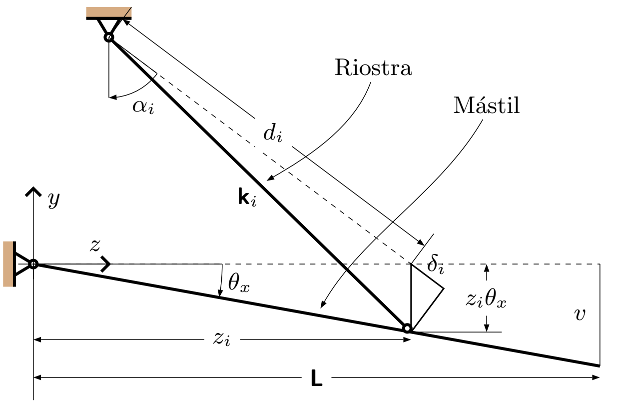
Sólido deformable (IV). Compresión. Estabilidad.

Riostras. Arriostramiento.

Para poder soportar algo distinto de una tracción, un mástil, o bien está empotrado en su base, o bien tiene que estabilizarse mediante *riostras*. Por ejemplo, sin *arriostramiento*, manteñerlo en posición *vertical* es una *proeza acrobática*. Si las riostras son cables sólo resultan eficaces en tanto se alargen. Las riostras proporcionan rigidez frente al giro de la estructura respecto a la base del mástil. La rigidez puede medirse en relación al giro o al desplazamiento de su cabeza (*desplome* en el caso de *soportes*).

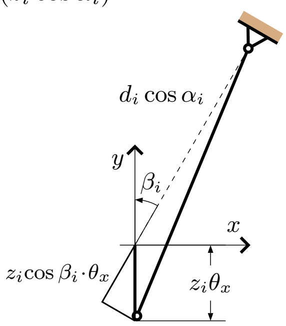


Para cables perpendiculares al eje del giro se tendrá:

$$\delta_i \approx z_i \cos\alpha_i \cdot \theta_x; \quad N_i = \mathsf{k}_i \delta_i; \quad M_x \approx z_i \cos\alpha_i \cdot N_i$$

$$\mathsf{K}_{M\theta} = \frac{M_x}{\theta_x} \approx \mathsf{k}_i (z_i \cos\alpha_i)^2$$

Si el cable está en un plano que forma un ángulo β_i con el plano de giro, el desplazamiento transversal en el plano β_i será $z_i \cos\beta_i \cdot \theta_x$, y la ecuación de compatibilidad $\delta_i \approx z_i \cos\alpha_i \cos\beta_i \cdot \theta_x$. La rigidez añadida a la estructura se determina como antes:



$$\mathsf{K}_{M\theta} = \frac{M_x}{\theta_x} \approx \mathsf{k}_i (z_i \cos\alpha_i \cos\beta_i)^2$$

Un cable en un plano perpendicular al de giro ($\beta = 90^{\circ}$) no aporta ninguna rigidez.

Si el mástil está arriostrado por varios cables, la rigidez frente al giro es **la suma de la de todos los que se alargan**, lo que depende del **signo de** θ_x. Los cables que no se *tensan* no sirven de nada.

Si como grado de libertad se adopta el desplazamiento transversal de la cabeza del mástil, v, entonces $v \approx \mathsf{L}\theta_x$, y la rigidez se mide ahora con la proporción entre el momento y v:

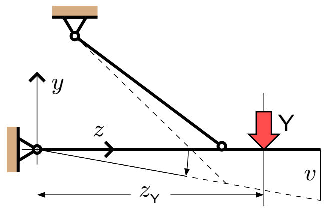
$$\mathsf{K}_{Mv} = \frac{M_x}{v} \approx \frac{M_x}{\mathsf{L}\theta} = \frac{\mathsf{K}_{M\theta}}{\mathsf{L}}$$

Las expresiones anteriores de la rigidez $\mathsf{K}_{M\theta}$ se apoyan en la *hipótesis de desplazamientos pequeños* y son una aproximación al primer término del desarrollo en serie de la expresión exacta. Es una aproximación que *sobrestima* la rigidez suministrada. Pero es *bastante buena* a condición de que $\alpha_i \leq 75^{\circ}$.

Acciones que producen giros

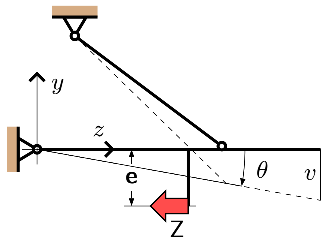
El conjunto de riostras o *arriostramiento* permite a la estructura hacer frente a los momentos aplicados sobre el mástil.

Carga transversal. Una fuerza transversal Y a una distancia z_{Y} produce un momento $z_{\mathsf{Y}}\mathsf{Y}$. Si es posible asegurar que el giro se produce exclusivamente en el plano yz entonces:



$$\theta_x \approx \frac{z_{\mathsf{Y}}\mathsf{Y}}{\mathsf{K}_{M\theta}} = \frac{z_{\mathsf{Y}}\mathsf{Y}}{\mathsf{K}_{Mv}\mathsf{L}} \qquad v \approx \frac{z_{\mathsf{Y}}\mathsf{Y}}{\mathsf{K}_{Mv}}$$

Carga longitudinal excéntrica. Una fuerza longitudinal Z actuando con una excentricidad **e** produce un momento **e**Z. Si sólo se produce giro en el plano yz, entonces:



$$\theta_x \approx \frac{\mathsf{e}\mathsf{Z}}{\mathsf{K}_{M\theta}} = \frac{\mathsf{e}\mathsf{Z}}{\mathsf{K}_{Mv}\mathsf{L}} \qquad v \approx \frac{\mathsf{e}\mathsf{Z}}{\mathsf{K}_{Mv}}$$

En general, con varias acciones simultáneas que produzcan momento, si el giro se produce en yz, su valor se obtiene dividiendo el momento total por la rigidez total frente al giro. Una vez obtenido el giro necesario para alcanzar el equilibrio (o el desplazamiento), la solicitación en cada cable se determina sin dificultad:

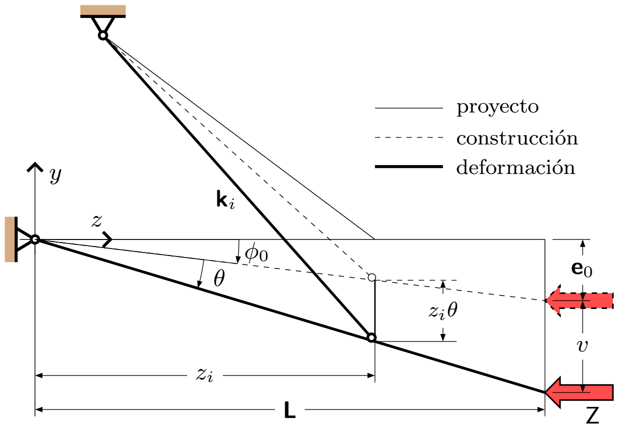
$$N_i \approx \mathsf{k}_i z_i \cos\alpha_i \cos\beta_i \cdot \theta_x$$

Compresión centrada o 'simple'

—¿Cuantas veces has estado en New York?
—La verdad: no me acuerdo. Quince o dieciséis, quizás… ¿Y tú?
— ¡Umm! *Tampoco me acuerdo*… Una o ninguna…

Con la aproximación anterior, una *sola* fuerza Z sin excentricidad no produce momento y el giro calculado es nulo, y también lo son las solicitaciones en los cables. Si la fuerza es una tracción para el mástil y *es la única previsible*, los cables resultan innecesarios. Pero si se trata de una compresión, *sabemos* que son necesarios aunque parece que no se tensan. Se trata de un *defecto* de la hipótesis de desplazamientos pequeños: al estudiar el equilibrio *en la geometría inicial* de la estructura, sin deformación ($\theta_x = 0$, $v = 0$), no hay efectivamente momento, pero ¿lo habría con una geometría que incluya deformaciones? ¿Hemos estado o no en New York? **¡No podemos olvidarlo!**

Mundo perfecto. Supongamos el mástil *perfectamente* recto. En un análisis de *segundo orden* se estudia la situación en que se ha producido un desplazamiento v (o un giro θ) mediante una *perturbación momentánea*. Entonces, el momento exterior valdrá $\mathsf{Z}v$, y la respuesta interna de la estructura, $\mathbf{K}_{Mv}v$. Si ambos momentos son iguales, *hay equilibrio indiferente* al valor de v. Si $\mathsf{Z}v > \mathbf{K}_{Mv}v$, no hay equilibrio y la deformación aumenta hasta la rotura: *la perturbación es catastrófica*. Si $\mathsf{Z}v < \mathbf{K}_{Mv}v$, la estructura vuelve a su posición 'perfecta' inicial. La rigidez $\mathbf{K}_{Mv}$ es *numéricamente* igual al valor de la carga Z que *diferencia* la *recuperación* de la *catástrofe*; por ello recibió en el pasado la denominación de *carga crítica*, aunque **no es una carga**. De hecho, el requisito de estabilidad exige en este caso $\mathsf{Z} < \mathbf{K}_{Mv}$, pues $\mathsf{Z} = \mathbf{K}_{Mv}$ sería una carga *insoportable* en el mundo real.



Mundo real. *La perfección no existe.* Incluso antes de cargarlo, la geometría del mástil será distinta a la proyectada, presentando una *imperfección inicial*, medida ya sea por un ángulo ϕ_0, ya por una longitud $\mathbf{e}_0$. Debido a las tolerancias habituales de fabricación, tal imperfección será comparable a un desplazamiento pequeño. En tal caso, desde el principio, *hay momento exterior*, $\mathsf{Z}\mathbf{e}_0$, y la estructura reaccionará deformándose. Si se alcanza el equilibrio tras un pequeño giro *adicional* θ, entonces $v \approx \mathbf{L}\theta$ y $\mathsf{Z} < \mathbf{K}_{Mv}$, y la ecuación de equilibrio es:

$$\mathsf{Z}(\mathbf{e}_0 + v) \approx \mathbf{K}_{Mv} \cdot v \quad \Rightarrow \quad \boxed{v \approx \mathbf{e}_0 \frac{\mathsf{Z}}{\mathbf{K}_{Mv} - \mathsf{Z}}}$$

Resistencia del arriostramiento. Para una seguridad $\boldsymbol{\gamma}$, el equilibrio debe ser todavía posible bajo $\gamma\mathsf{Z}$ (aunque al borde de la rotura):

$$\gamma\mathsf{Z}(\mathbf{e}_0 + v_\mathrm{u}) \leq \mathbf{K}_{Mv}v_\mathrm{u} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_\mathrm{u} \approx \mathbf{e}_0 \frac{\gamma\mathsf{Z}}{\mathbf{K}_{Mv} - \gamma\mathsf{Z}}}$$

lo que requiere que $\mathbf{K}_{Mv} > \boldsymbol{\gamma}\mathsf{Z}$. Además, ningún cable debe haber sobrepasado su límite elástico:

$$\varepsilon_i = \frac{\delta_i}{d_i} \leq \varepsilon_{ei}; \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_\mathrm{u} \leq \frac{\varepsilon_{ei} \cdot d_i}{z_i \cos\alpha_i \cos\beta_i} \quad \forall i}$$

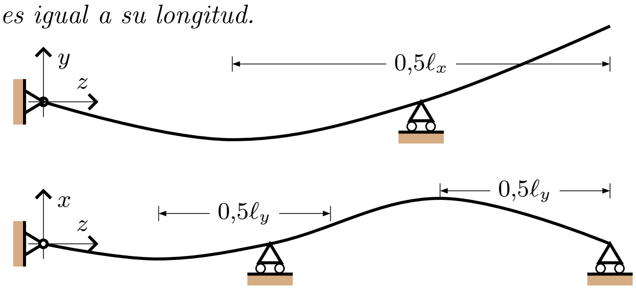
siendo d_i la longitud del cable. Para el diseño, determinado el máximo valor para v_u, se obtiene el mínimo valor para $\mathbf{K}_{Mv}$. (La consideración del periodo plástico es complicada y, en general, no predice mayor capacidad de carga que el límite anterior.)

Rigidez del arriostramiento. Para la carga Z, la deformación de la estructura no debe ser excesiva. En general basta con comprobar que el giro θ no supera el valor de la distorsión tolerable, ϕ_tol. En ocasiones, el requisito de rigidez se expresa como un límite a la excentricidad total, entonces hay que comprobar que $\mathbf{e}_0 + v$ no supera ese límite.

Resistencia a la compresión

Aunque los cables pueden arriostrar un mástil, no pueden sustituirlo (salvo que esté traccionado): los cables tienen *poca o ninguna* rigidez frente al acortamiento: se comban o pandean sin ofrecer resistencia. Una barra cilíndrica puede también pandear si es *esbelta*, pero ofrece resistencia a aumentar su curvatura. Un cubo macizo puede ser aplastado, pero difícilmente pandea. La resistencia (o la rigidez) frente al pandeo y la compresión depende de la *esbeltez mecánica* de la pieza, λ, proporción entre la *luz de pandeo* y el *radio de giro* en el plano que contiene la pieza pandeada, $\lambda_x = \ell_x \div \mathbf{i}_x$.

Luz de pandeo ℓ. Es el *doble* de la distancia entre un punto de curvatura nula y el *siguiente* punto de pendiente nula en la pieza pandeada. Dependiendo de la sustentación y del arriostramiento, el pandeo puede ser distinto en cada plano que se considere. En cada plano hay que buscar la máxima. Es una medida *esencialmente* proporcional a la *máxima excentricidad* de la compresión. *En piezas articuladas en ambos extremos es igual a su longitud.*



Radio de giro $\mathbf{i}$. Se define respecto de un eje de la sección de la pieza que pase por su centro de gravedad.

$$\mathbf{i}_x = \sqrt{\frac{\mathbf{I}_x}{\mathbf{A}}} \qquad \mathbf{I}_x = \int_A y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \mathbf{A} = \int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Plano de pandeo. Cada pieza pandea en un plano 'preferente', aquel con *mayor esbeltez mecánica*. A compresión, la pieza debe dedicar parte de su resistencia a *autoarriostrar* aquellos de sus puntos que no lo estén por el arriostramiento o la sustentación, quedando para resistir la compresión sólo una fracción de aquella. El área 'eficaz' a compresión es $\mathbf{A}/\omega$, siendo ω el *coeficiente de pandeo*, función *creciente* de la esbeltez mecánica en el plano de pandeo que la tenga mayor (véase la hoja **DATOS ESTRUCTURALES**). $1/\omega$ es la fracción del área dedicada a la compresión ($\omega \geq 1$); la fracción restante $(1 - 1/\omega)$ se dedica a la flexión. La resistencia a compresión de un mástil viene dada por:

$$\gamma\mathbf{N} \leq \frac{\mathbf{A}\sigma_e}{\omega} \qquad \text{o bien} \qquad \mathbf{N} \leq \frac{\mathbf{Af}}{\omega}$$

en donde $\mathbf{N}$ es la compresión *en servicio* y $\mathbf{f}$ es la tensión que el material resiste con seguridad a compresión ($\mathbf{f} = \sigma_e \div \gamma$).