ENUNCIADO DEL EJEMPLO 6

Un disco homogeneo de masa M y radio r gira por el perimetro de otro disco de masa M2 y radio dist estando ligado al eje del segundo disco por medio de una varilla de masa m y longitud l. Este segundo disco descansa horizontalemente sobre le plano XOY.

Se define entonces una ligadura anholonoma entre los dos discos.

Paso 0. Reiniciación de las variables del sistema y llamada a los paquetes linalg, plots y plottools.

```
> restart:
```

```
> with(linalg):with(plots):with(plottools):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

Además de estos paquetes básicos seránecesario cargar el paquete mecapac indicándole a Maple su situación exacta.

```
> libname:="C:/",libname;
```

$$libname := \text{"C:/"}, \text{"C:\textbackslash Archivos de programa\textbackslash Maple 9/lib"}$$

```
> with(mecapac3d):
```

Paso 1. Definimos las coordenadas generalizadas theta y phi del sistema en una lista que se denominará cg.

```
> cg:=[theta,phi]:
```

Paso 2. Definición mediante variables de los elementos que forman el sistema mecánico. Es decir, la varilla y los dos discos.

```
> rot1:=rota(theta,3):
```

```
> rot2:=rota(-Pi/3,2):
```

```
> rottot:=evalm(rot1&*rot2):
```

Definimos las coordenadas del centro de masa de la varilla.

```
> xg:=[l/2*sin(Pi/3)*cos(theta),l/2*sin(Pi/3)*sin(theta),r*sin(Pi/3)+l/2*c
os(Pi/3)];
```

$$xg := \left[\frac{1}{4}\, l\, \sqrt{3}\, \cos(\theta),\, \frac{1}{4}\, l\, \sqrt{3}\, \sin(\theta),\, \frac{1}{2}\, r\, \sqrt{3} + \frac{1}{4}\, l\right]$$

Definimos la varilla.

```
> v1:=[varilla,xg,rottot,m,l];
```

$$v1 := \left[varilla, \left[\frac{1}{4}\, l\, \sqrt{3}\, \cos(\theta),\, \frac{1}{4}\, l\, \sqrt{3}\, \sin(\theta),\, \frac{1}{2}\, r\, \sqrt{3} + \frac{1}{4}\, l\right], rottot, m, l\right]$$

Ahora hacemos exactamente lo mismo con los dos discos.

```
> rotpd:=rota(theta,3):
> rot3:=rota(-Pi/3,2):
> rot4:=rota(phi,3):
> r2:=evalm(rot3&*rot4):
> rottot2:=evalm(rotpd&*r2):
> xg2:=[l*sin(Pi/3)*cos(theta),l*sin(Pi/3)*sin(theta),r*cos(Pi/6)]:
> d1:=[disco,xg2,rottot2,M,r];
```

$$d1 := \left[disco, \left[\frac{1}{2} l \sqrt{3} \cos(\theta), \frac{1}{2} l \sqrt{3} \sin(\theta), \frac{1}{2} r \sqrt{3} \right], rottot2, M, r \right]$$

Definimos ahora el segundo disco

```
> dist:=l*sin(Pi/3)-r*sin(Pi/6):
> rot5:=rota(0,1):
> d2:=[disco,[0,0,0],rot5,M2,dist];
```

$$d2 := \left[disco, [0, 0, 0], rot5, M2, \frac{1}{2} l \sqrt{3} - \frac{1}{2} r \right]$$

Paso 3. Definición de los elementos gráficos que definiran nuestro sistema de ejes.

```
> a2:=[angulo,[(dist/2),0,0],[0,0,0],[(l/2*sin(Pi/3)*cos(theta))/2,(l/2*si
  n(Pi/3)*sin(theta))/2,0],(dist/2)]:
> ejeX:=[vector,[0,0,0],[10,0,0],red]:
> ejeY:=[vector,[0,0,0],[0,10,0],green]:
> ejeZ:=[vector,[0,0,0],[0,0,10],blue]:
> TO := [texto,[0,0,-1],"O"]:
> TX := [texto,[10,0,-1],"X"]:
> TY := [texto,[0,10,-1],"X"]:
> TZ := [texto,[0,0,11],"Z"]:
```

Paso 4. Definición de la variable sistema que agrupa en una lista todos los elementos anteriores.

```
> sistema:=[v1,d1,d2,a2,ejeX,ejeZ,ejeY,TO,TX,TY,TZ];
```

$$sistema = \left[\left[varilla, \left[\frac{1}{4} l \sqrt{3} \cos(\theta), \frac{1}{4} l \sqrt{3} \sin(\theta), \frac{1}{2} r \sqrt{3} + \frac{1}{4} l \right], rottot, m, l \right], \right.$$

$$\left[disco, \left[\frac{1}{2} l \sqrt{3} \cos(\theta), \frac{1}{2} l \sqrt{3} \sin(\theta), \frac{1}{2} r \sqrt{3} \right], rottot2, M, r \right],$$

$\left[disco, [0, 0, 0], rot5, M2, \frac{1}{2} l \sqrt{3} - \frac{1}{2} r\right],$

$\left[angulo, \left[\frac{1}{4} l \sqrt{3} - \frac{1}{4} r, 0, 0\right], [0, 0, 0], \left[\frac{1}{8} l \sqrt{3} \cos(\theta), \frac{1}{8} l \sqrt{3} \sin(\theta), 0\right], \frac{1}{4} l \sqrt{3} - \frac{1}{4} r\right],$

$[vector, [0, 0, 0], [10, 0, 0], red], [vector, [0, 0, 0], [0, 0, 10], blue], [vector, [0, 0, 0], [0, 10, 0], green],$
$[texto, [0, 0, -1], "O"], [texto, [10, 0, -1], "X"], [texto, [0, 10, -1], "X"],$

$[texto, [0, 0, 11], "Z"]]$

Paso 5. Obtención de la energía potencial del sistema mediante fV asignándola a la variable V.

```
> V:=fV(sistema);
```

$$V := m g \left(\frac{1}{2} r \sqrt{3} + \frac{1}{4} l\right) + \frac{1}{2} M g r \sqrt{3}$$

Paso 6. Obtención de la energía cinética del sistema mediante fT asignándola a la variable T.

```
> T:=simplify(fT(sistema));
```

$$T := \frac{1}{8} \theta 1^2 m l^2 + \frac{3}{8} M l^2 \theta 1^2 + \frac{5}{32} M r^2 \theta 1^2 + \frac{1}{4} M r^2 \phi 1^2 + \frac{1}{4} M r^2 \phi 1 \, \theta 1$$

Paso 7. Obtención de la lagrangiana como diferencia de energías entre la energía cinética y la potencial.

```
> L:=simplify(T-V);
```

$$L := \frac{1}{8} \theta 1^2 m l^2 + \frac{3}{8} M l^2 \theta 1^2 + \frac{5}{32} M r^2 \theta 1^2 + \frac{1}{4} M r^2 \phi 1^2 + \frac{1}{4} M r^2 \phi 1 \, \theta 1 - \frac{1}{2} m g r \sqrt{3} - \frac{1}{4} m g l - \frac{1}{2} M g r \sqrt{3}$$

Paso 8. Puesto que las ligaduras son anholonomas definimos la ligadura mediante la relacion de velocidades en el centro instantaneo de rotacion del disco que gira.

```
> Phi:=[theta1*dist-phi1*r];
```

$$\Phi := \left[\theta 1 \left(\frac{1}{2} l \sqrt{3} - \frac{1}{2} r\right) - \phi 1 \, r\right]$$

Hallando la reaccion producida en ese punto

```
> reacc:=Fc();
```

$reacc := \Big[$

$$-\frac{1}{2\left(18 M l^2+3 M r^2+4 m l^2\right)}\left(\left(\frac{1}{2} l \sqrt{3}-\frac{1}{2} r\right) M\left(4 m l^2+12 M l^2+3 M r^2\right)\left(\frac{16\left(\frac{1}{2} l \sqrt{3}-\frac{1}{2} r\right)}{4 m l^2+12 M l^2+3 M r^2}+\frac{8 r}{4 m l^2+12 M l^2+3 M r^2}\right)\left(\left(\frac{1}{4} m l^2+\frac{3}{4} M l^2+\frac{5}{16} M r^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t)\right) -\frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t)\right) m l^2-\frac{3}{4} M l^2\left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t)\right)-\frac{5}{16} M r^2\left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t)\right)\right)\right),$$

$$\frac{1}{2\left(18 M l^2+3 M r^2+4 m l^2\right)}\left(r M\left(4 m l^2+12 M l^2+3 M r^2\right)\left(\frac{16\left(\frac{1}{2} l \sqrt{3}-\frac{1}{2} r\right)}{4 m l^2+12 M l^2+3 M r^2}+\frac{8 r}{4 m l^2+12 M l^2+3 M r^2}\right)\left(\left(\frac{1}{4} m l^2+\frac{3}{4} M l^2+\frac{5}{16} M r^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t)\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t)\right) m l^2 -\frac{3}{4} M l^2\left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t)\right)-\frac{5}{16} M r^2\left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t)\right)\right)\right)\Bigg]$$

Particularizamos en el instante t=1.Quedando solo en funcion de las dimensiones del sistema.

```
> reacc[1];
```

$$-\frac{1}{2\left(18 M l^2+3 M r^2+4 m l^2\right)}\left(\left(\frac{1}{2} l \sqrt{3}-\frac{1}{2} r\right) M\left(4 m l^2+12 M l^2+3 M r^2\right)\left(\frac{16\left(\frac{1}{2} l \sqrt{3}-\frac{1}{2} r\right)}{4 m l^2+12 M l^2+3 M r^2}\right.\right.$$

$$+\frac{8r}{4ml^2+12Ml^2+3Mr^2}\Bigg)\left(\left(\frac{1}{4}ml^2+\frac{3}{4}Ml^2+\frac{5}{16}Mr^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)ml^2\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3}{4}Ml^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)-\frac{5}{16}Mr^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)\right)\right)$$

Paso 9. Obtención de las ecuaciones de lagrange para las dos coordenadas generalizadas mediante el operador Ec_lag

```
> ec_lagr();
```

$$\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)ml^2+\frac{3}{4}Ml^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)+\frac{5}{16}Mr^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)+\frac{1}{4}Mr^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2(18Ml^2+3Mr^2+4ml^2)}\Bigg(\left(\frac{1}{2}l\sqrt{3}-\frac{1}{2}r\right)M(4ml^2+12Ml^2+3Mr^2)\Bigg($$

$$\frac{16\left(\frac{1}{2}l\sqrt{3}-\frac{1}{2}r\right)}{4ml^2+12Ml^2+3Mr^2}+\frac{8r}{4ml^2+12Ml^2+3Mr^2}\Bigg)\left(\left(\frac{1}{4}ml^2+\frac{3}{4}Ml^2+\frac{5}{16}Mr^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)ml^2-\frac{3}{4}Ml^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)-\frac{5}{16}Mr^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)\right)\right),$$

$$\frac{1}{2}Mr^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\right)+\frac{1}{4}Mr^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)$$

$$- \frac{1}{2\,(18\,M\,l^2 + 3\,M\,r^2 + 4\,m\,l^2)} \left(r\,M\,(4\,m\,l^2 + 12\,M\,l^2 + 3\,M\,r^2) \left(\frac{16\left(\frac{1}{2}\,l\,\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,r\right)}{4\,m\,l^2 + 12\,M\,l^2 + 3\,M\,r^2} + \frac{8\,r}{4\,m\,l^2 + 12\,M\,l^2 + 3\,M\,r^2} \right) \left(\left(\frac{1}{4}\,m\,l^2 + \frac{3}{4}\,M\,l^2 + \frac{5}{16}\,M\,r^2\right) \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\right) m\,l^2 - \frac{3}{4}\,M\,l^2 \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\right) - \frac{5}{16}\,M\,r^2 \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\right) \right) \right) \Bigg]$$

Paso 10. Asignación de valores numéricos a los parámetros que queden sun asignar para poder proceder a la integración numérica.

```
> g:=9.81:m:=5:M:=10:M2:=20:l:=8:r:=2:
```

Paso 11. Integración numérica del problema mediante la función fint asignando el resultado a la variable res.

```
> res:=fintr([0.1,1.,0.1,1.]);
```

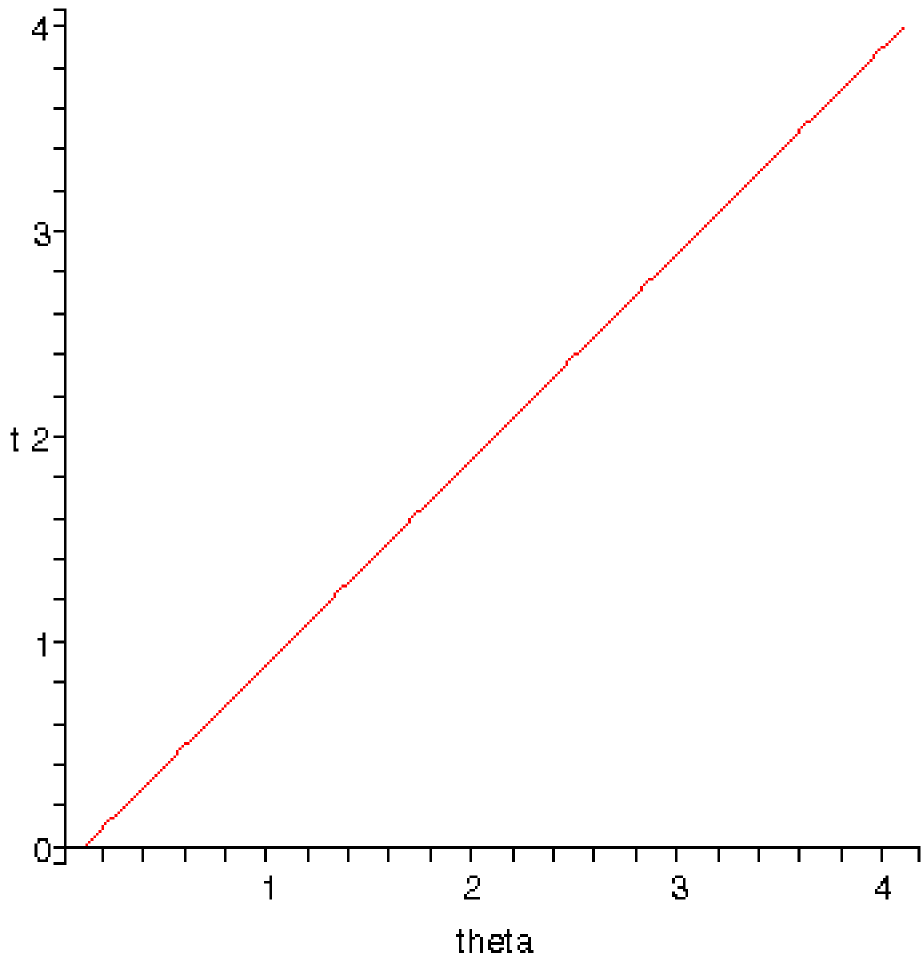
$$res := \textbf{proc}(x\_rkf45)\ \ldots\ \textbf{end proc}$$

```
> res(1);
```

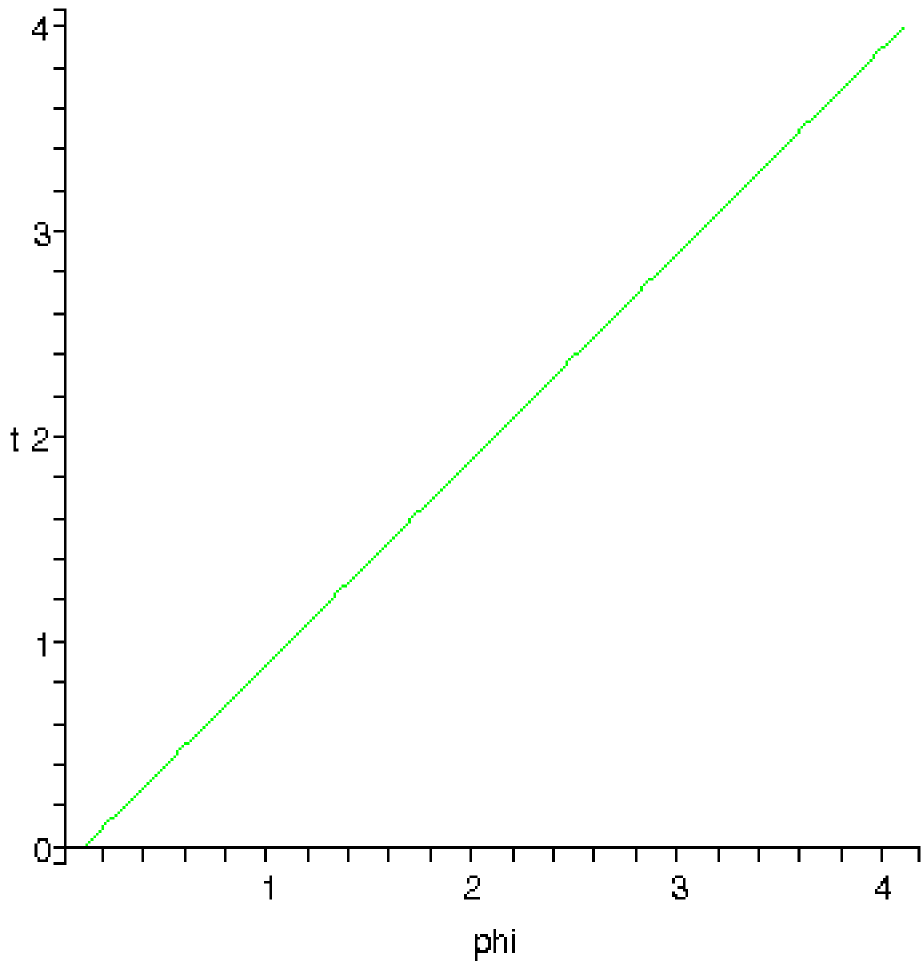
$$\left[t = 1.,\ \phi(t) = 1.10000000000000008,\ \frac{d}{dt}\,\phi(t) = 1.,\ \theta(t) = 1.10000000000000008,\ \frac{d}{dt}\,\theta(t) = 1. \right]$$

Paso 12. Representación gráfica de las evoluciones temporales de la evolución temporal de theta mediante odeplot.

```
> odeplot(res,[theta(t),t],          0..4,    color=red,numpoints=100);
```

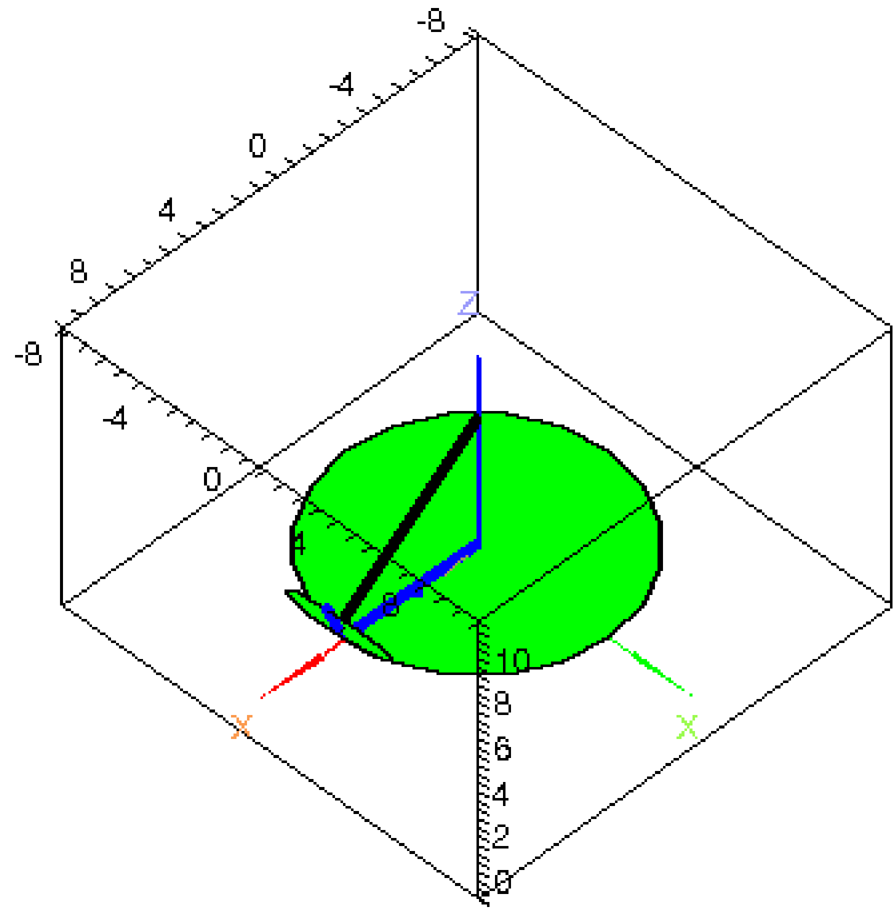



```
> odeplot(res,[phi(t),t],0..4,color=green,numpoints=100);
```



Paso 13. Procedemos a realizar una animación del movimiento del conjunto por medio de la función dibu3.

```
> dibu3(6.3,40);
```


-8
-4
0
4
8
-8
-4
0
4
8
Z
X
X
10
8
6
4
2
0

>