Solución gráfica de ecuaciones lineales

[. . .] si no puedo dibujarlo, no puedo entenderlo [. . .]
Atribuida a Albert Einstein

Si una se ha acostumbrado a los métodos gráficos de cálculo, puede apenarse al toparse con problemas que requieren la solución de un conjunto de ecuaciones lineales. Pero, en realidad, para una o dos ecuaciones, puede continuarse, si se desea, con la escuadra y el cartabón.

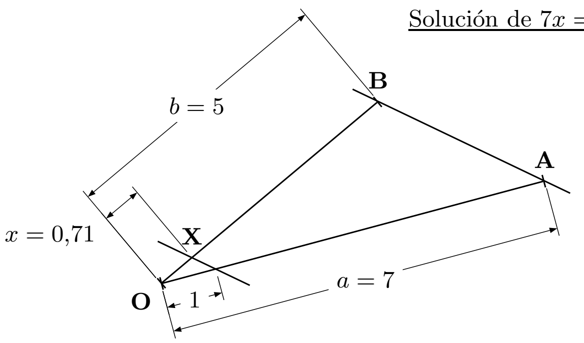
Una ecuación

La ecuación

$$ax = b \tag{1}$$

tiene una solución tan simple ($x = b \div a$) que no merece la pena plantearse siquiera cómo resolverla gráficamente. Pero puede servir para mejor comprender la naturaleza de otros procedimientos gráficos.

Solución de $7x = 5$



Los segmentos **OA** y **OB** se trazan con cualquier orientación, iguales a la escala elegida a los valores de a y b. A esa escala, se marca una unidad de longitud en **OA**, y por ese punto se traza una paralela a **AB**; la intersección de esta última con **OB** determina **X**. x es igual a la medida de **OX** a la escala elegida.

Para la precisión, debe procurarse elegir inclinaciones tales que el ángulo **OBA** sea cercano a 90°—ni muy agudo ni muy obtuso.

Dos ecuaciones

Las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

se expresan frecuentemente en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

que en forma compacta se reduce a:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

Pero, aunque menos frecuente, pueden escribirse también así:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix} x + \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix} y = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

Pensando las matrices columna como vectores:

$$\vec{A}_1 x + \vec{A}_2 y = \vec{B} \tag{3}$$

y pensando los vectores como fuerzas, la expresión anterior puede leerse como la descomposición de la fuerza $\vec{B}$ en sus dos componentes *con la métrica y las direcciones* de $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ respectivamente. O, de otra forma, x e y son los escalares por los que hay que multiplicar las fuerzas $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ para que sumen $\vec{B}$. Es decir, determinar x e y debe poder hacerse con un polígono vectorial.

Veamos un ejemplo:

$$\begin{aligned} 42{,}3\,\mathrm{kN/mm}\cdot\delta + 21{,}2\,\mathrm{mkN/mm}\cdot\theta &= 50\,\mathrm{kN} \\ 21{,}2\,\mathrm{mkN/mm}\cdot\delta + 187\,\mathrm{mkN{\cdot}m/mm}\cdot\theta &= 0\,\mathrm{mkN} \end{aligned}$$

Se trata de ecuaciones típicas que resultan de utilizar el método universal de análisis de estructuras (en este caso, con dos grados de libertad, δ y θ, y las correspondientes ecuaciones de equilibrio, una de fuerzas y otra de momentos).

Para su solución gráfica olvidemos momentáneamente las unidades de cada número y pensemos en ellos como simples longitudes. A cierta escala se dibujan los vectores $\vec{B}$, $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$, estos últimos arrancando de cada uno de los extremos de $\vec{B}$, véase la Figura 1. La intersección de las direcciones de $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ determina el punto **X**. La ecuación (3) se verifica entonces como

$$\vec{\mathbf{OX}} + \vec{\mathbf{XB}} = \vec{\mathbf{OB}}$$

La solución de las ecuaciones es:

$$x = \frac{|\mathbf{OX}|}{|\vec{A}_1|} \qquad y = -\frac{|\mathbf{XB}|}{|\vec{A}_2|}$$

midiéndose a escala las cuatro longitudes en el dibujo. El signo negativo de y corresponde a que $\vec{A}_2$ y $\vec{\mathbf{XB}}$ tienen sentidos opuestos.

Si no se desea desenfundar la calculadora ni siquiera para realizar estas dos divisiones, basta aplicar el método para “una ecuación”, tal y como se comentó en el apartado anterior. En tal caso, los valores absolutos de x e y se miden directamente con las escalas que se elijan —que pueden (y probablemente deben) ser distintas a la primera escala utilizada.

Las unidades se deducen de la coherencia dimensional de las ecuaciones originales:

$$\delta = 1{,}25\,\mathrm{mm} \qquad \theta = -0{,}14\,\mathrm{mm/m}$$

Las ecuaciones (2) tienen *solución única* si y sólo si el determinante de la matriz **A** es distinto de cero (sólo entonces es posible invertirla). La correspondiente

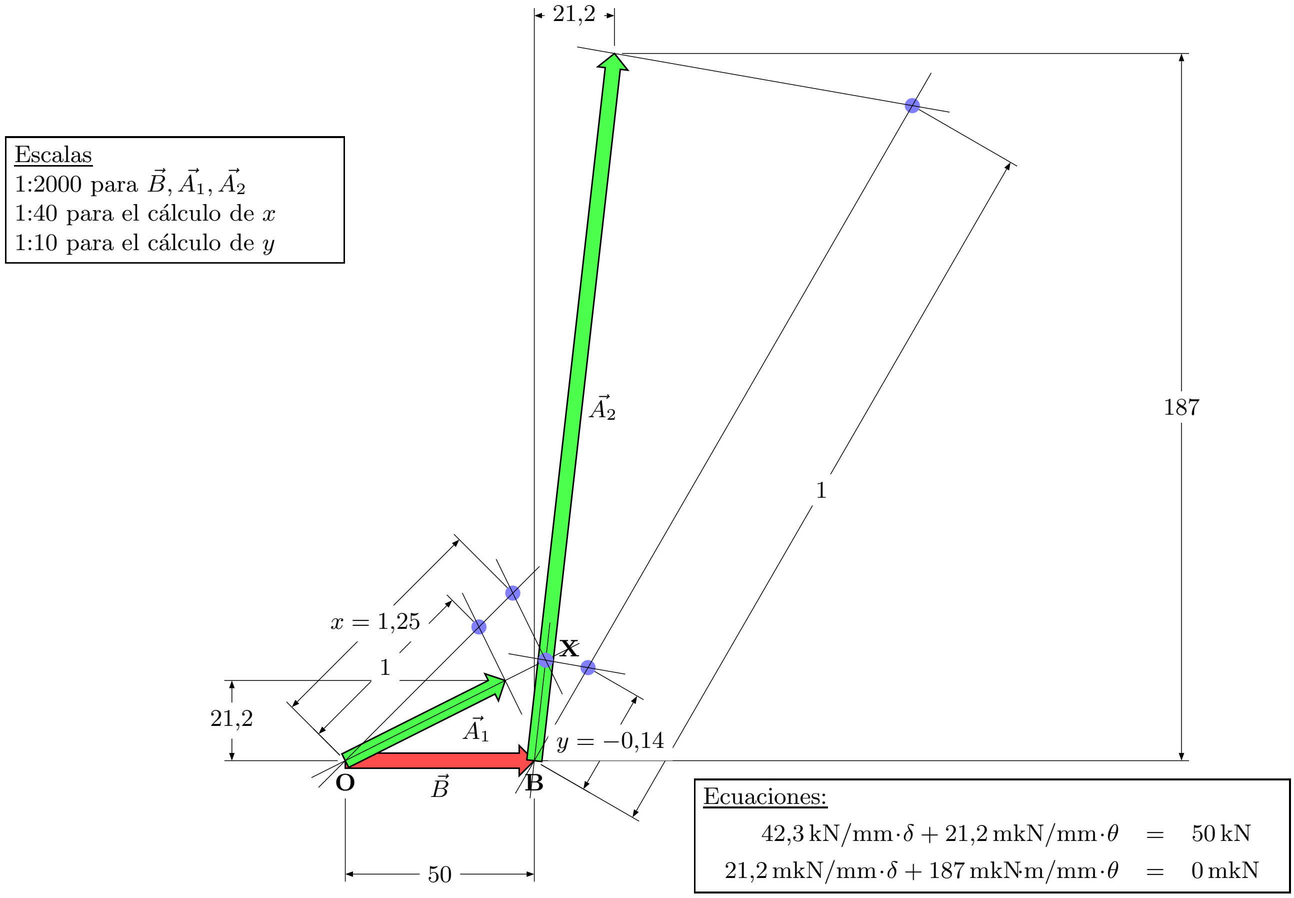


Figura 1.

condición geométrica es que $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ no sean paralelos (en tal caso, o bien **X** quedaría en el infinito —un poco lejos—, o bien habría infinitos **X** —cuando además de ser paralelos tienen la misma dirección).

En la jerga habitual se denomina conjunto *mal condicionado* al de aquellas ecuaciones en las que el determinante de **A** es extremadamente pequeño. Eso corresponde a vectores casi paralelos, en los que determinar **X** con precisión requeriría una hoja de papel extraordinariamente grande.

¿Tres ecuaciones?

Siguiendo el razonamiento anterior, un conjunto de tres ecuaciones lineales puede escribirse como:

$$\vec{A}_1 x + \vec{A}_2 y + \vec{A}_3 z = \vec{B} \tag{4}$$

Las direcciones de $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ junto al origen de $\vec{B}$ determinan un plano en el espacio. La intersección de la recta pararela a $\vec{A}_3$ que pasa por el otro extremo de $\vec{B}$ determina el punto **X**, con el mismo papel que en el caso anterior. Sin embargo, dibujar en tres dimensiones no resulta nada práctico. Quizás, dándole vueltas al asunto, podría idearse un método para trabajar con esa idea en dos dimensiones. Sin embargo, el fundamentalismo no es nada recomendable en ninguna disciplina: lo más práctico para este caso es recurrir (¿por una vez?) a una calculadora, ¡pero que maneje matrices con soltura!

Copyleft © 2007, Vázquez. Printed with *free software*: GNU/Linux/`emacs`/LaTeX 2_ε/`Postscript`.