CÓNICAS

1. Estudio algebraico de las cónicas

1.1 Introducción

En este capítulo se va a efectuar un estudio de estas curvas planas utilizando las herramientas que nos han proporcionado los temas anteriores de Álgebra Lineal y Geometría Euclídea.

Una vez fijado un sistema de referencia en el plano euclídeo, vamos a asociar a cada cónica una matriz. Mediante cambios de referencia ortonormales adecuados (giros y traslaciones), vamos a ir simplificando la matriz asociada a la cónica hasta identificar de qué tipo de cónica se trata, cuál es su ecuación reducida, quiénes son su centro (ó vértice, según proceda), ejes, vértices, focos, directrices, ...

El estudio anterior va a poder llevarse a cabo gracias a ciertos elementos asociados a la matriz de la cónica que van a permanecer invariantes a lo largo de todo el proceso, son los llamados invariantes de la cónica.

1.2 Definición

Sea E_2 el plano euclídeo ordinario. Sea $R=\left\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right\}$ una referencia ortonormal del mismo. Llamamos ***cónica*** en E_2 al lugar geométrico de los puntos del plano que verifiquen la ecuación general de segundo grado:

$$a_{00}+2a_{01}x+2a_{02}y+a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy=0 \qquad (1)$$

donde a_{11}, a_{12} y a_{22} no son simultáneamente nulos .

En la ecuación (1) distinguimos:

Término independiente: a_{00}

Forma lineal: $2a_{01}x+2a_{02}y$, llamndo $A_L=\begin{pmatrix}a_{01} & a_{02}\end{pmatrix}$.

Forma cuadrática: $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy$, llamando $A_c=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$

Ecuación matricial. La ecuación (1) puede escribirse en la forma:

$$\overline{X}^t A\overline{X}=O \qquad (2)$$

siendo $\overline{X}=\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{00} & a_{01} & a_{02}\\ a_{01} & a_{11} & a_{12}\\ a_{02} & a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$; ó bien:

$$a_{00} + 2A_L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + (x \quad y)A_c\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \qquad (3)$$

A la matriz A se le llama **matriz asociada a la cónica**.

Tipos de cónicas.

Veamos que la ecuación de la cónica, mediante un cambio de referencia ortonormal (giro y traslación de ejes), siempre se reduce a uno de los casos siguientes:

1) ELIPSE: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+k=0}$, con

$A=\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$; la elipse será :

REAL si λ_1 y λ_2 tienen signo contrario a k,

IMAGINARIA si λ_1 , λ_2 y k tienen el mismo signo.

2) HIPÉRBOLA: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+k=0}$, con

λ_1 y λ_2 de distinto signo, siendo $A=\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$.

3) PARÁBOLA: $y^2 = 2px \Leftrightarrow \boxed{2b_1x+\lambda_2y^2=0}$, con $b_1 \neq 0$, $A=\begin{pmatrix}0 & b_1 & 0\\ b_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$.

4) DOS RECTAS QUE SE CORTAN: $\boxed{\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=0}$, λ_1 y λ_2 de signo contrario,

con matriz asociada $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$.

5) UN PUNTO: $\boxed{\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=0}$, λ_1 y λ_2 de igual signo; con $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$.

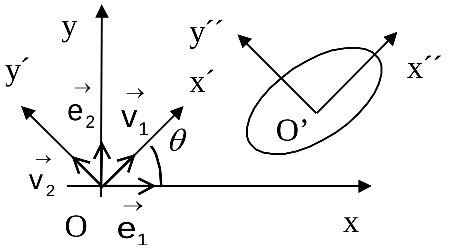
6) DOS RECTAS PARALELAS: $\boxed{d+\lambda_2y^2=0}$; con $A=\begin{pmatrix}d & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, que serán:

RECTA DOBLE si d = 0

RECTAS PARALELAS si λ_2 y d tienen signo contrario

RECTAS IMAGINARIAS si λ_2 y d son del mismo signo.

Reducción de la ecuación general de una cónica.



Giro:

Mediante un giro de ejes (los nuevos x´, y´ paralelos a los de la cónica y una posterior traslación (x´´, y´´) tales que el origen del nuevo sistema de referencia sea el centro ó el vértice de la cónica) vamos a reducir la ecuación general (1) a uno de los seis tipos anteriores.

Podemos observar que en dichas ecuaciones no aparece término en xy. Procedemos entonces a la diagonalización de la matriz A_c:

Como A_c es simétrica, es diagonalizable mediante una matriz ortogonal P que tiene por columnas a vectores propios $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de A_c. Entonces, $P^{-1}A_cP = B_c$ es diagonal. Pero, al ser P una matriz ortogonal, su inversa coincide con su traspuesta y $B_c = P^tA_cP$.

Por otra parte, siempre podemos ordenar las columnas de P de forma que $|P| = 1$, con lo cual P es la matriz asociada al giro de ejes de ángulo θ (de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ pasamos a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, manteniendo fijo el origen de coordenadas).

La ecuación de dicho giro es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Respecto al nuevo sistema de referencia, la ecuación de la cónica queda:

$a_{00} + 2A_LP\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}P^tA_cP\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$, es decir:

$$a_{00} + 2B_L\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}B_c\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \qquad (3')$$

llamando $B_L = A_LP$ y $B_c = P^tA_cP$.

La ecuación del giro también podemos escribirla así: $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{P} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$, ó bien,

$\overline{X} = \overline{P}\overline{X}`$.

Sustituyendo en la ecuación (2), queda: $\overline{X}`^t\,\overline{P}^t A\overline{P}\overline{X}` = 0$, es decir:

$$\overline{X}`^t B\overline{X}` = 0 \qquad (2')$$

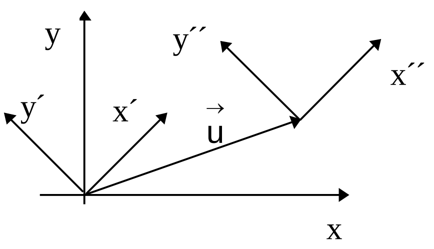
llamando $B = \overline{P}^t A \overline{P}$.

Teniendo en cuenta la ecuación (3`), ha de ser $B = \begin{pmatrix} a_{00} & b_1 & b_2 \\ b_1 & \lambda_1 & 0 \\ b_2 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, ya que $B_c = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, siendo λ_1 y λ_2 los valores propios de la matriz A_c.

La ecuación desarrollada de la cónica, respecto de la nueva referencia, es:

$$a_{00} + \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' = 0 \qquad (1')$$

Traslación:



Distinguimos dos casos:

a) $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$.

Operando en la ecuación (1`), se tiene:

$$a_{00} + \lambda_1 (x'^2 + \frac{2b_1}{\lambda_1} x') + \lambda_2 (y'^2 + \frac{2b_2}{\lambda_2} y') = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (x' + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2 (y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 +$$

$$+ (a_{00} - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}) = 0 \qquad (a)$$

Efectuamos la traslación $\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{b_1}{\lambda_1} \\ y'' = y' + \dfrac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$ de vector $\vec{u} = \left(-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2} \right)$, es decir,

siendo T_1 la matriz de la traslación.

La ecuación (a) pasaría a ser:

$$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0} \qquad (1'')$$

donde $k = a_{00} - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}$.

Y, efectuando la traslación sobre (2`), queda la ecuación (la misma que (1``) escrita en forma matricial) : $\overline{X}''^t T_1^t B T_1 \overline{X}'' = 0$, ó bien:

$$\overline{X}''^t C_1 \overline{X}'' = 0 \qquad (2'')$$

donde $C_1 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

b) Uno de los dos valores propios es 0. Supongamos $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$ (Si también fuera $\lambda_2 = 0$, no habría cónica).

b1) Caso en que $b_1 \neq 0$.

Partimos de $\overline{X}`^t B \overline{X}` = 0$ con $B = \begin{pmatrix} a_{00} & b_1 & b_2 \\ b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, es decir,

$$a_{00} + \lambda_2 y`^2 + 2b_1 x` + 2b_2 y` = 0.$$

Agrupando términos y completando cuadrados se obtiene:

$$a_{00} + 2b_1 x` + \lambda_2 (y`^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2} y` + \frac{b_2^2}{\lambda_2^2}) - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0 \iff a_{00} + 2b_1 x` + \lambda_2 (y` + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0$$

$$\iff \lambda_2 (y` + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 + 2b_1 (x` + \frac{a_{00}}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2b_1\lambda_2}) = 0.$$

Efectuamos la traslación de ecuaciones $\begin{cases} x`` = x` + \dfrac{a_{00}}{2b_1} - \dfrac{b_2^2}{2b_1\lambda_2} \\ y`` = y` + \dfrac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ x` \\ y` \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{00}}{2b_1} + \dfrac{b_2^2}{2b_1\lambda_2} & 1 & 0 \\ -\dfrac{b_2}{\lambda_2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x`` \\ y`` \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ x` \\ y` \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ x`` \\ y`` \end{pmatrix}$$

, siendo T_2 la matriz de la traslación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\lambda_2 y``^2 + 2b_1 x`` = 0}$$

ó bien:

$$\overline{X}``^t C_2 \overline{X}`` = 0$$

$$\text{con } C_2 = T_2^t B T_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

b2) Caso en que $b_1 = 0$.

Partimos de $\overline{X}`^t B \overline{X} = 0$ con $B = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, es decir,

$$a_{00} + 2b_2 y` + \lambda_2 y`^2 = 0.$$

Agrupando términos y completando cuadrados, se obtiene:

$$a_{00} + \lambda_2 (y`^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2} y`) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{00} + \lambda_2 (y` + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_2 (y` + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + a_{00} = 0.$$

Efectuamos la traslación de ecuaciones $\begin{cases} x`` = x` \\ y`` = y` + \dfrac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x` \\ y` \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{b_2}{\lambda_2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x`` \\ y`` \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x` \\ y` \end{pmatrix} = T_3 \begin{pmatrix} 1 \\ x`` \\ y`` \end{pmatrix}$$, siendo T_3 la matriz de la traslación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\lambda_2 y``^2 + d = 0}$$

siendo $d = a_{00} - \dfrac{b_2^2}{\lambda_2}$, ó bien:

$$\overline{X}``^t C_3 \overline{X}`` = 0$$

$$\text{con } C_3 = T_3^t B T_3 = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Invariantes de la cónica

Un invariante de la cónica es una expresión formada por coeficientes de su ecuación que no haya variado al efectuar el cambio de sistema de referencia anteriormente descrito.
Son invariantes de la cónica:

1) $A_{00}=\left|A_c\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}$. En efecto:

Por ser A_c y $B_c=P^tA_cP$ matrices semejantes, tienen el mismo determinante, luego:
$A_{00}=B_{00}$. Pero, $B_{00}=C_{00}=\lambda_1\lambda_2$.
Por tanto, $A_{00}=B_{00}=C_{00}$.

2) $|A|=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}$. En efecto:

Las matrices A y $B=\overline{P}^tA\overline{P}$ son semejantes, luego, tienen el mismo determinante $|A|=|B|$.

Por otra parte: $|B|=\left|T_i^tBT_i\right|=\left|C_i\right|$, ya que $\left|T_i\right|=\left|T_i^t\right|=1$, para i = 1, 2, 3.

Habiéndose probado que $|A|=|B|=\left|C_i\right|$, para i = 1, 2, 3.

3) $\text{Traza}(A_c)=\text{Tr } A_c=a_{11}+a_{22}$. En efecto:

Por ser semejantes las matrices A_c y B_c , tienen la misma traza $\text{Tr } A_c=\text{Tr } B_c$.
Además era $\text{Tr } B_c=\lambda_1+\lambda_2=\text{Tr } (C_i)_c$, para i = 1, 2, 3.
Por tanto, $\text{Tr } A_c=\text{Tr } B_c=\text{Tr } (C_i)_c$, para i = 1, 2, 3.

4) $A_{11}+A_{22}=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{02} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{01} & a_{11}\end{vmatrix}$ es invariante mediante el giro y mediante la traslación T_3, es decir, cuando $b_1 = 0$.

Veámoslo:
Las matrices A y B son semejantes, luego, $A_{00}+A_{11}+A_{22}=B_{00}+B_{11}+B_{22}$. Pero, era $A_{00}=B_{00}$, de donde se deduce que $A_{11}+A_{22}=B_{11}+B_{22}$.
Por ser $b_1 = 0$, se verifica: $B_{11}+B_{22}=a_{00}\lambda_2-b_2^2=\lambda_2 d=C_{11}+C_{22}$; teniéndose ya que $A_{11}+A_{22}=B_{11}+B_{22}=C_{11}+C_{22}$.

Clasificación de las cónicas

Esquemáticamente, al efectuar el giro y la correspondiente traslación de ejes, la matriz de la cónica ha ido variando de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} a_{00} & b_1 & b_2 \\ b_1 & \lambda_1 & 0 \\ b_2 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow[\lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0]{T_1} C_1 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[\lambda_1=0,b_1\neq 0]{T_2} C_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[\lambda_1=b_1=0]{T_3} C_3 = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Utilizando los invariantes anteriores, se obtiene la siguiente clasificación:

Caso 1: $A_{00} > 0$

$A_{00} = \lambda_1\lambda_2 > 0$, la cónica es de **tipo elíptico**: $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$, con λ_1 y λ_2 del mismo signo.

Caso 1a : $|A| = 0$

$|A| = k\lambda_1\lambda_2 = 0$, luego k = 0. Se trata de **un punto ó dos rectas imaginarias** que se cortan en él.

Caso 1b : $|A| \neq 0$

$|A| = k\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, luego $k \neq 0$.

a) Si k, λ_1 **y** λ_2 son del mismo signo, es una **elipse imaginaria**.
Esto ocurre si y solo si $(\lambda_1 + \lambda_2)(k\lambda_1\lambda_2) > 0$, es decir, cuando $(a_{11} + a_{22})|A| > 0$.

b) Si k y λ_1 **,** λ_2 tienen distinto signo, es una **elipse real**.
Esto ocurre si y solo si $(a_{11} + a_{22})|A| < 0$.

Caso 2: $A_{00} < 0$

$A_{00} = \lambda_1\lambda_2 < 0$, la cónica es de **tipo hiperbólico**: $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$, con λ_1 y λ_2 de distinto signo.

Caso 2a : $|A| = 0$

$|A| = k\lambda_1\lambda_2 = 0$, luego k = 0. Se trata de **dos rectas secantes.**

Caso 2b : $|A| \neq 0$

$|A| = k\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, luego $k \neq 0$. La cónica es una **hipérbola**.

Caso 3: $A_{00} = 0$

$A_{00} = \lambda_1\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, la cónica es de **tipo parabólico.**

Caso 3a: $|A| = 0$

$|A| = -\lambda_2 b_1^2 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$; la ecuación reducida queda: $d + \lambda_2\, y``^2 = 0$.

a) Si d = 0, es una **recta doble**. Esto ocurre cuando $A_{11} + A_{22} = d\lambda_2 = 0$

b) Si $d\lambda_2 > 0$**,** son **dos rectas imaginarias**. Ha de ser $A_{11} + A_{22} > 0$.

c) Si $d\lambda_2 < 0$, son **dos rectas paralelas**. Ha de ser $A_{11} + A_{22} < 0$**.**

Caso 3b : $|A| \neq 0$

$|A| = -\lambda_2 b_1^2 \neq 0 \Rightarrow b_1 \neq 0$. Es una **parábola**: $\lambda_2 y``^2 + 2b_1 x`` = 0$.

Resumen:

<table>
<tr><td rowspan="5">$A_{00} \neq 0$</td><td rowspan="5">Cónicas con centro</td><td rowspan="3">$A_{00} > 0$</td><td rowspan="3">Tipo elíptico</td><td rowspan="2">$|A| \neq 0$</td><td>$\text{signo}(a_{11} + a_{22}) \neq \text{signo}|A|$</td><td>Elipse real</td></tr>
<tr><td>$\text{signo}(a_{11} + a_{22}) = \text{signo}|A|$</td><td>Elipse imaginaria</td></tr>
<tr><td>$|A| = 0$</td><td colspan="2">Punto o dos rectas imaginarias que se cortan en un punto</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A_{00} < 0$</td><td rowspan="2">Tipo hiperbólico</td><td>$|A| \neq 0$</td><td colspan="2">Hipérbola</td></tr>
<tr><td>$|A| = 0$</td><td colspan="2">Dos rectas secantes</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$A_{00} = 0$</td><td rowspan="4">Cónicas sin centro Tipo parabólico</td><td colspan="2">$|A| \neq 0$</td><td colspan="3">Parábola</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">$|A| = 0$</td><td>$A_{11} + A_{22} = 0$</td><td colspan="2">Recta doble</td></tr>
<tr><td>$A_{11} + A_{22} > 0$</td><td colspan="2">Dos rectas imaginarias paralelas</td></tr>
<tr><td>$A_{11} + A_{22} < 0$</td><td colspan="2">Dos rectas paralelas</td></tr>
</table>

ELIPSE PARABÓLA HIPÉRBOLA

Cálculo de los coeficientes de la forma canónica

La ecuación de la cónica con el cambio de sistema de referencia, se ha transformado de acuerdo al siguiente esquema:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{01}x+2a_{02}y+a_{00}=0 \begin{cases} \xrightarrow{T_1\circ G} \lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+k=0 \text{ (cónica con centro)} \\ \xrightarrow{T_2\circ G} \lambda_2 y''^2+2b_1x''=0 \text{ (parábola)} \\ \xrightarrow{T_3\circ G} \lambda_2 y''^2+d=0 \text{ (rectas paralelas)} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta los elementos invariantes habidos en el proceso, se tiene:

Caso 1: Cónicas con centro

$\begin{cases} A_{00}=\lambda_1\lambda_2 \\ |A|=k\lambda_1\lambda_2 \\ \mathrm{Tr}\ A_c=\lambda_1+\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow k=\dfrac{|A|}{A_{00}}$, y λ_1, λ_2 pueden obtenerse resolviendo el sistema formado por las dos últimas ecuaciones.

No obstante, λ_1 y λ_2 son también los valores propios de la matriz A_c.

Para las cónicas de tipo elíptico, se toma como λ_1 el valor propio de menor valor absoluto; mientras que para las cónicas de tipo hiperbólico, se toma como λ_1 el valor propio de signo contrario a k, con objeto de que el eje focal coincida con el eje de abscisas x''.

Caso 2: Parábola

$\begin{cases} \mathrm{Tr}\ A_c=a_{11}+a_{22}=\lambda_2 \\ |A|=-b_1^2\,\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2=a_{11}+a_{22} \\ b_1=\pm\sqrt{\dfrac{-|A|}{a_{11}+a_{22}}} \end{cases}$, eligiendo el signo de b_1 contrario al de λ_2, para que el foco esté en el semieje positivo del eje de abscisas x''.

Caso 3: Rectas paralelas

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}\ A_c=a_{11}+a_{22}=\lambda_2 \\ A_{11}+A_{22}=d\,\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2=a_{11}+a_{22} \\ d=\dfrac{A_{11}+A_{22}}{a_{11}+a_{22}} \end{cases}$$

Tanto en este caso como en el anterior, λ_2 es también el valor propio no nulo de la matriz A_c.

Determinación del centro

Definición: Se denomina ***centro*** de una cónica a todo punto del plano respecto del cual la cónica sea simétrica, siempre que dicho punto exista y sea único.

Consideremos la cónica de ecuación:

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$, cuyo centro sea el punto (x_0, y_0).

Efectuemos la traslación de ejes $\begin{cases} x = x^* + x_0 \\ y = y^* + y_0 \end{cases}$.

Respecto al nuevo sistema de referencia, la cónica tiene de ecuación : $a_{11}(x^* + x_0)^2 + 2a_{12}(x^* + x_0)(y^* + y_0) + a_{22}(y^* + y_0)^2 + 2a_{01}(x^* + x_0) + 2a_{02}(y^* + y_0) + a_{00} = 0$ es decir, $a_{00} + 2a_{01}x_0 + 2a_{02}y_0 + a_{11}x_0{}^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0{}^2 + 2(a_{01} + a_{11}x_0 + a_{12}y_0)x^* +$ $2(a_{02} + a_{12}x_0 a_{22}y_0)y^* + a_{11}x^{*2} + a_{22}y^{*2} + 2a_{12}x^* y^* = 0$.

Por la definición de centro, la cónica es simétrica respecto del punto (x_0, y_0) que es el origen del nuevo sistema de referencia, luego han de ser : $\begin{cases} a_{01} + a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = 0 \\ a_{02} + a_{12}x_0 + a_{22}y_0 = 0 \end{cases}$.

El sistema anterior tiene solución única (que será el centro) si y solo si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{00} \neq 0$, es decir, cuando la cónica es de tipo elíptico ó hiperbólico.

Determinación de los ejes de una cónica con centro

Una vez conocido el centro, los ejes son las rectas que pasan por él y son paralelas a los vectores propios asociados a los valores propios λ_1 y λ_2, respectivamente, de la matriz A_c.

Sus pendientes respectivas m_1 y m_2 se calculan, por tanto, de la siguiente manera:

$$(A_c - \lambda I)X = 0 \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\ x + a_{12}\ y = 0 \\ a_{12}\ x + (a_{22} - \lambda_2)\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow m_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}\ ,\ m_2 = \frac{\lambda_2 - a_{22}}{a_{12}} = -\frac{1}{m_2}.$$

Determinación del vértice y del eje de una parábola

Primer método:

Una vez calculados $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$, valores propios de la matriz A_c, y sendos vectores propios $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, el eje de la parábola será paralelo a $\vec{v}_1$ y pasará por el vértice de la misma.

Para calcular dicho vértice, consideramos una recta genérica $y = m_2 x + n$ paralela a $\vec{v}_2$ y calculamos n obligando a que dicha recta corte a la parábola en un único punto (igualando a cero el discriminante de la ecuación de segundo grado que se obtiene al resolver el sistema formado por la ecuación de la recta y la ecuación de la parábola).

Una vez calculada n, el vértice se obtiene como la solución única del sistema arriba mencionado.

Segundo método:

Sea $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}$, de modo que la ecuación de la parábola sea f (x, y) = 0.

Empleando la misma notación que en el párrafo anterior, m_2 es la pendiente de una recta que es tangente a la parábola en el vértice, luego ha de ser $m_2 = y'_x$.
Derivando en la ecuación de la parábola, se obtiene:

$$f'_x(x,y) + f'_y(x,y)y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$$

Por tanto, si (x_0, y_0) es el vértice buscado, ha de ser $m_2 = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$; y ahora ya, el vértice se obtiene como intersección de la recta $f'_x(x,y) + m_2 f'_y(x,y) = 0$ con la parábola f (x, y) = 0.

Es decir, el vértice se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} a_{01} + a_{12}y + a_{11}x + m_2(a_{02} + a_{12}x + a_{22}y) = 0 \\ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \end{cases}$$

Determinación de las asíntotas de una hipérbola

Las asíntotas de una hipérbola son rectas que pasan por el centro de la cónica y tienen de pendiente m, solución de la ecuación:

$$a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = (0).$$

Este último resultado se obtiene de aplicar que, en general, las asíntotas oblicuas a una curva de ecuación y = f(x) tienen de pendiente $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.