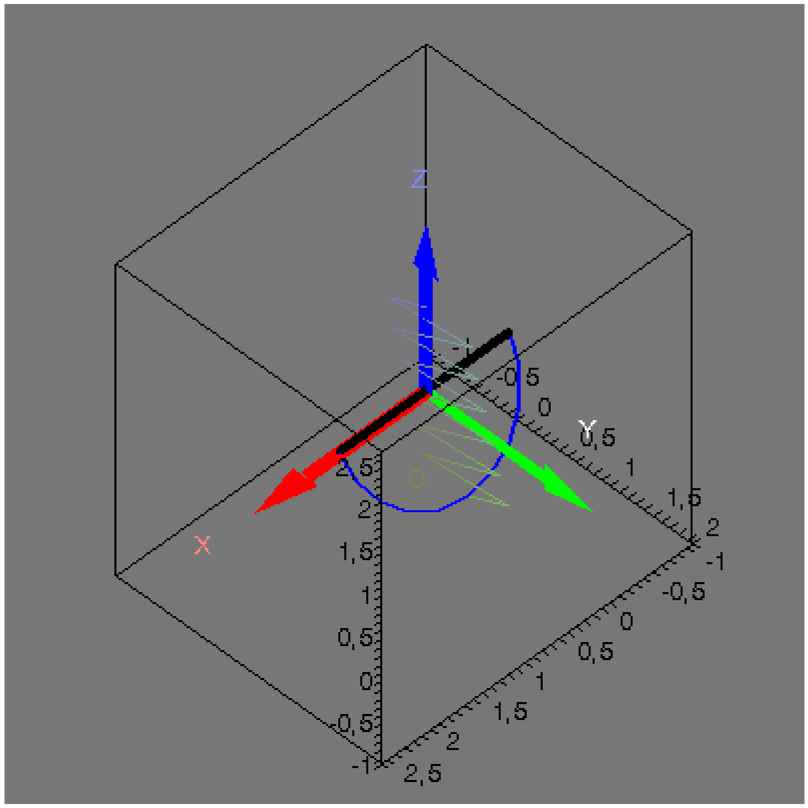
```
> odeplot(res,[t,psi(t)],0..20);
```



> odeplot(res,[t,theta(t)],0..20);



> dibu3(20,100);


Z
Y
X
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5

>