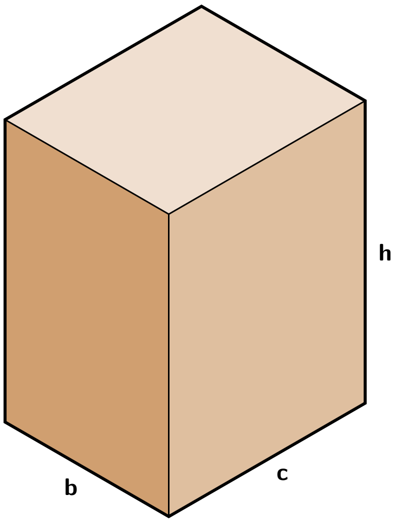
Estabilidad de edificios prismáticos



$$\rho \leq 2{,}4\,\mathrm{kN/m^3}$$
$$\mathbf{w}_{\max} = 1\,\mathrm{kN/m^2}$$
$$\gamma = 2$$
$$\boldsymbol{\mu} = 0{,}25$$
$$\mathbf{f}_{\mathrm{T}} = 150\,\mathrm{kN/m^2}$$

Figura 1: Edificio prismático

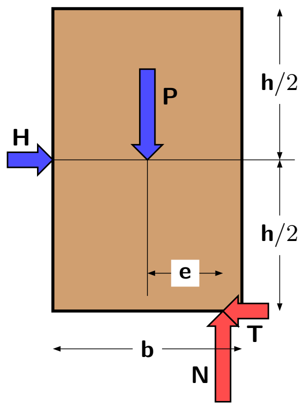


Figura 2: Hipótesis de carga

El modelo *sólido indeformable*, aunque simple, permite establecer algunas reglas de diseño sobre edificios, sin más que considerar la resistencia de suelos corrientes y la estabilidad general.

Edificio prismático

Nos limitaremos a edificios de pisos prismáticos (muchos edificios, en apariencia complicados, se reducen a conjuntos de prismas debido a la disposición de *juntas de dilatación*).

Las **acciones** típicas son:

- **Peso.** El peso específico suele andar en $\boldsymbol{\rho}_{\max} = 2{,}4\,\mathrm{kN/m^3}$, de los cuales $\boldsymbol{\rho}_{\min} = 1{,}2\,\mathrm{kN/m^3}$ representan el peso propio (edificio vacío), mientras que otro tanto representa la máxima sobrecarga durante el uso (edificio totalmente lleno).
- **Viento.** En condiciones 'normales', el viento puede suponer como mucho una presión de $\mathbf{w}_{\max} = 1\,\mathrm{kN/m^2}$, perpendicular a la superficie a barlovento. (En calma, $\mathbf{w}$=0.)

Las **reacciones** las suministra la cimentación. Sin soluciones especiales y sin entrar en detalles, podemos imaginarla como la cara inferior del prisma simplemente apoyada sobre el terreno. Un terreno 'flojo'o 'tipo' puede resistir con seguridad presiones normales $\mathbf{f}_{\mathrm{T}}$=150 kN/m^2, cuya suma suministrará la máxima reacción vertical. Como coeficiente de rozamiento $\boldsymbol{\mu}$ podemos considerar 0,25, valor con el que podremos determinar la máxima reacción horizontal.

Finalmente, como coeficiente de seguridad para un equilibrio estable podemos considerar $\boldsymbol{\gamma}$= 2.

Equilibrio

La dirección *pésima* para la acción del viento es la paralela a $\mathbf{b}$: entonces la superficie a barlovento es máxima ($\mathbf{c}\times\mathbf{h}$). Para su manejo, tanto el peso específico como la presión del viento deben integrarse en su volumen y superficie, respectivamente, dando lugar a fuerzas puntuales: el peso $\mathbf{P} = \rho\mathbf{bch}$ y la fuerza del viento $\mathbf{H} = \mathbf{wch}$, aplicadas en el centro geométrico de sus figuras. Nótese que tanto el peso como el viento son variables, aunque conocemos sus valores mínimo y máximo previsibles, siempre en condiciones 'normales'.

Las reacciones horizontal y vertical podrán estar aplicadas en cualquier punto de la base del prisma, allí donde sea necesario para el equilibrio, véase la Figura 2.

Las tres ecuaciones de equilibrio son:

$$\mathbf{N} = \rho\mathbf{bch} \tag{1}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{wch} \tag{2}$$

$$\mathbf{wch}\frac{\mathbf{h}}{2} = \rho\mathbf{bche}$$

La última ecuación se obtiene calculando momentos en el punto de aplicación de las reacciones, con una *excentricidad* $\mathbf{e}$ respecto al centro de la base. Las ecuaciones anteriores suministran los tres parámetros ($\mathbf{N}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{e}$) que definen la reacción del terreno necesaria para el equilibrio, para cualquier hipótesis de uso razonable del edificio (valores de $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{w}$). La excentricidad $\mathbf{e}$ informa de dónde debe aplicarse la reacción del terreno, y se obtiene de la tercera ecuación:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{w}}{\rho}\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{b}} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{w}}{\rho}\boldsymbol{\lambda} \tag{3}$$

En la última expresión aparece $\boldsymbol{\lambda}$, es decir, la proporción $\mathbf{h}/\mathbf{b}$ de la fachada paralela al viento, que generalmente se denomina *esbeltez*.

Además de las puras ecuaciones de equilibrio, debemos considerar los **límites** que imponen tanto la geometría como la naturaleza de las superficies en contacto. Así,

- La excentricidad $\mathbf{e}$ no puede superar la mitad del lado de la base, de otro modo las reacciones *no* actuarían sobre el edificio: $\mathbf{e} \leq \mathbf{b}/2$.

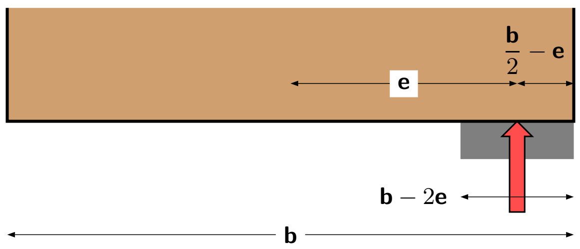


Figura 3: Presión sobre el terreno

- La reacción horizontal *no* puede superar la resistencia al deslizamiento, $\boldsymbol{\mu}\mathbf{N}$: $\mathbf{T} \leq \boldsymbol{\mu}\mathbf{N}$.
- La reacción vertical no puede ser negativa: el edificio flotaría, $\mathbf{N} \geq 0$.
- Finalmente, la presión normal sobre el terreno p *no* puede superar la que éste resista con seguridad. La presión sobre el terreno la podemos estimar repartiendo uniformemente la reacción vertical $\mathbf{N}$ en la superficie de la base cuyo centro esté *precisamente* en el punto de aplicación de $\mathbf{N}$, véase la Figura 3:

$$p = \frac{\mathbf{P}}{(\mathbf{b} - 2\mathbf{e})\cdot\mathbf{c}} = \frac{\rho\mathbf{bh}}{\mathbf{b} - 2\mathbf{e}} \leq \mathbf{f}_{\mathrm{T}} \tag{4}$$

Al considerar cada uno de estos límites junto a las ecuaciones de equilibrio, podemos investigar *en qué condiciones el equilibrio es posible y seguro.*

Deslizamiento

La situación crítica se da cuando la reacción horizontal alcanza el máximo valor de la fuerza de rozamiento, entonces el edificio está *a punto* de deslizar sobre el terreno. La condición de equilibrio es entonces:

$$\mathbf{T} \leq \boldsymbol{\mu}\mathbf{N} \quad \text{es decir} \quad \mathbf{wch} \leq \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\rho}\mathbf{bch}$$

La acción del viento es *desfavorable* (es la fuerza que intenta desplazar el edificio), mientras que el peso del edificio es *favorable* (el rozamiento, proporcional al peso, intenta evitarlo). En consecuencia, la situación pésima es la del máximo viento actuando sobre el edificio vacío:

$$\mathbf{w}_{\max} \leq \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\rho}_{\min}\mathbf{b}$$

Además, para alejarnos de la situación crítica, amplificamos la acción desfavorable, multiplicándola por el coeficiente de seguridad:

$$\gamma\mathbf{w}_{\max} \leq \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\rho}_{\min}\mathbf{b}$$

Obtenemos así una condición sobre la crujía menor del edificio:

$$\mathbf{b} \geq \frac{\gamma\mathbf{w}_{\max}}{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\rho}_{\min}} = \frac{2\times 1\,\mathrm{kN/m^2}}{0{,}25\times 1{,}2\,\mathrm{kN/m^3}} = 6{,}7\,\mathrm{m}$$

La conclusión es que **en condiciones normales, sólo los edificios de crujía muy pequeña pueden tener problemas de deslizamiento**. ¿Quién no ha visto 'pasearse' sillas y mesas, incluso casetas de perro, en un vendaval? Las maquetas de los edificios también están amenazadas, al revés que los edificios que representan.

Desplome o vuelco

La situación crítica se presenta cuando la reacción del terreno tiene que situarse justo en el borde a sotavento. Es decir, cuando la excentricidad $\mathbf{e}$ alcanza su máximo valor, $\mathbf{b}/2$. La condición de equilibrio es entonces:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{w}}{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\lambda} \leq \frac{\mathbf{b}}{2}$$

Una vez más la acción del viento es desfavorable, mientras que el peso es favorable: como en el caso anterior, la situación pésima es con el edificio vacío azotado por el vendaval. E igual que antes, multiplicaremos el viento por el coeficiente de seguridad, para apartarnos de la situación crítica (inestable):

$$\gamma\mathbf{w}_{\max}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{b}\boldsymbol{\rho}_{\min}$$

Evitar el vuelco requiere limitar la esbeltez para cada ancho, o bien asegurar un ancho mínimo para cada esbeltez:

$$\boldsymbol{\lambda} \leq \frac{\boldsymbol{\rho}_{\min}}{\gamma\mathbf{w}_{\max}}\mathbf{b} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{b} \geq \frac{\gamma\mathbf{w}_{\max}}{\boldsymbol{\rho}_{\min}}\boldsymbol{\lambda}$$

Para las condiciones 'normales', ambas reglas indican que:

$$\boldsymbol{\lambda} \leq \frac{1{,}2\,\mathrm{kN/m^3}}{2\times 1\,\mathrm{kN/m^2}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}}{1{,}67\,\mathrm{m}} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{b} \geq 1{,}67\,\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{\lambda}$$

Es decir que, por ejemplo, un edificio diez veces más alto que ancho tiene que contar con una base mayor que 16,7 m: en caso contrario, será inseguro frente al vuelco. Para cada ancho, puede calcularse la esbeltez límite (y por tanto la altura máxima) compatible con la seguridad al vuelco, véase Cuadro 1. Como puede observarse, desde el punto de vista del vuelco, un edificio puede ser tanto más esbelto cuanto más grande sea: la dificultad está en hacer edificios esbeltos *pequeños.*

Para los edificios estrictamente seguros frente a vuelco del Cuadro 1, podemos calcular la presión media sobre el terreno con la ecuación (4). Hay dos casos extremos: el edificio vacío y sin viento con una presión mínima (mínimo peso y máxima área para repartir $\mathbf{N}$ al ser $\mathbf{e}$=0), y el edificio lleno azotado por el máximo viento (máximo peso y mínima área, al ser $\mathbf{e}$ máxima).

Para el primer caso, $p = \boldsymbol{\rho}_{\min}\mathbf{h}$ y la presión depende tan sólo de la altura. Para el segundo, hay que calcular primero la excentricidad de la reacción del terreno:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{w}_{\max}}{\boldsymbol{\rho}_{\max}}\boldsymbol{\lambda}$$

En el Cuadro 1 se dan ambos valores para cada esbeltez límite. Ya se ve que un edificio de unas 20 plantas de 3 m de altura requeriría un terreno algo mejor que el 'flojo' ($\mathbf{f}_{\mathrm{T}}$=150 kN/m^2). Y edificios más altos requerirían cimentaciones especiales (que normalmente incluirán excavaciones para buscar capas de terreno más resistentes); una roca 'tipo' —no especialmente buena— puede soportar con seguridad 500 kN/m^2, insuficiente para los rascacielos verdaderamente altos.

Este último resultado nos pone sobre la pista de que la seguridad frente al hundimiento va a ser un requisito más exigente que los anteriores.

Hundimiento

Aunque estamos considerando el edificio como sólido indeformable (y por tanto irrompible), para analizar el hundimiento nos basta con tener una idea somera de la resistencia del terreno, es decir, la presión media que *con seguridad* es capaz de resistir, $\mathbf{f}_\mathrm{T}$. Partiendo de la ecuación (4), y considerando la expresión de la excentricidad (3), la condición para la seguridad frente al hundimiento es:

$$p = \frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{b}\mathbf{h}}{\mathbf{b} - \dfrac{\mathbf{w}_\mathrm{max}}{\boldsymbol{\rho}_\mathrm{max}}\boldsymbol{\lambda}} \leq \mathbf{f}_\mathrm{T}$$

De aquí podemos deducir un límite para la altura del edificio:

$$\mathbf{h} \leq \frac{\mathbf{b}^2\boldsymbol{\rho}}{\dfrac{\boldsymbol{\rho}^2\mathbf{b}^2}{\mathbf{f}_\mathrm{T}} + \mathbf{w}}$$

De está expresión se deduce que el viento es una acción *desfavorable*: cuanto mayor sea, menor habrá de ser la altura. No resulta tan evidente cómo es el peso: cuanto mayor sea, mayor es el numerador pero también será mayor el denominador; pero puesto que el denominador crece con el cuadrado de $\boldsymbol{\rho}$, cabe esperar que el efecto neto sea *desfavorable*[1]. Por tanto calcularemos $\mathbf{h}$ con los valores máximos de ambas acciones, véase el Cuadro 2, para cada valor de $\mathbf{b}$. Nótese que en este requisito no empleamos ningún coeficiente de seguridad, debido a que $\mathbf{f}_\mathrm{T}$ es una resistencia *segura* —con la seguridad *incluida*.

En el Cuadro 2 se han tabulado los valores límite de $\mathbf{h}$ tanto para un terreno 'flojo' como para una 'buena' roca, diez veces más resistente. Se observa que conforme el tamaño del edificio crece, la esbeltez límite disminuye (al revés que en el caso del vuelco). La esbeltez de los rascacielos americanos *prismáticos* no suele superar el valor 10, lo que concuerda con el caso de una buena roca. En este último caso, debe notarse que para tamaños pequenos ($\mathbf{b}$ igual a 20 m o menor), la seguridad al vuelco impone límites menores tanto para $\mathbf{h}$ como para $\boldsymbol{\lambda}$ que aquellos que impone el hundimiento, véase Cuadro 1; en el caso de cimentación sobre roca, los valores límite *combinados* de dan el Cuadro 3.

Una conclusión

Los edificios normales, de no más de 10 plantas, y crujías no menores de 7 m, son seguros en condiciones normales: no deslizan, no vuelcan, no se hunden.

[1] La ambigüedad puede deshacerse calculando la derivada $\partial\mathbf{h}/\partial\boldsymbol{\rho}$; o bien tabulando la expresión dos veces: una con $\boldsymbol{\rho}_\mathrm{min}$ —favorable— y otra con $\boldsymbol{\rho}_\mathrm{max}$ —desfavorable—, y viendo cual conduce a la menor altura.

Cuadro 1: Seguridad frente al vuelco
Valores *límite* de $\mathbf{h}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ para asegurar la estabilidad frente al vuelco de edificios normales con base $\mathbf{b}$(peso específico entre 1,2 y 2,4 kN/m^3, máximo viento de 1 kN/m^2). Para los valores indicados de $\mathbf{h}$ y $\mathbf{b}$, se da también la presión media sobre el terreno, mínima (edificio vacio sin viento) y máxima (edificio lleno con viento).

$\mathbf{b}$ (m)	$=$	10	20	30	40	50
$\boldsymbol{\lambda}$	$\leq$	6	12	18	24	30
$\mathbf{h}$ (m)	$\leq$	60	240	540	960	1.500
Presión media sobre el terreno (kN/m^2)						
mínima	$\approx$	72	288	648	1.152	1.800
máxima	$\approx$	192	768	1.728	3.072	4.800

Cuadro 2: Seguridad frente al hundimiento
Valores *límite* de $\mathbf{h}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ para asegurar la estabilidad frente al hundimiento de edificios normales con base $\mathbf{b}$(peso específico entre 1,2 y 2,4 kN/m^3, máximo viento de 1 kN/m^2. Se considera un terreno 'flojo' ($\mathbf{f}_\mathrm{T} = 150$ kN/m^2) y una 'buena' roca (($\mathbf{f}_\mathrm{T} = 1{,}500$ kN/m^2).

$\mathbf{f}_\mathrm{T} = 150$ kN/m^2						
$\mathbf{b}$ (m)	$=$	10	20	30	40	50
$\mathbf{h}$ (m)	$\leq$	50	59	61	62	62
$\boldsymbol{\lambda}$	$\leq$	4,96	2,93	2,02	1,54	1,24
$\mathbf{f}_\mathrm{T} = 1{,}500$ kN/m^2						
$\mathbf{b}$ (m)	$=$	10	20	30	40	50
$\mathbf{h}$ (m)	$\leq$	173	378	485	538	566
$\boldsymbol{\lambda}$	$\leq$	17	19	16	13	11,3

Cuadro 3: Seguridad combinada frente al vuelco y al hundimiento
Valores *límite* de $\mathbf{h}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ para asegurar la estabilidad frente al vuelco y al hundimiento de edificios normales con base $\mathbf{b}$ (peso específico entre 1,2 y 2,4 kN/m^3, máximo viento de 1 kN/m^2), apoyados sobre una 'buena' roca ($\mathbf{f}_\mathrm{T} = 1{,}500$ kN/m^2).

$\mathbf{b}$ (m)	$=$	10	20	30	40	50
$\mathbf{h}$ (m)	$\leq$	60	240	485	538	566
$\boldsymbol{\lambda}$	$\leq$	6	12	16	13	11,3