Sólido deformable (III). Tensor de tensiones.

A través de una superficie, real o imaginada, los sólidos pueden ejercer presiones en cualquier dirección. Así, el roce entre dos sólidos requiere una tensión *normal* σ, de la que depende la tensión tangencial: $\tau \leq \mu\sigma$. La combinación de ambas, t, es *oblicua* respecto a la superficie de contacto.

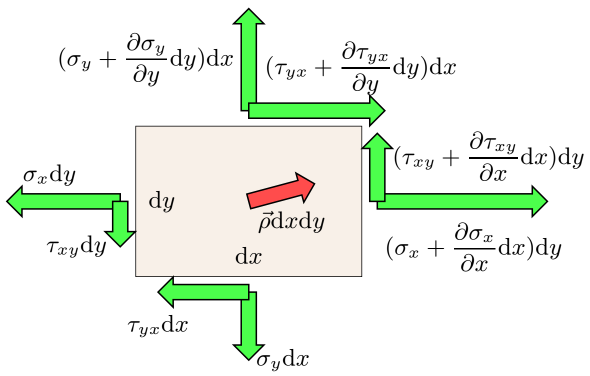
Un corte oblicuo en un cable traccionado requiere también una tensión oblicua respecto a la superficie del corte, una tensión que sigue alineada con el eje del cable y con la tracción exterior y que consta de dos componentes: *normal*, $\sigma_\alpha = \mathrm{t}_\alpha \cos\alpha$; y *tangencial*, $\tau_\alpha = \mathrm{t}_\alpha \sin\alpha$. El corte perpendicular al eje es *especial* y la tensión es normal a la superficie, $\sigma_0 = \mathrm{t}_0$, $\tau_0 = 0$: está libre de tensiones tangenciales, y por ello se dice que el eje del cable es una *dirección principal*.

Debido a que la información sobre los materiales se obtiene referida a direcciones principales de tensión (ensayos de tracción o compresión), resulta necesario relacionar las tensiones en cortes con diferentes orientaciones. En lo que se sigue se considera un mundo de *dos* dimensiones: las superficies son líneas y los volúmenes, superficies. Los resultados pueden generalizarse a un mundo 'normal', de tres dimensiones.

Técnicamente, un líquido se caracteriza por no resistir tensiones tangenciales. Por el contrario, en el estado *sólido* tal resistencia es *imprescindible*. Sin ella, los sólidos se *licúan*: acaba pasando al aumentar la temperatura.

Equilibrio local alrededor de un punto

El equilibrio local, alrededor de un punto (x, y), se estudia considerando un diferencial de volumen, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Hay cuatro *funciones* de tensión, con valores para cada punto: dos tensiones normales, σ_x y σ_y; y dos tangenciales, τ_{xy} y τ_{yx}. Las acciones sobre el elemento se representan por una fuerza por unidad de volumen, $\vec{\rho} = \{\rho_x, \rho_y\}$.



Tras algo de trabajo algebraico (y despreciando diferenciales de 'orden superior'), las tres ecuaciones de equilibrio estático resultan ser:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho_x = 0$$

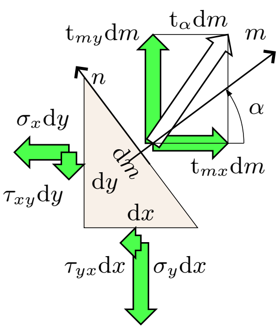
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho_y = 0$$

$$\sum M_{(0,0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

La ecuación de momentos revela que las dos tensiones tangenciales son *sistemáticamente* iguales: $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$. Con tres funciones *independientes* y *sólo* ***dos*** ecuaciones diferenciales, el 'problema' de determinar las funciones de tensión de un sólido sustentado y sometido a acciones sólo puede resolverse *hiperestáticamente*, adoptando como incógnitas los ***dos grados de libertad*** del punto, sus desplazamientos u y v en la dirección de los ejes xy. Lo que requiere a su vez utilizar modelos tensión/deformación que permitan relacionar las funciones de tensión con u y v.

Variación de la tensión con la orientación

Planteando el equilibrio del diferencial 'triangular' se obtienen las componentes de t_α en coordenadas xy:



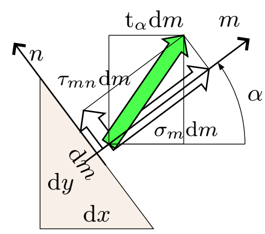
$$\mathrm{t}_{mx} = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx} \sin\alpha$$

$$\mathrm{t}_{my} = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \sin\alpha$$

y en forma matricial:

$$\{\mathrm{t}_{mx}\ \mathrm{t}_{my}\} = \{\cos\alpha\ \ \sin\alpha\} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

El vector $\vec{\mathrm{t}_\alpha}$ se 'genera' mediante el producto del vector *unitario* de la dirección α por la matriz $[\boldsymbol{\sigma}]$. Ésta es la definición técnica de *tensor*: $[\boldsymbol{\sigma}]$ es el *tensor de tensiones* en coordenadas xy.



Las componentes de $\vec{\mathrm{t}_\alpha}$ en coordenadas mn, definidas por α, se obtienen mediante una transformación de coordenadas:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy} \sin\alpha \cos\alpha \\ \tau_{mn} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \qquad (1)$$

σ_m, σ_n y τ_{mn} son las componentes de $[\boldsymbol{\sigma}]$ en coordenadas mn. *Vector y tensor son independientes de los ejes coordenados empleados.*

Direcciones principales de tensión

Las direcciones principales definen superficies en las que la tensión tangencial se anula y el tensor de tensiones queda *diagonalizado*. Su orientación $\alpha = \beta$ respecto a los ejes xy se determina con la condición $\tau_{mn} = 0$:

$$\tan 2\beta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (2)$$

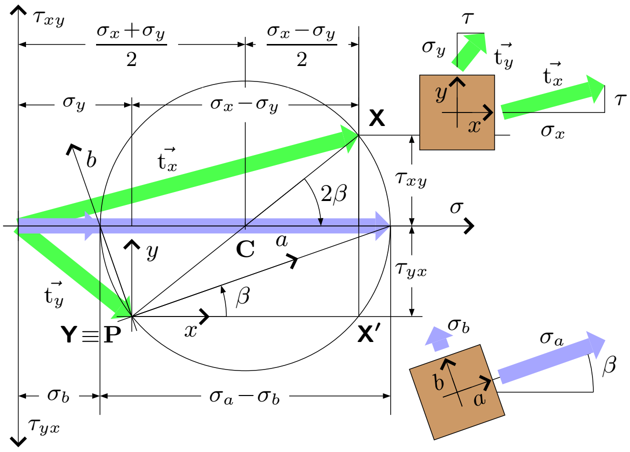
La orientación β define los ejes *principales ab*, para los cuales $\tau_{ab}=0$. Las *tensiones principales* valen:

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2} \\ \sigma_b &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}\end{aligned} \quad (3)$$

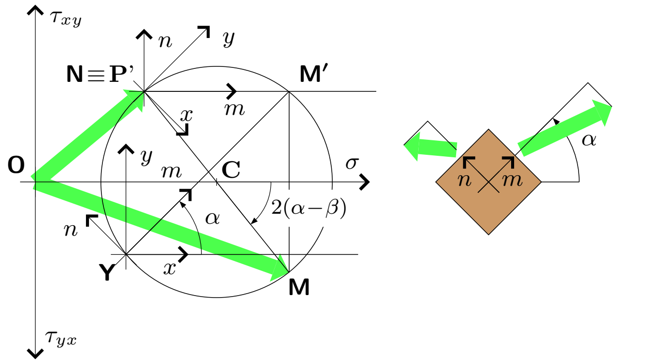
σ_a y σ_b son los valores máximo y mínimo de $\sigma_m(\alpha)$.

Circunferencia de Mohr

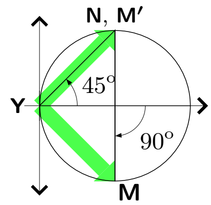
Las ecuaciones (1), (2) y (3) describen las transformaciones del tensor $[\boldsymbol{\sigma}]$ sobre el vector tensión, $\vec{t}$. Todas estas transformaciones pueden resumirse en una 'sencilla' figura debida a Mohr. Se traza en unos ejes $\sigma\tau$, *intrínsecos de cada corte*, en donde se representan las componentes del tensor en coordenadas xy, puntos **X** e **Y**. La intersección de **XY** con el eje σ determina el centro de la *circunferencia de Mohr*, **C**. La intersección de la circunferencia con el eje σ define un diámetro que determina las tensiones principales —ecuación (3)— y la unión de sus extremos con **Y** —*polo* **P** de la construcción— da su orientación —ecuación (2). Los ejes xy vienen definidos por **YX'**, siendo **X'** el simétrico de **X** respecto al eje σ.



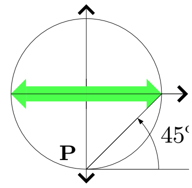
Las tensiones en una orientación α cualquiera se obtienen de la construcción inversa: trazando por **Y** una paralela a m se determina **M'**, simétrico de **M**; finalmente el diámetro que pasa por **M** determina **N**, el *polo* de la circunferencia para los ejes mn. Los vectores **OM** y **ON** determinan el vector $\vec{t}$ en las caras m y n.



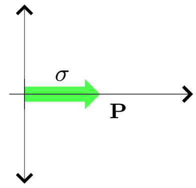
Debe notarse que los ejes geométricos (xy o mn) rotan al pasar de un polo a otro: los que corresponden a las coordenadas utilizadas para la determinación del polo son paralelos a los ejes intrínsecos $\sigma\tau$. También que los ángulos 'dobles' (los que forman los diámetros entre sí) corren a la contra de los ángulos que forman entre sí los ejes en cada polo.



En el caso de un cable, los ejes xy habituales son *ya* ejes principales. Si la tensión de tracción simple es σ, un corte a 45° mostrará una tracción menor, $\sigma/2$, pero acompañada de una tensión tangencial de igual valor, $\tau=\sigma/2$, que es la máxima.



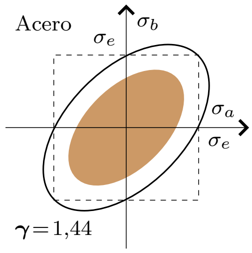
En la cizalladura sólo hay tensiones tangenciales, $\sigma_x=\sigma_y=0$, $\tau_{xy}=\tau$. La circunferencia se centra en el origen y las direcciones principales están a 45°, con tracción y compresión de idéntico valor, $\text{abs}\,(\sigma)=\tau$. Aproximadamente es lo que hacen las tijeras al cortar papel.



En la tracción o compresión biaxial, por el contrario, sólo hay tensiones normales *iguales*, $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$, $\tau_{xy}=0$. La circunferencia se reduce a un punto, mostrando que las tensiones son iguales en cualquier orientación, siendo todas principales; como en un líquido, de ahí la denominación de *presión hidrostática*.

Criterios de proporcionalidad

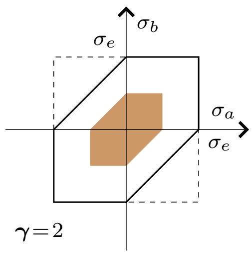
Los límites del estado proporcional han de definirse para cualquier estado de tensión, no sólo para la tracción simple. En materiales *isótropos*, se define una región en el plano $\sigma_a\sigma_b$; fuera de ella el material plastifica si es dúctil, o se rompe, si es frágil. La diagonal $\sigma_a=\sigma_b$ define tracciones o compresiones biaxiales, mientras que $\sigma_a=-\sigma_b$, cizalladuras en planos a 45°. La referencia común es el límite elástico en tracción simple, σ_e. La región sombreada representa estados de tensión que son *seguros* con los requisitos habituales para cada material.



Criterio Huber/Mises. Se emplea para el acero y otros metales.

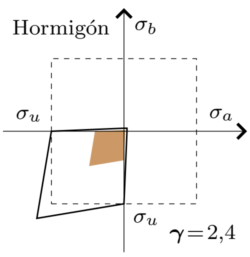
$$\sigma_a^2+\sigma_b^2-\sigma_a\sigma_b \le \sigma_e^2$$

La tensión tangencial no puede superar el valor $\sigma_e/\sqrt{3}$.



Criterio de Tresca. Se emplea como primera aproximación para materiales complicados o de comportamiento poco estudiado. Combina dos condiciones simultáneas:

$$\text{abs}\,(\tau_{\max}) \le \frac{\sigma_e}{2} \quad \text{abs}\,(\sigma_a) \le \sigma_e$$



Criterios empíricos. En materiales como el hormigón, con distinta resistencia a tracción que a compresión, se emplean criterios empíricos, mezcla de los anteriores y otros. Aunque diminuta, hay resistencia a la tracción y, por tanto, al corte: ¡el hormigón es sólido!