

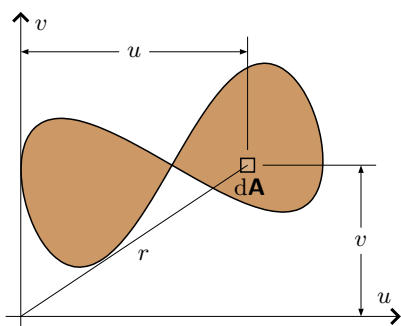
# Inercia

**inercia.** (Del lat. *inertia*.) f. Flojedad, desidia, inacción. || **2. Mec.** Incapacidad de los cuerpos para salir del estado de reposo, para cambiar las condiciones de su movimiento o para cesar en él, sin la aplicación o intervención de alguna fuerza. || **3. Mec. V. fuerza, momento de inercia.**

**momento.** (Del lat. *momentum*.) [...] || **de inercia.** *Mec.* Suma de los productos que resultan de multiplicar la masa de cada elemento de un cuerpo por el cuadrado de su distancia a una línea fija.

## Momentos de inercia

En un universo de dos dimensiones, el volumen es una superficie, y la superficie una longitud. Los ‘momentos’ de inercia constituyen una medida del grado en que un volumen se ‘aleja’ de un eje, lo que depende de la forma de la superficie que encierra el volumen. En lo que sigue, los volúmenes están definidos por una o varias superficies, es decir, no son necesariamente continuos; la generalización a un universo de más dimensiones es relativamente trivial.



El momento de inercia respecto de un eje cualquiera es  $\int d^2 d\mathbf{A}$  siendo  $d$  la distancia al eje. Respecto a dos ejes ortogonales, se tienen dos momentos de inercia:

$$I_u = \int v^2 d\mathbf{A} \quad I_v = \int u^2 d\mathbf{A}$$

El *producto de inercia* respecto a dos ejes ortogonales se define como:

$$I_{uv} = \int uv d\mathbf{A}$$

Todavía, respecto a un punto, en este caso el origen de coordenadas, puede definirse el *momento de inercia polar* como:

$$I_0 = \int r^2 d\mathbf{A} = I_u + I_v$$

La última conclusión se obtiene de  $r^2 = u^2 + v^2$  y las propiedades del operador  $\int$ .

En las definiciones anteriores, la integral debe entenderse extendida a todo el volumen, con independencia de que esté limitado por una o varias superficies.

## Momentos ‘estáticos’

Por volumen puede entenderse cualquier función escalar con valores bien definidos en la región definida por la superficie. De este modo, estas ideas pueden generalizarse a cualquier volumen matemático distinto al volumen del espacio métrico. De hecho, los momentos de inercia son los *momentos de segundo orden* de la función, pudiéndose definir de forma análoga momentos de cualquier orden. La idea es que si el volumen métrico es  $d\mathbf{A} = du dv$ , el ‘volumen’ de la función no es sino  $f(u, v) d\mathbf{A}$ . Por esta razón en la jerga hay expresiones como ‘volumen de tensiones’.

Los momentos ‘estáticos’ son los momentos de *primer orden* con definición análoga a los de inercia:

$$P_u = \int v d\mathbf{A} \quad P_v = \int u d\mathbf{A}$$

(El área es el momento de orden cero:  $\mathbf{A} = \int d\mathbf{A}$ .)

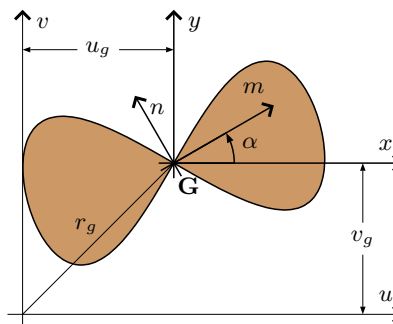
La definición de centro geométrico  $\mathbf{G}$  es la de aquel punto para el que los momentos de primer orden del volumen son nulos:

$$P_x = \int x d\mathbf{A} = 0; \quad P_y = \int y d\mathbf{A} = 0$$

El momento estático respecto a un eje que forme un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$  y que pasa por  $\mathbf{G}$  es igualmente nulo:

$$P_m = \int n d\mathbf{A} = -\sin \alpha \int x d\mathbf{A} + \cos \alpha \int y d\mathbf{A} = 0$$

puesto que  $n = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$ .



## Teorema de Steiner

Si consideramos unos ejes paralelos a los originales pero con el origen en el centro geométrico  $\mathbf{G}$  del volumen, las relaciones entre los momentos respecto a unos y otros ejes son:

$$\begin{aligned} I_u &= I_x + \mathbf{A} \cdot v_g^2 & I_v &= I_y + \mathbf{A} \cdot u_g^2 \\ I_{uv} &= I_{xy} + \mathbf{A} \cdot u_g v_g & I_0 &= I_G + \mathbf{A} \cdot r_g^2 \\ P_u &= \mathbf{A} \cdot v_g & P_v &= \mathbf{A} \cdot u_g \end{aligned}$$

El último sumando de cada expresión suele denominarse ‘término de Steiner’. (Las dos últimas expresiones muestran como calcular la posición de  $\mathbf{G}$  respecto a los ejes  $uv$ .)

## Cálculo práctico

Nótese que si  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ , entonces cualquier integral extendida a  $\mathbf{A}$ , puede calcularse como:

$$\int_{\mathbf{A}} (\cdot) = \int_{\mathbf{A}_1} (\cdot) + \int_{\mathbf{A}_2} (\cdot)$$

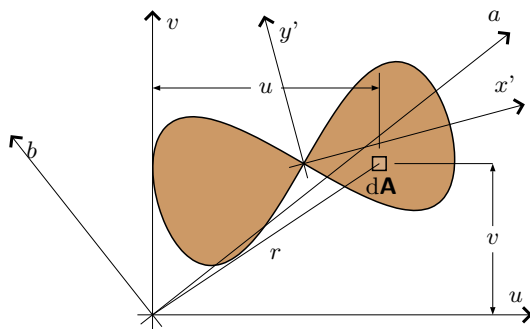
En la práctica podemos calcular la integral de volúmenes complicados mediante la descomposición en figuras simples, aquellas de las que podamos saber su inercia mediante fórmulas canónicas. Estas últimas suelen estar referidas al centro geométrico de la figura simple por lo que suele resultar necesario, además, aplicar ‘Steiner’; cuando ocurre así, y por razones bastante obvias, para una estimación rápida puede bastar con el término de Steiner, lo que es *tanto más cierto* cuanto más alejado esté el centro de la figura simple del origen de los ejes respecto a los que queremos calcular la inercia o el momento estático de la figura complicada.

## Tensor de inercia

Los momentos y el producto de inercia respecto a unos ejes  $uv$  definen el tensor de inercia en esos ejes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_u & \mathbf{I}_{uv} \\ \mathbf{I}_{uv} & \mathbf{I}_v \end{bmatrix}$$

en todo similar al tensor de tensiones. El tensor puede diagonalizarse eligiendo unos ejes  $ab$  con una orientación  $\beta$  respecto a los originales, con la condición simple de que  $\mathbf{I}_{ab} = 0$ . El formulismo algebraico es idéntico a muchos otros tensores. En particular, basta con considerar las analogías  $\sigma_x \equiv \mathbf{I}_u$ ,  $\sigma_y \equiv \mathbf{I}_v$  y  $\tau_{xy} \equiv \mathbf{I}_{uv}$ , para aplicar la construcción de la circunferencia de Mohr, y sus fórmulas asociadas, en el cálculo de inercias en ejes rotados respecto a los originales.



Aparte de en direcciones principales,  $\mathbf{I}_{uv}$  es nulo si  $u$  o  $v$  es un eje de simetría del volumen: la integral la podemos dividir en las dos de los volúmenes simétricos y, por la simetría y la definición de  $\mathbf{I}_{uv}$ , ambas integrales son de igual valor pero de distinto signo. Por tanto, los ejes de simetría son siempre direcciones principales del tensor de inercia. Tal es el caso de los ejes  $x'y'$ .

Si respecto de un punto cualquiera, el volumen tiene dos ejes de simetría *no ortogonales*, entonces cualquier par de ejes ortogonales con origen en ese punto son direcciones principales,  $\mathbf{I}_{uv}$  es nulo en cualquier orientación y  $\mathbf{I}_u = \mathbf{I}_v$  para cualquier par de ejes  $u$  y  $v$ : la figura resulta isótropa respecto a la inercia. Tal es el caso de polígonos y poliedros regulares.

## Radio de giro

Si consideramos el valor medio de la función  $f = u^2$  en el volumen  $\mathbf{A}$ , tenemos:

$$\bar{f} = \overline{u^2} = \frac{\int f d\mathbf{A}}{\int d\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{I}_v}{\mathbf{A}}$$

es decir,  $\bar{f}$  es el cuadrado de la distancia por la que habría que multiplicar  $\mathbf{A}$ , para obtener  $\mathbf{I}_v$ ; su raíz cuadrada es una distancia que podemos interpretar como aquella distancia constante a la que tendríamos que separar  $\mathbf{A}$  para obtener la misma inercia. Esta constante de la figura aparece en todos aquellos fenómenos en que su forma (y no sólo la magnitud de su volumen) es significativa; recibe el nombre de *radio de giro* y hay uno respecto a cada eje:

$$\mathbf{i}_u = \sqrt{\frac{\mathbf{I}_u}{\mathbf{A}}} \quad \mathbf{i}_v = \sqrt{\frac{\mathbf{I}_v}{\mathbf{A}}}$$

Nótese que  $\mathbf{i}_u$  es una ordenada mientras que  $\mathbf{i}_v$  es una abscisa: si pudieramos concentrar todo el área en un punto de coordenadas  $(\mathbf{i}_v, \mathbf{i}_u)$  obtendríamos igual inercia respecto de ambos ejes (pero no el mismo producto de inercia).

## Fórmulas canónicas

Referidas a un eje que pase por el centro geométrico, para figuras de altura  $h$  y base  $b$  paralela a  $x$ , se tienen las siguientes:

Figura	G	A	$\mathbf{I}_x$	$\mathbf{i}_x$
	$\frac{1}{2}h$	$bh$	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{\sqrt{12}}h$
	$\frac{1}{3}h$	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{1}{36}bh^3$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}h$
	$\frac{1}{2}b$	$\pi b^2$	$\frac{\pi}{64}b^4$	$\frac{1}{4}b$ [h=b]
	$\frac{2}{3\pi}b$	$\frac{\pi}{8}b^2$	$0,11r^4$	$0,264r$ [h=r]