Capítulo 1

APLICACIONES LINEALES

1.1 Introducción

El concepto de linealidad es muy intuitivo y aparece en múltiples situaciones de la vida cotidiana. Así, si una persona, efectuando un trabajo "x" percibe un salario f(x), trabajando el doble, por ejemplo, cabe esperar que su salario también se duplique, es decir:

$$f(2x) = 2\ f(x)$$

Si realiza un trabajo extra "y" , sus ingresos serán la suma de los salarios percibidos por ambas ocupaciones:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Las dos propiedades anteriores que van a caracterizar las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, se llaman condiciones de linealidad.

Nos centraremos en el estudio de las aplicaciones lineales de un espacio vectorial en sí mismo, son las llamadas transformaciones lineales o endomorfismos.

Una vez fijada una base en el espacio vectorial, a cada endomorfismo le asociaremos una matriz cuadrada de forma unívoca. Hablaremos indistintamente de un endomorfismo o de su matriz asociada.

Analizaremos bajo qué condiciones existe una base del espacio vectorial tal que la matriz asociada al endomorfismo respecto de dicha base sea una matriz diagonal, con la que es mucho más sencillo operar.

A lo largo del tema, V y V' serán dos espacios vectoriales de tipo finito sobre el mismo cuerpo conmutativo K.

1.2 Definición

Una aplicación $f : V \rightarrow V'$ es una ***aplicación lineal u homomorfismo*** de V en V' cuando verifica las dos condiciones de linealidad siguientes:

1. $f\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = f\left(\vec{x}\right) + f\left(\vec{y}\right), \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

2. $f\left(\lambda \vec{x}\right) = \lambda f\left(\vec{x}\right), \forall \lambda \in K, \forall \vec{x} \in V$

1.2.1 Nota

Ambas condiciones anteriores son equivalentes a la siguiente condición única:

$$f\left(\lambda \vec{x}+\mu \vec{y}\right)=\lambda f\left(\vec{x}\right)+\mu f\left(\vec{y}\right), \forall \lambda,\mu \in K, \forall \vec{x},\vec{y} \in V$$

1.2.2 Nota

Empleando el método de inducción, se demuestra que si f es una aplicación lineal, entonces:

$$f\left(\lambda_1 \vec{x}_1+\cdots+\lambda_p \vec{x}_p\right)=\lambda_1 f\left(\vec{x}_1\right)+\cdots+\lambda_p f\left(\vec{x}_p\right), \forall \lambda_i \in K, \forall \vec{x}_i \in V, i=1,2,\ldots,p$$

Ejemplos

1.3.1 Sean V = V' = K = R, siendo R el conjunto de números reales con su estructura correspondiente en cada caso (de espacio vectorial o de cuerpo). La aplicación $\begin{array}{l} f: R \to R \\ \quad x \to 3x \end{array}$ es lineal.

En efecto, para cualesquiera $x, y \in V$ y $\lambda \in K$, se verifican las dos condiciones:

$$f(x+y)=3(x+y)=3x+3y=f(x)+f(y)$$
$$f(\lambda x)=3(\lambda x)=\lambda(3x)=\lambda f(x)$$

1.3.2 Sean de nuevo, V = V' = K = R. La aplicación $\begin{array}{l} f: R \to R \\ \quad x \to x^2 \end{array}$ no es lineal.

De hecho no cumple ninguna de las dos condiciones de linealidad:

$$\begin{cases} f(x+y)=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy \\ f(x)+f(y)=x^2+y^2 \end{cases}$$

Luego, en general, $f(x+y)\neq f(x)+f(y)$.

$$\begin{cases} f(\lambda x)=(\lambda x)^2=\lambda^2 x^2 \\ \lambda f(x)=\lambda x^2 \end{cases}$$

Por tanto, $f(\lambda x)\neq \lambda f(x)$, salvo para $\lambda=0$, $\lambda=\pm 1$ ó $x=0$.

1.3.3 Sean $V = R^2$, $V' = R^3$ y $K = R$. La aplicación $\begin{array}{c} f : R^2 \to R^3 \\ \vec{x} = (x, y) \to (2x, 0, y - x) \end{array}$ es lineal.

En efecto, si $\vec{x} = (x, y)$, $\vec{y} = (x', y')$, se verifica:

$$f\left(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}\right) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') = (2(\lambda x + \mu x'), 0, \lambda y + \mu y' - (\lambda x + \mu x')) =$$

$$\lambda(2x, 0, y - x) + \mu(2x', 0, y' - x') = \lambda f\left(\vec{x}\right) + \mu f\left(\vec{y}\right)$$

1.3.4 Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Sean F y G subespacios suplementarios de V, es decir, $F \oplus G = V$.

Cada vector $\vec{x}$ de V se descompone de forma única $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ con $\vec{x}_1 \in F$, $\vec{x}_2 \in G$.

Veamos que la aplicación

$$\begin{array}{c} p : V \to V \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \to \vec{x}_1 \end{array}$$

llamada ***proyección vectorial*** de V sobre F según la dirección de G, es lineal.

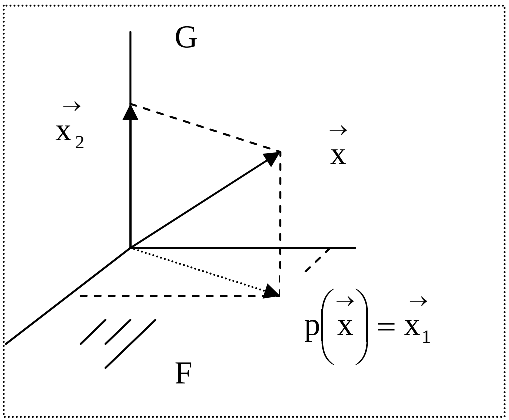

Fig. 1.1 Proyección vectorial

Supongamos que también es $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$ con $\vec{y}_1 \in F$, $\vec{y}_2 \in G$; entonces:

$$\begin{cases} p\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=p\left(\left(\vec{x}_1+\vec{y}_1\right)+\left(\vec{x}_2+\vec{y}_2\right)\right)=\vec{x}_1+\vec{y}_1=p\left(\vec{x}\right)+p\left(\vec{y}\right) \\ p\left(\lambda\vec{x}\right)=p\left(\lambda\vec{x}_1+\lambda\vec{x}_2\right)=\lambda\vec{x}_1=\lambda p\left(\vec{x}\right) \end{cases}$$

1.3.5 Bajo las mismas hipótesis del ejemplo anterior, la aplicación

$$s:V\to V$$
$$\vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2\to\vec{x}_1-\vec{x}_2$$

llamada ***simetría vectorial*** respecto de F según la dirección de G, es lineal.

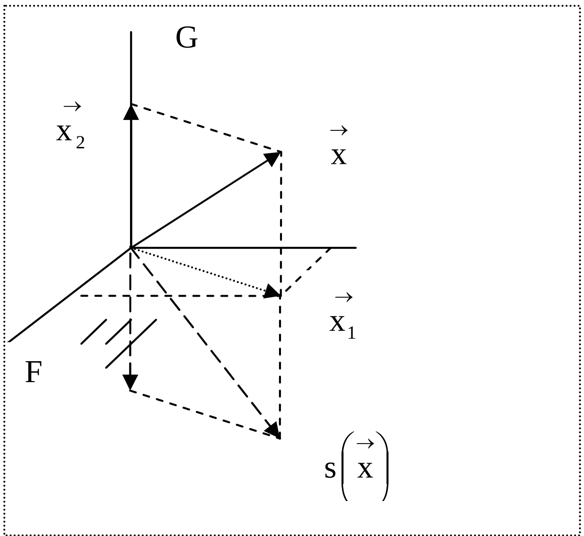

Fig. 1.2 Simetría vectorial

Probémoslo:

$$s\left(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\right)=s\left(\lambda\left(\vec{x}_1+\vec{x}_2\right)+\mu\left(\vec{y}_1+\vec{y}_2\right)\right)=s\left(\left(\lambda\vec{x}_1+\mu\vec{y}_1\right)+\left(\lambda\vec{x}_2+\mu\vec{y}_2\right)\right)=$$
$$\left(\lambda\vec{x}_1+\mu\vec{y}_1\right)-\left(\lambda\vec{x}_2+\mu\vec{y}_2\right)=\lambda\left(\vec{x}_1-\vec{x}_2\right)+\mu\left(\vec{y}_1-\vec{y}_2\right)=\lambda s\left(\vec{x}\right)+\mu s\left(\vec{y}\right)$$

1.4 Tipos de homomorfismos

1.4.1 Definición

Sea f una aplicación lineal de V en V'.

Si V = V', f es una ***transformación lineal o endomorfismo*** de V

f es un ***monomorfismo*** cuando es inyectiva

f es un ***epimorfismo*** cuando es suprayectiva.

f es un ***isomorfismo*** cuando es biyectiva.

Si f es biyectiva y V = V', f es un ***automorfismo***.

Ejemplo

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n. Sea B una base de V. La aplicación

$$f : V \to K^n$$

$$\vec{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_B \to (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

es un isomorfismo, siendo $(x_1, x_2, \cdots, x_n)_B$ las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B.

La demostración se deja como ejercicio.

Debido a este isomorfismo, se "identifican" con frecuencia los espacios vectoriales de dimensión n con K^n y se hace equivaler cada vector $\vec{v}$ con sus coordenadas respecto de una determinada base B.

1.5 Consecuencias de la definición de aplicación lineal

1. $f\left(\vec{0}_V\right) = \vec{0}_{V'}$

2. $f\left(-\vec{x}\right) = -f\left(\vec{x}\right), \forall \vec{x} \in V$

Demostración

1. Por ser f lineal, se verifica

$$f\left(\vec{0}_V\right) = f\left(\vec{0}_V + \vec{0}_V\right) = f\left(\vec{0}_V\right) + f\left(\vec{0}_V\right)$$

Restando $f\left(\vec{0}_V\right)$ en ambos miembros, se obtiene por fin que $f\left(\vec{0}_V\right) = \vec{0}_{V'}$.

2. Para demostrar que los vectores $f\left(-\vec{x}\right)$ y $f\left(\vec{x}\right)$ son opuestos, comprobemos que al sumarlos se obtiene el vector $\vec{0}_{V'}$:

$$f\left(-\vec{x}\right) + f\left(\vec{x}\right) = f\left(-\vec{x} + \vec{x}\right) = f\left(\vec{0}_V\right) = \vec{0}_{V'}$$

aplicando que f es lineal y la consecuencia 1 recién demostrada.

A partir de este momento, escribiremos $\vec{0}$ para referirnos tanto a $\vec{0}_V$ como a $\vec{0}_{V'}$.

1.6 Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Podemos asociar a cada aplicación lineal f sendos subespacios vectoriales de V y V' respectivamente, que juegan un papel importante en el estudio de la aplicación; son los llamados núcleo e imagen de f.

1.6.1 Definición

Llamamos ***núcleo*** de la aplicación lineal $f : V \to V'$, y lo representamos por $N(f)$, al sistema de vectores de V cuya imagen es el $\vec{0}$. Es decir,

$$N(f) = \left\{ \vec{x} \in V / f\left(\vec{x}\right) = \vec{0} \right\}$$

La ***imagen*** de f, en cambio, es el sistema de vectores de V' que son imagen de algún vector de V. Lo representamos por $Im(f)$:

$$Im(f) = \left\{ \vec{y} \in V' / \exists \vec{x} \in V \text{ con } f\left(\vec{x}\right) = \vec{y} \right\}$$

Ejemplos:

Busquemos el núcleo y la imagen de algunas de las aplicaciones lineales expuestas anteriormente como ejemplos tras la definición de homomorfismo.

Núcleo e imagen de la aplicación del ejemplo 1.3.1:

$$\begin{aligned} f : R &\to R \\ x &\to 3x \end{aligned}$$

Por definición de núcleo, $x \in N(f)$ si y sólo si $f(x) = 3x = 0$; es decir, si y sólo si $x = 0$.
Luego, $N(f) = \{0\}$.

Para todo $y \in R$, se verifica que $y = f\left(\frac{y}{3}\right)$, luego, $Im(f) = R$

Otra formar para hallar la imagen de f es usar el siguiente resultado (proposición 1.11) que demostraremos más adelante:

$$\dim V = \dim N(f) + \dim Im(f)$$

Así, aplicándolo a este ejemplo concreto, se obtiene:

$$\dim R = \dim N(f) + \dim Im(f) \Leftrightarrow 1 = 0 + \dim Im(f)$$

Por tanto, $\dim \operatorname{Im}(f) = 1$ e $\operatorname{Im}(f) = R$.

Núcleo e imagen de la aplicación del ejemplo 1.3.4 (proyección de V sobre F según la dirección de G):

$$p : V \to V$$
$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \to \vec{x}_1$$

Un vector $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in V = F \oplus G$ pertenece a $N(p)$ si y sólo si $p\left(\vec{x}\right) = \vec{x}_1 = \vec{0}$. Ha de ser entonces $\vec{x} = \vec{0} + \vec{x}_2 = \vec{x}_2 \in G$. Luego, $N(p) = G$.

En cambio, $\operatorname{Im}(p) = F$ ya que:

$\operatorname{Im}(p) \subset F$ por la propia definición de p, y, si $\vec{x} \in F$, entonces $\vec{x} = p\left(\vec{x} + \vec{0}\right) \in \operatorname{Im}(p)$, luego, también $F \subset \operatorname{Im}(p)$.

Consideremos ahora el ejemplo 1.3.5 de la simetría vectorial s respecto de F según la dirección de G:

$$s : V \to V$$
$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \to \vec{x}_1 - \vec{x}_2$$

Se verifica que

$s\left(\vec{x}\right) = s\left(\vec{x}_1 + \vec{x}_2\right) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2 \Leftrightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \vec{0}$, ya que al ser F y G subespacios suplementarios, $F \cap G = \vec{0}$. Por tanto, ha de ser $\vec{x} = \vec{0}$ y $N(s) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Para todo $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in V$, es $\vec{x} = s\left(\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right)$, luego, $\operatorname{Im}(s) = V$,

1.7 Propiedades de las aplicaciones lineales

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Se verifican las siguientes propiedades:

1.7.1 Si F es un subespacio vectorial de V, entonces $f(F)$ es un subespacio vectorial de V'.

Demostración

Sean $\vec{x}', \vec{y}'$ vectores de $f(F)$. Existen entonces vectores $\vec{x}, \vec{y}$ de F tales que $f\left(\vec{x}\right) = \vec{x}'$ y $f\left(\vec{y}\right) = \vec{y}'$. Sean λ, μ escalares de K. Por ser f lineal se verifica:

$$\lambda \vec{x}' + \mu \vec{y}' = \lambda f\left(\vec{x}\right) + \mu f\left(\vec{y}\right) = f\left(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}\right)$$

Como F es un subespacio vectorial de V, el vector $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$ pertenece a F, luego, su imagen $\lambda \vec{x}' + \mu \vec{y}'$ pertenece a $f(F)$. Está probado pues que $f(F)$ es un subespacio vectorial de V'.

1.7.2 Si G es un subespacio vectorial de V' , entonces $f^{-1}(G)$ es un subespacio vectorial de V.

Demostración

Sean $\vec{x}, \vec{y}$ vectores de $f^{-1}(G)$. Sus imágenes $f\left(\vec{x}\right), f\left(\vec{y}\right)$ son vectores de G. Sean λ, μ escalares de K. Por ser G un subespacio vectorial de V', se verifica que $\lambda f\left(\vec{x}\right) + \mu f\left(\vec{y}\right) \in G$.

Como f es lineal, lo anterior es equivalente a escribir $f\left(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}\right) \in G$. Luego, $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in f^{-1}(G)$. Por tanto, $f^{-1}(G)$ es un subespacio vectorial de V.

1.7.3 El núcleo de f es un subespacio vectorial de V.

Demostración

Por definición, es $N(f) = f^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right)$. Como $\left\{\vec{0}\right\}$ es un subespacio vectorial de V', aplicando la propiedad 1.7.2, se obtiene que $N(f)$ es un subespacio vectorial de V.

1.7.4 La imagen de f es un subespacio vectorial de V'.

Demostración

Por definición, es $\mathrm{Im}(f) = f(V)$. Como V es un subespacio vectorial de V, aplicando la propiedad 1.7.1, se obtiene que $\mathrm{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de V'.

1.7.5 Si S es un sistema generador de V, entonces, $f(S)$ es un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$.

Demostración

Sea $S=\left\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p\right\}$ un sistema generador de V. Sea $\vec{y}\in \mathrm{Im}(f)$. Existe un vector $\vec{x}\in V$ tal que $f\left(\vec{x}\right)=\vec{y}$. Como S engendra V, existen escalares $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ tales que $\vec{x}=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\dots+\lambda_p\vec{x}_p$. Así, aplicando que f es lineal, se tiene que

$$\vec{y}=f\left(\vec{x}\right)=f\left(\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\dots+\lambda_p\vec{x}_p\right)=\lambda_1 f\left(\vec{x}_1\right)+\lambda_2 f\left(\vec{x}_2\right)+\dots+\lambda_p f\left(\vec{x}_p\right)$$

Luego, cualquier vector $\vec{y}$ de $\mathrm{Im}(f)$ es combinación lineal de los vectores $f\left(\vec{x}_1\right),f\left(\vec{x}_2\right),\dots,f\left(\vec{x}_p\right)$ y, consecuentemente $f(S)$ es un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$.

1.7.6 Si S es un sistema ligado de V, entonces, $f(S)$ es un sistema ligado de V'.

Demostración

Sea $S=\left\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p\right\}$ un sistema ligado de V. Existen entonces escalares $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ no todos nulos tales que $\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\dots+\lambda_p\vec{x}_p=\vec{0}$. Usando que f es lineal, se obtiene:

$$f\left(\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\dots+\lambda_p\vec{x}_p\right)=\lambda_1 f\left(\vec{x}_1\right)+\lambda_2 f\left(\vec{x}_2\right)+\dots+\lambda_p f\left(\vec{x}_p\right)=f\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$$

Luego $f(S)=\left\{f\left(\vec{x}_1\right),f\left(\vec{x}_2\right),\dots,f\left(\vec{x}_p\right)\right\}$ es ligado.

1.7.7 Si S' es un sistema libre de V', entonces, $f^{-1}(S')$ es un sistema libre de V.

Demostración

Sea S' un sistema libre de V'. Si $f^{-1}(S')$ fuera ligado, existiría un vector $\vec{x}\in f^{-1}(S')$ que sería combinación lineal de ciertos vectores $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p$ de $f^{-1}(S')$.

Es decir, existirían escalares $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ de K tales que $\vec{x}=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\dots+\lambda_p\vec{x}_p$. Así, $f\left(\vec{x}\right)=f\left(\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\dots+\lambda_p\vec{x}_p\right)=\lambda_1 f\left(\vec{x}_1\right)+\lambda_2 f\left(\vec{x}_2\right)+\dots+\lambda_p f\left(\vec{x}_p\right)$.

Luego, $f\left(\vec{x}\right)$ sería combinación lineal de $f\left(\vec{x}_1\right), f\left(\vec{x}_2\right), \ldots, f\left(\vec{x}_p\right)$, perteneciendo estos $p+1$ vectores a S' que era un sistema libre.
Hemos llegado al absurdo suponiendo que $f^{-1}(S')$ era ligado. En consecuencia, $f^{-1}(S')$ es libre.

1.8 Corolario

Si $B=\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\right\}$ es una base de V, puede obtenerse una base de $\operatorname{Im}(f)$ a partir del sistema de vectores de V', $f(B)=\left\{f\left(\vec{x}_1\right), f\left(\vec{x}_2\right), \ldots, f\left(\vec{x}_n\right)\right\}$, eliminando del mismo los vectores que sean combinación lineal de los demás.

Este resultado es una consecuencia inmediata de la propiedad 1.8.5, ya que cualquier base de V es por definición un sistema generador de V.

A partir de la siguiente proposición, observemos cómo las imágenes de los vectores de una base de V determinan de forma única la aplicación lineal.

1.9 Proposición

Una aplicación lineal queda determinada si se conocen las imágenes de los vectores de una base. Es más:

Sea $B=\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\right\}$ una base del espacio vectorial V. Sea $S=\left\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n\right\}$ un sistema cualquiera de vectores del espacio vectorial V'.

Existe una única aplicación lineal $f: V \rightarrow V'$ tal que $f\left(\vec{x}_i\right)=\vec{y}_i,\ i=1, \ldots, n$.

Demostración

Para cada vector $\vec{x}=\lambda_1 \vec{x}_1+\lambda_2 \vec{x}_2+\ldots+\lambda_n \vec{x}_n$ de V, con $\lambda_i \in K,\ i=1, \ldots, n$, definimos:

$$f\left(\vec{x}\right)=\lambda_1 \vec{y}_1+\lambda_2 \vec{y}_2+\ldots+\lambda_n \vec{y}_n$$

Se verifica:

1. $f\left(\vec{x}_i\right)=\vec{y}_i,\ i=1,\dots,n$, por la propia definición de f.

2. f es lineal:

Sean $\vec{x},\vec{z}\in V$ y $\lambda,\mu\in K$. Por ser B una base de V, existen escalares $\lambda_i,\mu_i\in K, i=1,\dots,n$, tales que $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\vec{x}_i$ y $\vec{z}=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\,\vec{x}_i$.

Así, $\lambda\,\vec{x}+\mu\,\vec{z}=\sum_{i=1}^{n}(\lambda\,\lambda_i+\mu\,\mu_i)\vec{x}_i$, y, por definición de f se tiene que

$$f\left(\lambda\,\vec{x}+\mu\,\vec{z}\right)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda\,\lambda_i+\mu\,\mu_i)\vec{y}_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\vec{y}_i+\mu\sum_{i=1}^{n}\mu_i\,\vec{y}_i=\lambda f\left(\vec{x}\right)+\mu f\left(\vec{z}\right)$$

Luego, f es lineal.

3. f es única:

Sea $g:V\to V'$ otra aplicación lineal tal que $g\left(\vec{x}_i\right)=\vec{y}_i,\ i=1,\dots,n$. Para cualquier vector $\vec{x}=\lambda_1\,\vec{x}_1+\lambda_2\,\vec{x}_2+\dots+\lambda_n\,\vec{x}_n$ de V, con $\lambda_i\in K,\ i=1,\dots,n$, por ser g lineal, se verifica que

$$g\left(\vec{x}\right)=\lambda_1 g\left(\vec{x}_1\right)+\lambda_2 g\left(\vec{x}_2\right)+\dots+\lambda_n g\left(\vec{x}_n\right)=\lambda_1\,\vec{y}_1+\lambda_2\,\vec{y}_2+\dots+\lambda_n\,\vec{y}_n=f\left(\vec{x}\right)$$

por la propia definición de f.

Probemos ahora un par de resultados relativos a los subespacios núcleo e imagen de f, al segundo de los cuales nos hemos referido ya anteriormente.

$\boxed{1.10}$ Proposición

Una aplicación lineal f de V en V' es inyectiva si y sólo si $N(f)=\left\{\vec{0}\right\}$.

Demostración

$[\Rightarrow]$ Condición necesaria:

Supongamos que f es inyectiva. Si existiera un vector $\vec{x} \in N(f)$ tal que $\vec{x} \neq \vec{0}$, tendríamos dos vectores diferentes con la misma imagen, $f\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$, lo cual es absurdo ya que, por hipótesis, f es inyectiva. Por tanto, $N(f) = \left\{\vec{0}\right\}$.

[⇐] Condición suficiente:

Supongamos ahora que $N(f) = \left\{\vec{0}\right\}$. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in V$ tales que $f\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{y}\right)$. Por ser f lineal, $f\left(\vec{x} - \vec{y}\right) = f\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{y}\right) = \vec{0}$. Luego $\vec{x} - \vec{y} \in N(f)$. Consecuentemente, por hipótesis, $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$, es decir $\vec{x} = \vec{y}$. Y está probado que f es inyectiva.

$\boxed{1.11}$ Proposición

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Se verifica que $\dim V = \dim N(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$.

Demostración

Supongamos que $\dim V = n$ y que $\dim N(f) = p$. Sea $B_N = \left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\right\}$ una base de $N(f)$. Completamos B_N hasta obtener una base B de V, $B = \left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p, \vec{x}_{p+1}, \ldots, \vec{x}_n\right\}$.

Demostremos que $B_I = \left\{f\left(\vec{x}_{p+1}\right), \ldots, f\left(\vec{x}_n\right)\right\}$ es una base de $\operatorname{Im}(f)$. En efecto:

Sea $\vec{y} \in \operatorname{Im}(f)$. Sea $\vec{x} \in V$ tal que $f\left(\vec{x}\right) = \vec{y}$.

Por ser B una base de V, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{x}_n$.

Como f es lineal, se tiene que $f\left(\vec{x}\right) = \lambda_1 f\left(\vec{x}_1\right) + \lambda_2 f\left(\vec{x}_2\right) + \ldots + \lambda_p f\left(\vec{x}_p\right) + \ldots + \lambda_n f\left(\vec{x}_n\right)$.

Pero, por ser $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ vectores de $N(f)$, sus imágenes mediante f son el vector $\vec{0}$, luego $\vec{y} = f\left(\vec{x}\right) = \lambda_{p+1} f\left(\vec{x}_{p+1}\right) + \ldots + \lambda_n f\left(\vec{x}_n\right)$.

Queda así demostrado que B_I engendra $\operatorname{Im}(f)$.

Veamos ahora que B_I es libre.

Si $\alpha_{p+1} f\left(\vec{x}_{p+1}\right) + \ldots + \alpha_n f\left(\vec{x}_n\right) = \vec{0}$, como f es lineal, se tendrá que

$$f\left(\alpha_{p+1}\vec{x}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n\right) = \vec{0}.$$

Luego, el vector $\alpha_{p+1}\vec{x}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n \in N(f)$ y se puede escribir como combinación lineal de los vectores de B_N:

$$\alpha_{p+1}\vec{x}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n = \beta_1 \vec{x}_1 + \ldots + \beta_p \vec{x}_p$$

es decir, $\beta_1 \vec{x}_1 + \ldots + \beta_p \vec{x}_p - \alpha_{p+1}\vec{x}_{p+1} - \ldots - \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}$.

Así, $\beta_1 = \ldots = \beta_p = \alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_n = 0$, por ser B una base de V y, por tanto, un sistema libre.

Capítulo 2

TRANSFORMACIONES LINEALES

2.1 Introducción

De ahora en adelante, a lo largo del tema consideraremos $V = V'$, con dim $V = n$. Es decir, vamos a estudiar las transformaciones lineales ó endomorfismos de un espacio vectorial V. Empecemos por su expresión analítica.

2.2 Expresión analítica de una transformación lineal

Sea $B = \left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n \right\}$ una base del espacio vectorial V. Si un vector $\vec{x}$ tiene de coordenadas $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ respecto de la base B, ¿cuáles son las coordenadas $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ de $f\left(\vec{x}\right)$ respecto de la base B?

$$f\left(\vec{x}\right) = f\left(x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + ... + x_n \vec{u}_n\right) = x_1 f\left(\vec{u}_1\right) + x_2 f\left(\vec{u}_2\right) + ... + x_n f\left(\vec{u}_n\right), \text{ por ser f lineal.}$$

Supongamos que $f\left(\vec{u}_1\right) = a_{11}\vec{u}_1 + a_{12}\vec{u}_2 + ... + a_{1n}\vec{u}_n$, $f\left(\vec{u}_2\right) = a_{21}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + ... + a_{2n}\vec{u}_n$, ..., $f\left(\vec{u}_n\right) = a_{n1}\vec{u}_1 + a_{n2}\vec{u}_2 + ... + a_{nn}\vec{u}_n$, para ciertos $a_{ij} \in K$, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,n$.

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} f\left(\vec{x}\right) = {} & x_1\left(a_{11}\vec{u}_1 + a_{12}\vec{u}_2 + ... + a_{1n}\vec{u}_n\right) + x_2\left(a_{21}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + ... + a_{2n}\vec{u}_n\right) + ... + \\ & x_n\left(a_{n1}\vec{u}_1 + a_{n2}\vec{u}_2 + ... + a_{nn}\vec{u}_n\right) = \\ & (x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + ... + x_n a_{n1})\vec{u}_1 + (x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + ... + x_n a_{n2})\vec{u}_2 + ... + \\ & (x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + ... + x_n a_{nn})\vec{u}_n \end{aligned}$$

Por tanto, $\begin{cases} y_1 = x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ldots + x_n a_{n1} \\ y_2 = x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{n2} \\ \quad\quad \ldots \\ y_n = x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \ldots + x_n a_{nn} \end{cases}$; éstas son las ecuaciones ó la expresión analítica de f respecto de la base B.

Conociendo $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_B$, las ecuaciones anteriores permiten calcular $f\left(\vec{x}\right) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)_B$.

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ f\left(\vec{x}\right)_B \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f\left(\vec{u}_1\right)_B & f\left(\vec{u}_2\right)_B & \ldots & f\left(\vec{u}_n\right)_B \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \vec{x}_B \end{array}$$

es decir, $f\left(\vec{x}\right)_B = A \cdot \vec{x}_B$, siendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$.

A la matriz A se la llama ***matriz asociada a f respecto de la base B***; se escribe $A = M(f, B)$ y tiene por columnas a las imágenes de los vectores de la base B expresadas en la misma base B.

Ejemplo

2.3. Consideremos el espacio vectorial $V = R^2$ sobre el cuerpo K = R.

Sea $\begin{array}{l} f: R^2 \to R^2 \\ \vec{x} = (x, y) \to f\left(\vec{x}\right) = (2x, y - 3x) = (x', y') \end{array}$

La matriz A asociada a f respecto de la base canónica tendrá por vectores columna:

$$\vec{c}_1 = f(1,0) = (2,-3)$$
$$\vec{c}_2 = f(0,1) = (0,1)$$

Es decir, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Y dado, por ejemplo, el vector $\vec{x} = (1,2)$, ¿quién será $f\left(\vec{x}\right)$?

$f\left(\vec{x}\right) = A\,\vec{x}$, es decir, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Luego $f\left(\vec{x}\right) = (2,-1)$.

Cabe observar que cuando la base que manejamos es la canónica , se puede proceder de otra forma muy sencilla para el cálculo de A :

Es claro que $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y - 3x \end{cases}$ por definición de f; lo que es equivalente a escribir:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Así, $f\left(\vec{x}\right) = A\,\vec{x}$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Una vez escrita la aplicación f en esta forma, podríamos haber demostrado que f era lineal de una manera muy sencilla:

Si $\vec{x} = (x,y)$ y $\vec{x}' = (x',y')$ son vectores cualesquiera de R^2 y $\lambda,\mu \in R$, aplicando las propiedades de las operaciones con matrices, se tiene que:

$$f\left(\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y}\right) = A\left(\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y}\right) = A\left(\lambda\,\vec{x}\right) + A\left(\mu\,\vec{y}\right) = \lambda\left(A\,\vec{x}\right) + \mu\left(A\,\vec{y}\right) = \lambda f\left(\vec{x}\right) + \mu f\left(\vec{y}\right).$$

$\boxed{2.4}$ Proposición

Siguiendo con la misma notación que en la expresión analítica de una transformación lineal f, se verifica:

1. Los vectores columna de A son un sistema generador de Im(f)
2. La dimensión de Im(f) coincide con el rango de A.

Demostración

1. Por la quinta propiedad de las aplicaciones lineales, la imagen de un sistema generador de V es un sistema generador de Im(f). Pero, los vectores columna de A son precisamente las imágenes de los vectores de la base B, que por definición es un sistema generador de V.

2. La dimensión de Im(f) es, por el apartado anterior, el número de vectores columna linealmente independientes de A, es decir, coincide con el rango de A por el teorema del rango.

Ejemplo

Hallar el núcleo y la imagen de la transformación lineal del ejemplo 2.3,

$$f : R^2 \to R^2$$
$$\vec{x} = (x, y) \to (2x, y - 3x)$$

$N(f) = \left\{ \vec{x} \in R^2 \ / \ f\left(\vec{x}\right) = \vec{0} \right\}$; pero, $f\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$ si y solo si $A\vec{x} = \vec{0}$.

Luego, para hallar el núcleo de f hay que resolver el sistema homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por ser $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, el sistema anterior solo admite la solución trivial y $N(f) = \left\{ \vec{0} \right\}$.

$Im(f) = \langle \text{vectores columna de A} \rangle = \langle (2,-3), (0,1) \rangle$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, dichos vectores columna son linealmente independientes e $Im(f) = R^2$.

También podríamos haber obtenido este último resultado teniendo en cuenta que $\dim R^2 = \dim N(f) + \dim Im(f)$.

$\boxed{2.6}$ Relación entre transformaciones lineales y matrices

Dada una transformación lineal $f : V \to V$, una vez fijada una base B de V, podemos asociar a f, una matriz $A \in M_n(K)$ que determina f de forma única, $A = M(f, B)$.

Recíprocamente, dada una matriz $A \in M_n(K)$, podemos construir el endomorfismo $f : K^n \to K^n$ tal que $A = M(f, B_C)$, siendo B_C la base canónica de K^n.
Dicho endomorfismo es único ya que queda determinado por las imágenes de los vectores de la base canónica, es decir, por los vectores columna de A.
Por tanto, una vez fijada una base B de V, referirnos a f ó a $A = M(f, B)$, es equivalente. Si no se dice lo contrario la base B será la canónica.

2.7 Operaciones entre transformaciones lineales

Sea $L(V) = \{f : V \to V \,/\, f \text{ es lineal}\}$. Sean $f, g \in L(V)$ y $\lambda \in K$. Sea B una base de V.

1. Definimos la suma de f y g como la aplicación $f + g : V \to V$ tal que $(f+g)\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}\right) + g\left(\vec{x}\right), \forall \vec{x} \in V$. Se verifica:

- **a.** f + g es una transformación lineal de V
- **b.** $M(f+g, B) = M(f, B) + M(g, B)$
- **c.** $(L(V), +)$ es un grupo conmutativo.

Demostración

a.

$$(f+g)\left(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\right) = f\left(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\right) + g\left(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\right) = \lambda f\left(\vec{x}\right) + \mu f\left(\vec{y}\right) + \lambda g\left(\vec{x}\right) + \mu g\left(\vec{y}\right) =$$

$$\lambda\left(f\left(\vec{x}\right) + g\left(\vec{x}\right)\right) + \mu\left(f\left(\vec{y}\right) + g\left(\vec{y}\right)\right) = \lambda(f+g)\left(\vec{x}\right) + \mu(f+g)\left(\vec{y}\right), \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \lambda, \mu \in K$$

Hemos aplicado la definición de suma en L(V) y que f y g son lineales.

b. Sean $M_f = M(f, B), M_g = M(g, B)$ y $M_{f+g} = M(f+g, B)$. Se verifica que

$$(f+g)\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}\right) + g\left(\vec{x}\right) = M_f\vec{x} + M_g\vec{x} = \left(M_f + M_g\right)\vec{x}$$

Luego $M_{f+g} = M_f + M_g$.

c. Por ser $(M_n(K), +)$ un grupo conmutativo y teniendo en cuenta la relación entre transformaciones lineales y matrices, se verifica que $(L(V), +)$ es también un grupo conmutativo.

2. Definimos el producto de un escalar λ por un endomorfismo f como la aplicación $\lambda f : V \to V$ tal que $(\lambda f)\left(\vec{x}\right) = \lambda f\left(\vec{x}\right), \forall \vec{x} \in V$. Se verifica:

a. λf es una transformación lineal de V

b. $M(\lambda f, B) = \lambda M(f, B)$

c. $(L(V), +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

Demostración

Se deja como ejercicio por ser análoga a la del apartado anterior.

3. El producto ó composición de los endomorfismos f y g es la aplicación:

$\underbrace{V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V}_{g \circ f}$ tal que $(g \circ f)\left(\vec{x}\right) = g\left(f\left(\vec{x}\right)\right), \forall \vec{x} \in V$. Se verifica:

a. $g \circ f$ es una transformación lineal de V

b. $M(g \circ f, B) = M(g, B) \cdot M(f, B)$

c. $(L(V), +, \circ)$ es un anillo no conmutativo.

Demostración

a. Por la propia definición de $g \circ f$ y por ser f y g lineales, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ y $\forall \lambda, \mu \in K$, se verifica que:

$$(g \circ f)\left(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}\right) = g\left(f\left(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}\right)\right) = g\left(\lambda f\left(\vec{x}\right) + \mu f\left(\vec{y}\right)\right) = \lambda g\left(f\left(\vec{x}\right)\right) + \mu g\left(f\left(\vec{y}\right)\right) =$$
$$\lambda (g \circ f)\left(\vec{x}\right) + \mu (g \circ f)\left(\vec{y}\right)$$

Luego, $g \circ f$ es una transformación lineal de V.

b. Para cada $\vec{x} \in V$, se verifica que:

$$(g \circ f)\left(\vec{x}\right) = g\left(f\left(\vec{x}\right)\right) = M_g f\left(\vec{x}\right) = M_g\left(M_f \vec{x}\right) = \left(M_g M_f\right)\vec{x}$$

Luego, $M_{g \circ f} = M_g \cdot M_f$

c. $(L(V), +, \circ)$ es un anillo no conmutativo por serlo $(M_n(K), +, \cdot)$.

$\boxed{2.8}$ Caracterización de las transformaciones lineales biyectivas

Sea $f : V \to V$ una transformación lineal del espacio vectorial V de dimensión n. Sea B una base de V y $A = M(f, B)$.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es biyectiva
2. f es inyectiva
3. $N(f) = \left\{ \vec{0} \right\}$
4. f es sobreyectiva
5. r(A) = n
6. $|A| \neq 0$
7. La imagen de un sistema libre de V es también un sistema libre de V.

Demostración

$1 \Rightarrow 2$

Por la propia definición de aplicación biyectiva (inyectiva y sobreyectiva).

$2 \Rightarrow 3$

Está probado anteriormente en 1.10 (pág 11) para aplicaciones lineales en general.

$3 \Rightarrow 4$

Por hipótesis, dim N(f) = 0 y dim V = n, luego dim Im(f) = n por verificarse que dim V = dim N(f) + dim Im(f).

Por tanto, Im (f) = V, es decir f es sobreyectiva.

$4 \Rightarrow 5$

Por ser f sobreyectiva, Im(f) = V. En consecuencia, los vectores columna de A son una base de V y por tanto son linealmente independientes. Aplicando el teorema del rango se colige que r(A) = n.

$5 \Rightarrow 6$

Por definición de rango de una matriz.

$6 \Rightarrow 7$

Sea $S = \left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \right\}$ un sistema libre de V.

Si $\lambda_1 f\left(\vec{x}_1\right) + \lambda_2 f\left(\vec{x}_2\right) + \ldots + \lambda_p f\left(\vec{x}_p\right) = \vec{0}$, entonces, por ser f lineal:

$$f\left(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_p \vec{x}_p\right) = \vec{0} \Leftrightarrow A \cdot \left(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_p \vec{x}_p\right) = \vec{0}$$

Por ser $|A| \neq 0$, A es inversible y multiplicando por A^{-1} por la izquierda en los dos miembros de la igualdad anterior, se obtiene: $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}$

Y como S es un sistema libre, se colige que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$, luego $\left\{ f\left(\vec{x}_1\right), f\left(\vec{x}_2\right), \ldots, \lambda_p f\left(\vec{x}_p\right) \right\}$ es libre.

$7 \Rightarrow 1$

Para demostrar que f es biyectiva, probemos que es sobre e inyectiva.

Por hipótesis, los vectores columna de $A = M(f, B)$ son linealmente independientes por ser las imágenes de los vectores de la base B. Así pues, $r(A) = \dim \operatorname{Im}(f) = n$. Por tanto, Im(f) = V, es decir, f es sobreyectiva.

Se verifica que dim N(f) = dim V - dim Im(f) = n –n = 0. Luego, $N(f) = \left\{ \vec{0} \right\}$ y f es inyectiva.

2.9 Cambio de base en una transformación lineal

Sea f una transformación lineal de un espacio vectorial V. Sean B y B’ dos bases distintas de V. Sean las matrices $A = M(f, B)$ y $A' = M(f, B')$.

Buscamos la relación existente entre A y A’ . Sea P la matriz de cambio de base de B’ a B.

En esquema, la situación que tenemos es la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \vec{x}_{B'} & \xrightarrow{A'} & f\left(\vec{x}\right)_{B'} \\ P \downarrow & & \uparrow P^{-1} \\ \vec{x}_B & \xrightarrow[A]{} & f\left(\vec{x}\right)_B \end{array}$$

Por la propia definición de las matrices que intervienen en el esquema anterior, se verifica:

$$f\left(\vec{x}\right)_{B'} = P^{-1} f\left(\vec{x}\right)_B = P^{-1} A \vec{x}_B = P^{-1} A P \vec{x}_{B'}$$

Luego, la relación buscada es:

$$A' = P^{-1} A P$$

Ejemplo

Demostramos en el ejemplo 2.3 que la transformación lineal

$$f : R^2 \to R^2$$

$$\vec{x} = (x, y) \to f\left(\vec{x}\right) = (2x, y - 3x)$$

tiene como matriz asociada respecto de la base canónica a la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Si consideramos ahora la base de R^2, $B = \left\{\vec{u}_1 = (1,1), \vec{u}_2 = (2,0)\right\}$, ¿cuál es la matriz A' asociada a f respecto de esta nueva base B?

$$A' = P^{-1} A\, P$$

siendo P la matriz de cambio de base de B a la base canónica.

Es, por tanto, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene por matriz inversa a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

De esta forma, se tiene que:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz A' podría haberse hallado directamente buscando sus vectores columna:

$$\vec{c}_1 = f\left(\vec{u}_1\right)_B, \quad \vec{c}_2 = f\left(\vec{u}_2\right)_B$$

$$f\left(\vec{u}_1\right) = (2,-2) = -2(1,1) + 2(2,0) = -2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 = (-2,2)_B$$

$$f\left(\vec{u}_2\right) = (4,-6) = -6(1,1) + 5(2,0) = -6\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 = (-6,5)_B$$

2.10 Vectores y subespacios invariantes por una transformación lineal

Sea f una transformación lineal de V.

2.10.1 Definición

Un vector $\vec{x}$ de V es un ***vector invariante*** por (ó de) ***f*** cuando $f\left(\vec{x}\right)=\vec{x}$.

2.10.2 Proposición

El sistema F de vectores invariantes por f es un subespacio vectorial de V, llamado ***subespacio vectorial de vectores invariantes de f.***

Demostración

Sean $\vec{x},\vec{y}\in F$ y $\lambda,\mu\in K$ .Por ser f lineal y ser $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores invariantes por f, se tiene:

$$f\left(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\right)=\lambda f\left(\vec{x}\right)+\mu f\left(\vec{y}\right)=\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$$

Luego $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\in F$ y está probado que F es un subespacio vectorial de V.

2.10.3 Definición

Un subespacio cualquiera F de V decimos que es un ***subespacio invariante por (ó de) f*** cuando $f(F)\subset F$; es decir, si $\vec{x}\in F$, entonces también $f\left(\vec{x}\right)\in F$

2.10.4 Observaciones

1. Si f es biyectiva, F es un subespacio invariante cuando $f(F)=F$.

2. El subespacio de vectores invariantes de f es un subespacio invariante de f.

2.10.5 Proposición

Si F y G son subespacios invariantes de f, entonces:

1. $F\cap G$ es un subespacio invariante de f.

2. F + G es también un subespacio invariante de f.

Demostración

1. Sea $\vec{x} \in F \cap G$. Se verifica entonces que $\vec{x} \in F$ y $\vec{x} \in G$. Así, por ser F y G subespacios invariantes, también $f\left(\vec{x}\right) \in F$ y $f\left(\vec{x}\right) \in G$. Luego, $f\left(\vec{x}\right) \in F \cap G$.

2. Sea $\vec{x} \in F + G$. Es entonces, $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ con $\vec{u} \in F$ y $\vec{v} \in G$. Por ser f lineal se verifica:

$$f\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = f\left(\vec{u}\right) + f\left(\vec{v}\right)$$

Como F y G son subespacios invariantes de f, se tiene que $f\left(\vec{u}\right) \in F$ y $f\left(\vec{v}\right) \in G$. Luego, teniendo en cuenta la igualdad anterior, está probado que $f\left(\vec{x}\right) \in F + G$.

Ejemplos:

$\left\{\vec{0}\right\}$, V, Im(f) y N(f) son subespacios vectoriales invariantes de cualquier transformación lineal f.

2.11.6 Consideremos el endomorfismo de R^3 dado por:

$$f(x, y, z) = (-x + 3y + 6z, -6x + 8y + 16z, 2x - 2y - 4z)$$

La matriz asociada a f respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ -6 & 8 & 16 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Consideremos los vectores $\vec{u}_1 = (0,-2,1), \vec{u}_2 = (3,-2,2), \vec{u}_3 = (1,1,0)$. Calculemos sus imágenes:

$$f\left(\vec{u}_1\right) = (0,0,0) = 0 \cdot \vec{u}_1$$

$$f\left(\vec{u}_2\right) = (3,-2,2) = 1 \cdot \vec{u}_2$$

$$f\left(\vec{u}_3\right) = (2,2,0) = 2 \cdot \vec{u}_3$$

Los subespacios $F = \left\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \right\rangle$ y $G = \left\langle \vec{u}_3 \right\rangle$ son invariantes (verlo).

$\left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2 \right\}$ y $\left\{ \vec{u}_3 \right\}$ son bases de F y G respectivamente y $B' = \left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \right\}$ es una base de R^3 (luego, $R^3 = F \oplus G$).

La matriz asociada a f respecto de la base B' es $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Respecto de esta base (formada por vectores cuyas imágenes son proporcionales respectivamente a dichos vectores), f viene pues representada por una matriz diagonal.

La matriz A' permite estudiar ciertos aspectos de f de una forma mucho más sencilla que con la matriz A. Por ejemplo:

r(A')=2, luego dim Im(f) = 2; de hecho, $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \vec{u}_2, \vec{u}_3 \right\rangle$ y $N(f) = \left\langle \vec{u}_1 \right\rangle$.

No todos los endomorfismos f de un espacio vectorial V pueden representarse mediante una matriz diagonal. En el siguiente capítulo analizaremos bajo qué condiciones existe una base de V tal que la matriz asociada a f respecto de dicha base sea una matriz diagonal.

Capítulo 3

REDUCCIÓN DE MATRICES

3.1 Definición

Dos matrices cuadradas A y $A' \in M_n(K)$ son **semejantes** cuando existe una matriz cuadrada inversible $P \in M_n(K)$ tal que $A' = P^{-1} A\, P$.

Ejemplo

Matrices asociadas a la misma transformación lineal f, respecto a diferentes bases, son semejantes.

Recíprocamente, si A y A' son semejantes, puede construirse un endomorfismo $f : K^n \to K^n$ tal que A y A' representen a f respecto a dos bases diferentes B y B' de K^n, respectivamente.

3.2 Planteamiento del problema

Dado un endomorfismo f de V, ¿existe una base B' de V tal que la matriz asociada a f respecto de dicha base B' sea una matriz diagonal $D = M(f, B')$?

O bien, dada una matriz $A \in M_n(K)$, ¿existe una matriz diagonal D semejante a A?

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es semejante a ninguna matriz diagonal. Para que así ocurriera, habría de ser $D = P^{-1} A\, P$, para alguna matriz $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible y $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Es decir, $PD = A\, P$. Pero:

$$PD = A\, P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_1 & d\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de estas dos matrices, se obtendría que:

$$\begin{cases} (1) \equiv a\lambda_1 = a \\ (2) \equiv b\lambda_2 = b \\ (3) \equiv c\lambda_1 = a + c \\ (4) \equiv d\lambda_2 = b + d \end{cases}$$

1. Si a = 0, entonces $b \neq 0$ (ya que, en caso contrario, sería $|P| = 0$, lo cual es absurdo pues P es una matriz inversible). Así:

$$\left.\begin{array}{l} b\lambda_2 = b \\ b \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_2 = 1 \overset{(4)}{\Rightarrow} d = b + d \Rightarrow b = 0$$

lo cual es absurdo según hemos visto.

2. Si $a \neq 0$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} a\lambda_1 = a \\ a \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = 1 \overset{(3)}{\Rightarrow} c = a + c \Rightarrow a = 0$$

que es absurdo por hipótesis.

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ -6 & 8 & 16 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, en cambio, sí es semejante a una matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, según se vio en el párrafo 2.11.6.

3.3 Definición

1. Una matriz $A \in M_n(K)$ es ***diagonalizable*** en K si es semejante a alguna matriz diagonal $D \in M_n(K)$.
2. Un endomorfismo f de V es ***diagonalizable*** en K cuando lo sea su matriz asociada A respecto a cierta base B. Es decir, f es diagonalizable cuando exista una base B' de V tal que la matriz D = M(f, B') sea una matriz diagonal.

3.4 Observación

¿Cómo deberían ser los vectores de la base $B' = \left\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \right\}$ para que la matriz $D = M(f, B')$ fuera de la forma $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$?

Por definición de matriz asociada a un endomorfismo respecto de una base, la columna i-ésima de esta matriz D estaría formada por las coordenadas del vector $f\left(\vec{v}_i\right)$ respecto de la base B'; entonces, habría de ser:

$$f\left(\vec{v}_i\right) = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + ... + \lambda_i \cdot \vec{v}_i + ... + 0 \cdot \vec{v}_n = \lambda_i \vec{v}_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Luego, los vectores de la base B' habrían de ser vectores $\vec{v}_i$ no nulos (por formar parte de una base de V), tales que sus imágenes fueran vectores proporcionales (paralelos) a ellos mismos.
Teniendo en cuenta que $f\left(\vec{v}_i\right) = A \vec{v}_i$, siendo A la matriz asociada a f respecto a cierta base B, los vectores $\vec{v}_i$ de la base B' habrían de verificar que $A \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$, para ciertos $\lambda_i \in K$, i = 1, 2, ...,n.
Formalicemos estos conceptos.

3.5 Definición

Llamamos ***vector propio*** ó ***autovector*** ó ***vector característico*** de un endomorfismo f de V (ó de su matriz asociada A respecto a cierta base B) a un vector no nulo $\vec{u}$ para el cual exista un escalar $\lambda \in K$ tal que $f\left(\vec{u}\right) = \lambda \vec{u}$, es decir, $A \vec{u} = \lambda \vec{u}$.
Se dice que λ es un ***valor propio*** ó *autovalor* ó ***valor característico*** de f (ó de su matriz asociada A respecto a cierta base B) y que $\vec{u}$ es un vector propio asociado asociado al valor propio λ.

3.6 Observaciones

1. El concepto de vector propio está bien definido ya que es evidente que $\vec{u}$ es un vector propio de f si y solo si $\vec{u}$ es vector propio de cualquier matriz asociada a f. Lo mismo ocurre con la definición de valor propio.

2. Dada una matriz $A \in M_n(K)$, define siempre un endomorfismo $f : K^n \to K^n$ y los vectores y valores propios de A son los de f.

3. Un vector propio está asociado a un único valor propio. En efecto:
Si fuera $f\left(\vec{u}\right) = \lambda_1 \vec{u}$ y también $f\left(\vec{u}\right) = \lambda_2 \vec{u}$, entonces $\lambda_1 \vec{u} = \lambda_2 \vec{u}$, luego $\lambda_1 = \lambda_2$ ya que $\vec{u} \neq \vec{0}$ por ser un vector propio.

4. En cambio, a cada valor propio le corresponde un sistema de vectores propios que, junto con el vector $\vec{0}$, constituyen, como demostraremos más adelante, un subespacio vectorial de V.

5. Un vector propio, por definición, es distinto de $\vec{0}$, en cambio, un valor propio puede ser 0.

3.7 Teorema

Un endomorfismo $f : V \to V$ ó su matriz asociada A respecto de cierta base B de V, es diagonalizable en K si y solo si existe una base $B' = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\right\}$ de V formada por vectores propios de f.

Además, la matriz diagonal D semejante a A, que es la matriz asociada a f respecto de la base B', tiene en la diagonal principal a los respectivos valores propios correspondientes a los vectores propios de la base B'.

Es decir, A es semejante a $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$, siendo λ_i el valor propio correspondiente a $\vec{v}_i$, para i = 1, 2, ...,n.

La matriz P que permite la diagonalización, es decir, tal que $D = P^{-1}AP$, tiene por i-ésimo vector columna a las coordenadas del vector propio $\vec{v}_i$ respecto de la base B de partida.

Demostración

La demostración se basa en la observación 3.4. f es diagonalizable si y solo si existe una base $B' = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\right\}$ de V tal que la matriz $D = M(f, B')$ sea una matriz diagonal. Así, será:

$$D = \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \qquad\qquad & \uparrow \qquad\qquad & \qquad \uparrow \end{matrix} \\ f\left(\vec{v}_1\right)_{B'} \quad f\left(\vec{v}_2\right)_{B'} \quad ... \quad f\left(\vec{v}_n\right)_{B'} \end{array}$$

Por tanto, $f\left(\vec{v}_i\right) = (0,...,0,\lambda_i,0,...,0)_{B'} = 0 \cdot \vec{v}_1 + ... + 0 \cdot \vec{v}_{i-1} + \lambda_i \cdot \vec{v}_i + 0 \cdot \vec{v}_{i+1} + ... + 0 \cdot \vec{v}_n = \lambda_i \vec{v}_i$, i = 1, 2,...,n.

Luego, los vectores de la base B’ son vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, respectivamente.

Por otro lado, se verificará que $P^{-1}AP = D$ para la matriz P de cambio de base de B’ a B. Así, la i-ésima columna de P será el vector $\vec{v}_i$ expresado en la base B.

$\boxed{3.8}$ Corolario

Una matriz $A \in M_n(K)$ es diagonalizable si y solo si existe una base $B' = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\right\}$ de K^n formada por vectores propios de A.

El resultado es inmediato a partir del teorema anterior y de la observación 2. del párrafo 3.9.

Ejemplo

El endomorfismo f de R^3, ya considerado anteriormente, dado por:

$$f(x, y, z) = (-x + 3y + 6z, -6x + 8y + 16z, 2x - 2y - 4z)$$

es diagonalizable, pues, según se vio en el apartado 2. del párrafo 2.11.6, la matriz asociada a f respecto de la base $B' = \left\{ \vec{u}_1 = (0,-2,1), \vec{u}_2 = (3,-2,2), \vec{u}_3 = (1,1,0) \right\}$ es $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ que es una matriz diagonal.

B' es una base R^3 formada por los vectores propios $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ asociados a los valores propios 0, 1 y 2, respectivamente.

3.9 Cálculo de valores y vectores propios

3.9.1 Definición

Llamamos ***polinomio característico*** de una matriz $A \in M_n(K)$, y lo representamos por $p_A(\lambda)$, al polinomio de grado n en la variable λ:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|.$$

La igualdad $|A - \lambda I_n| = 0$ se llama ***ecuación característica*** de A.

Para designar a la matriz unidad de orden n, si no hay lugar a confusión, emplearemos simplemente I, en vez de I_n.

Ejemplo

El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

3.9.2 Proposición

Si A y $A' \in M_n(K)$ son dos matrices semejantes, entonces, tienen el mismo polinomio característico.

Demostración

Por ser A y A' matrices semejantes, existe una matriz inversible $P \in M_n(K)$ tal que:

$$A' = P^{-1}AP$$

luego,

$$p_{A'}(\lambda) = |A' - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}\, I\, P| =$$

$$|P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}||A - \lambda I||P| = \frac{1}{|P|}|A - \lambda I||P| = |A - \lambda I| = p_A(\lambda)$$

3.9.3 Definición

Llamamos ***polinomio característico de un endomorfismo*** f de V al polinomio característico de una cualquiera de sus matrices asociadas, y lo representamos por $p_f(\lambda)$.

3.9.4 Observación

Este concepto está bien definido puesto que todas las matrices asociadas a f respecto a diferentes bases, tienen el mismo polinomio característico por ser matrices semejantes.

3.9.5 Proposición

Los valores propios de un endomorfismo f de V ó de una cualquiera de sus matrices asociadas A, son las raíces de su polinomio característico. Y los vectores propios asociados a cada uno de sus valores propios λ son las soluciones no triviales del sistema homogéneo de ecuaciones lineales $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

Demostración

Por definición, un escalar $\lambda \in K$ es un valor propio de A si y solo si existe un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}$; es decir, $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

Pero, el sistema lineal $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ admite soluciones distintas de la trivial si y solo si $|A - \lambda I| = 0$.

3.9.6 Ejemplo

Hemos calculado en el párrafo 3.9.1 el polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, que resultó ser:

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Los valores propios de A son, por tanto, las raíces de este polinomio:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

raíz doble.
Los vectores propios de A son las soluciones no triviales del sistema homogéneo:

$$(A - I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0$$

Consecuentemente, los vectores propios de A son los vectores de la forma $(0, y)$ para cualquier escalar no nulo $y \in R$.

Observemos que la traza de A es $tr(A) = 1 + 1 = 2 = -$coeficiente de λ, en el polinomio característico. Además, $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 =$ término independiente del polinomio característico.

Veremos más adelante que estos resultados pueden generalizarse.

$\boxed{3.10}$ Propiedades de los valores y vectores propios

1. El conjunto de vectores propios de un cierto endomorfismo f de V, asociados a un mismo valor propio λ, junto con el vector $\vec{0}$, constituye un subespacio vectorial de V, llamado ***subespacio propio asociado al valor propio*** λ. Lo denotaremos por V_λ.

Demostración

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V_\lambda$. Demostremos que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V_\lambda$, para todo par de escalares $\alpha, \beta \in K$. En efecto:

$$f\left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right) = \alpha f\left(\vec{u}\right) + \beta f\left(\vec{v}\right) = \alpha\lambda\vec{u} + \beta\lambda\vec{v} = \lambda\left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right)$$

ya que f es lineal y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores propios asociados a λ ó bien son $\vec{0}$.

Luego, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ es el vector $\vec{0}$ ó es un vector propio asociado a λ, y, por tanto, está demostrado que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V_\lambda$.

2. Si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p$ son vectores propios asociados a sendos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, entonces el sistema de vectores $\left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\right\}$ es libre.

Demostración

Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existe un entero q con $1 \leq q < p$ (si $p = 1$, el resultado es trivial) tal que el sistema $\left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_q\right\}$ es libre y los vectores $\vec{u}_{q+1}, \vec{u}_{q+2}, ..., \vec{u}_p$ son combinación lineal de los vectores del sistema libre.

En particular, $\vec{u}_p = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + ... + \alpha_q \vec{u}_q$, para ciertos escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q \in K$.

Podemos suponer $\alpha_i \neq 0,\ i = 1, ..., q$, ya que, en caso de que alguno fuera 0, obviaríamos el escribirlo en la combinación lineal; y, desde luego algún coeficiente de esta combinación lineal es distinto de 0 por ser $\vec{u}_p \neq \vec{0}$ al ser un vector propio de f.

Aplicando que f es lineal y la definición de valor y vector propio, se verifica entonces que:

$$f\left(\vec{u}_p\right) = \alpha_1 f\left(\vec{u}_1\right) + \alpha_2 f\left(\vec{u}_2\right) + ... + \alpha_q f\left(\vec{u}_q\right) = \alpha_1\lambda_1 \vec{u}_1 + \alpha_2\lambda_2 \vec{u}_2 + ... + \alpha_q\lambda_q \vec{u}_q$$

Pero, también:

$$f\left(\vec{u}_p\right) = \lambda_p \vec{u}_p = \lambda_p\left(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + ... + \alpha_q \vec{u}_q\right) = \alpha_1\lambda_p \vec{u}_1 + \alpha_2\lambda_p \vec{u}_2 + ... + \alpha_q\lambda_p \vec{u}_q$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para $\vec{u}_p$, queda:

$$\alpha_1\lambda_1 \vec{u}_1 + \alpha_2\lambda_2 \vec{u}_2 + ... + \alpha_q\lambda_q \vec{u}_q = \alpha_1\lambda_p \vec{u}_1 + \alpha_2\lambda_p \vec{u}_2 + ... + \alpha_q\lambda_p \vec{u}_q$$

De donde:

$$\alpha_1\left(\lambda_1 - \lambda_p\right)\vec{u}_1 + \alpha_2\left(\lambda_2 - \lambda_p\right)\vec{u}_2 + ... + \alpha_q\left(\lambda_q - \lambda_p\right)\vec{u}_q = \vec{0}$$

Lo cual es absurdo, ya que no puede haber una combinación lineal de vectores linealmente independientes que sea igual al vector $\vec{0}$ sin ser cero todos los coeficientes. En la combinación lineal precedente, de hecho, ninguno de los coeficientes es 0 por ser $\alpha_i \neq 0,\ i=1,\ldots,q$ y ser $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j,\ \ i,j=1,\ldots,p$.

3. Si f, ó alguna de sus matrices asociadas $A \in M_n(K)$, tiene n valores propios distintos entre sí, entonces f es diagonalizable.

Demostración

Esta propiedad es consecuencia directa de la propiedad anterior, ya que al tener f, n valores propios distintos entre sí, podemos formar un sistema de n vectores propios linealmente independientes (cada uno de ellos asociado a uno de los n valores propios, respectivamente). Es decir, existe una base de V formada por vectores propios de f, lo cual es una condición necesaria y suficiente para que f sea diagonalizable.

4. La *multiplicidad geométrica de un valor propio* λ (es decir, la dimensión de V_λ) es menor ó igual que su *multiplicidad algebraica* (es decir, el orden de multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico).

Demostración

Supongamos que λ tiene orden de multiplicidad p como raíz del polinomio característico de f. Sea $B_\lambda = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_q\right\}$ una base de V_λ. Demostremos que $q \leq p$.

Completamos B_λ hasta formar una base B' de V, $B' = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_q, \vec{u}_{q+1}, \ldots, \vec{u}_n\right\}$. Sea $A' = M(f, B')$.

Por ser $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_q$ vectores propios de f asociados a λ, se verifica :

$$f\left(\vec{u}_i\right) = \lambda \vec{u}_i,\ \ i=1,\ldots,q$$

y, por tanto, $f\left(\vec{u}_i\right) = (0,\ldots,0,\lambda,0,\ldots,0)_{B'}$, situándose λ en la coordenada i-ésima, $i=1,\ldots,q$.

Así, resulta ser:

$$A'=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{q+1\,1} & \dots & a_{n\,1} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & a_{q+1\,2} & \dots & a_{n\,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & a_{q+1\,q} & \dots & a_{n\,q} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{q+1\,q+1} & \dots & a_{n\,q+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{q+1\,n} & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

siendo $f\left(\vec{u}_i\right)=\left(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}\right)_{B'}$, $i=q+1,\dots,n$.

El polinomio característico de A’ es:

$$p_{A'}(\mu)=|A'-\mu I|=(\lambda-\mu)^q\ p(\mu)$$

para un cierto polinomio en μ, $p(\mu)$.

Por hipótesis, λ es un valor propio de f, luego lo es de A’ (por ser una matriz asociada a f) y con el mismo orden de multiplicidad p como raíz de $p_{A'}(\mu)$.

Consecuentemente, observando la descomposición factorial de $p_{A'}(\mu)$, ha de ser $q \le p$.

5. Si λ es un valor propio con orden de multiplicidad uno, es decir, si λ es una raíz simple del polinomio característico, entonces, la dimensión de su subespacio propio asociado, V_λ, es también uno.

Demostración

Esta propiedad es consecuencia inmediata de la propiedad anterior. En efecto: Aplicando a este caso la propiedad 4., se verifica que $\dim V_\lambda \le 1$. Luego, $\dim V_\lambda = 1$ ya que $V_\lambda \ne \left\{\vec{0}\right\}$, por definición de vector propio.

6. (Generalización de la propiedad 2.) Sean $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ valores propios distintos entre sí de una matriz $A \in M_n(K)$. Se verifica:

- **a.** Si $B_1,B_2,\dots,B_p$ son bases de $V_{\lambda_1},V_{\lambda_2},\dots,V_{\lambda_p}$, respectivamente, entonces $B=B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_p$ es libre.
- **b.** Si A tiene exactamente p autovalores distintos, entonces:
  A es diagonalizable si y solo si B, definida como en el apartado a., tiene exactamente n vectores.

Demostración

a. Supongamos p = 2 (si p>2, la idea de la demostración es la misma).

Sean, entonces, $B_1 = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\right\}$ y $B_2 = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_q\right\}$ sendas bases de V_{λ_1} y V_{λ_2}, respectivamente. Entonces, es $B_1 \bigcup B_2 = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_q\right\}$.

Escribamos una combinación lineal de los vectores de $B_1 \bigcup B_2$ igualada a $\vec{0}$:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + ... + \alpha_p \vec{u}_p + \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + ... + \beta_q \vec{v}_q = \vec{0}$$

y demostremos que todos los coeficientes han de ser nulos.

El vector $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + ... + \alpha_p \vec{u}_p$ pertenece a V_{λ_1}, luego $\vec{u} = \vec{0}$ ó bien $\vec{u}$ es un vector propio asociado a λ_1.

Análogamente, $\vec{v} = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + ... + \beta_q \vec{v}_q$ pertenece a V_{λ_2}, luego $\vec{v} = \vec{0}$ ó bien $\vec{v}$ es un vector propio asociado a λ_2.

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, pues $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$. Consecuentemente, alguno de ellos es el vector $\vec{0}$, sin más que aplicar la propiedad 2. que garantizaba la independencia lineal de vectores propios asociados a valores propios distintos entre sí, como es el caso de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Si, por ejemplo, $\vec{u} = \vec{0}$, entonces, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$ por ser B_1 un sistema libre.

Además, si $\vec{u} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0} = \vec{v} = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + ... + \beta_q \vec{v}_q$ y también serán $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_q = 0$ por ser B_2 un sistema libre.

Luego $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_q = 0$ y hemos probado que $B_1 \bigcup B_2$ es libre.

Ocurriría lo mismo si hubiéramos partido de que $\vec{v} = \vec{0}$.

b. Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ los p autovalores distintos de la matriz A.

$\Rightarrow$(Condición necesaria)

Supongamos que A es diagonalizable. Existe, entonces, una base de K^n formada por n autovectores de A linealmente independientes.

De estos n vectores, n_1 de ellos estarán asociados a λ_1, n_2 a λ_2, ..., n_p a λ_p. Así:

$$\mathrm{card}(B) = \dim\left(V_{\lambda_1}\right) + \dim\left(V_{\lambda_2}\right) + \ldots + \dim\left(V_{\lambda_p}\right) \geq n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$$

Y tenemos que B es un sistema libre, por el apartado a., con igual ó más de n vectores en el espacio vectorial K^n de dimensión n, luego, card (B) = n.

$\Leftarrow$(Condición suficiente)
Recíprocamente, supongamos que card(B) = n. Por el apartado a., se verifica que B es libre con n vectores, luego B es una base de K^n formada por vectores propios de A y, por consiguiente A es diagonalizable.

3.11 Caracterización de los endomorfismos diagonalizables

Sea V un K- espacio vectorial de dimensión $n \neq 0$. Un endomorfismo f de V (ó su matriz asociada A respecto a cierta base) es diagonalizable si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:

1. Las n raíces del polinomio característico de f (ó de A) pertenecen al cuerpo K.

2. Para cada una de estas raíces λ de $p_f(\lambda)$ (ó de $p_A(\lambda)$) se verifica que

$$\dim V_\lambda = p$$

siendo p el orden de multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico, es decir, las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden.

Demostración

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ los p autovalores distintos de f, con órdenes de multiplicidad $p_1, p_2, \ldots, p_p$, respectivamente. Sea $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_p$, donde cada B_j es una base de V_{λ_j}, $j = 1,2,\ldots,p$.

$\Rightarrow$(Condición necesaria)
Supongamos que f es diagonalizable. Entonces, todos los autovalores de f pertenecerán al cuerpo K puesto que la matriz diagonal semejante a A ha de pertenecer a $M_n(K)$ y, por tanto, los autovalores, que constituyen su diagonal principal, han de ser elementos de K.
Por la propiedad 4. de los valores y vectores propios, se tiene que $\dim V_{\lambda_j} \leq p_j$, $j = 1,\ldots,p$. Si fuera $\dim V_{\lambda_j} < p_j$, para algún $j \in \{1,\ldots,p\}$, obtendríamos que:

$$\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(B_1) + \ldots + \mathrm{card}(B_p) = \dim\left(V_{\lambda_1}\right) + \ldots + \dim\left(V_{\lambda_p}\right) < p_1 + \ldots + p_j = n$$

y f no sería diagonalizable de acuerdo con la propiedad 6. de los valores y vectores propios. Por tanto, $\dim V_{\lambda_j} = p_j,\ j = 1,\ldots,p$.

$\Leftarrow$(Condición suficiente)
Supongamos ahora que se verifican las dos condiciones 1. y 2. Entonces,

$$\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(B_1) + \ldots + \operatorname{card}(B_p) = \dim(V_{\lambda_1}) + \ldots + \dim(V_{\lambda_p}) = p_1 + p_2 + \ldots + p_p = n$$

y f es diagonalizable por la propiedad 6. de los valores y vectores propios.

3.12 Proceso práctico de diagonalización

1. Cálculo de los valores propios de la matriz A: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, comprobando si todos pertenecen al cuerpo K.

2. Obtención de la dimensión de los subespacios propios asociados a los valores propios con órdenes de multiplicidad mayor que uno, observando si coinciden las dimensiones con los órdenes de multiplicidad respectivos.

3. Determinación de sendas bases $B_1, B_2, \ldots, B_p$ para los subespacios propios $V_1, V_2, \ldots, V_p$.

4. Construcción de la base de autovectores: $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_p$.

5. La matriz P que tiene por columnas a los vectores de B, permite la diagonalización de A:

$$D = P^{-1} A\, P$$

La matriz diagonal D tiene en la diagonal principal a los valores propios , en el mismo orden que sus vectores propios correspondientes en la base B y repitiéndose p_j veces cada $\lambda_j,\ j = 1,\ldots,p$

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como quedó demostrado en 3.9.6, A posee un único valor propio $\lambda = 1$ que es raíz doble de su polinomio característico, es decir, su orden de multiplicidad es 2.
El subespacio propio asociado es $V_1 = \{(0, y) / y \in R\}$, verificándose, por tanto que

$$\dim V_1 = 1 \neq 2 .$$

Al no coincidir la dimensión de V_1 con el orden de multiplicidad de $\lambda = 1$ como raíz del polinomio característico, concluimos, mediante este nuevo procedimiento, que A no es diagonalizable, como ya habíamos comprobado en 3.4.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Sus valores propios son las raíces de su polinomio característico:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 4 \\ 0 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 7)(6+\lambda)(4-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 7 \\ \lambda_2 = -6 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

A es diagonalizable por poseer tres valores propios reales y distintos entre sí.
Los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 7$ son las soluciones no triviales del sistema homogéneo:

$$(A - 7I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9y + 4z = 0 \\ 6y - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Luego, $V_7 = \{(\alpha,0,0) / \alpha \in R\} = \left\langle \vec{u}_1 = (1,0,0) \right\rangle$. Observemos que $\dim V_7 = 1$, como ya esperábamos por ser $\lambda_1 = 7$ un valor propio simple de A.

Procedemos de igual modo para el cálculo de los vectores propios asociados a $\lambda_2 = -6$:

$$(A + 6I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \beta \\ z = -\beta \end{cases}$$

Por tanto, $V_{-6} = \{(0,\beta,-\beta)/\beta \in R\} = \left\langle \vec{u}_2 = (0,1,-1) \right\rangle$, también de dimensión uno.

De manera análoga se obtiene que $V_4 = \{(0,2\gamma,3\gamma)/\gamma \in R\} = \left\langle \vec{u}_3 = (0,2,3) \right\rangle$.

La matriz A es, en consecuencia, semejante a la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, y la relación entre ambas matrices es:

$$D = P^{-1} A\, P$$

siendo P la matriz que permite la diagonalización y que tiene por columnas a sendos vectores propios asociados a cada uno de los tres valores propios deA:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si hiciéramos la interpretación de A como la matriz asociada al endomorfismo f de R^3 tal que $f\left(\vec{x}\right) = A\,\vec{x}$, $\forall\, \vec{x} \in R^3$, de los cálculos anteriores deduciríamos que f es una transformación lineal diagonalizable y que $D = M(f, B)$, siendo B la base de R^3 formada por vectores propios de f:

$$B = \left\{ \vec{u}_1 = (1,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,-1), \vec{u}_3 = (0,2,3) \right\}$$

Ejemplo

$\boxed{3.13}$ Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Sus valores propios son las raíces de su polinomio característico:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (6-\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 0, \text{ raíz doble} \end{cases}$$

Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = 0$, son las soluciones no triviales del sistema homogéneo:

$$(A - 0I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\alpha - 3\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Luego, $V_0 = \{(-2\alpha - 3\beta, \alpha, \beta) / \alpha, \beta \in R\} = \left\langle \vec{v}_2 = (-2,1,0), \vec{v}_3 = (-3,0,1) \right\rangle$.

Como $\dim V_0 = 2 =$ orden de multiplicidad del valor propio 0 como raíz del polinomio característico, deducimos que A es una matriz diagonalizable.

La matriz A es semejante a la matriz $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Para obtener la relación existente entre ambas matrices A y D, necesitamos calcular el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 6$, cuya dimensión conocemos ($\dim V_6 = 1$) por ser 6 una raíz simple de $p_A(\lambda)$.

Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 6$, son las soluciones no triviales del sistema homogéneo:

$$(A - 6I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 3z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \gamma \\ y = \gamma \\ z = \gamma \end{cases}$$

Luego, $V_6 = \{(\gamma, \gamma, \gamma) / \gamma \in R\} = \left\langle \vec{v}_1 = (1,1,1) \right\rangle$.

Con una notación similar a la utilizada en la teoría que sustenta este ejemplo, una base

de V_6 es $B_1 = \left\{ \vec{v}_1 = (1,0,0) \right\}$ y una base de V_0 es $B_2 = \left\{ \vec{v}_2 = (-2,1,0), \vec{v}_3 = (-3,0,1) \right\}$.

Así, una base de vectores propios de R^3 (cuya existencia es condición necesaria y suficiente para la diagonalización de la matriz A) es:

$$B = B_1 \cup B_2 = \left\{ \vec{v}_1 = (1,0,0), \vec{v}_2 = (-2,1,0), \vec{v}_3 = (-3,0,1) \right\}$$

Ya puede escribirse la relación entre las matrices A y D:

$$D = P^{-1} A\, P$$

siendo la matriz que permite la diagonalización $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.14 Otros resultados relativos a valores y vectores propios

1. Para cada valor propio λ de un endomorfismo f de un espacio vectorial V, se verifica que su subespacio vectorial asociado V_λ es invariante por f.

Además, el subespacio de vectores invariantes por f es ó bien $\left\{\vec{0}\right\}$ ó bien V_1, en el caso de que $\lambda = 1$ sea valor propio de f.

El núcleo de f es ó bien $\left\{\vec{0}\right\}$ ó bien V_0, en el caso de que $\lambda = 0$ sea valor propio de f.

2. Una matriz $A \in M_n(K)$ es inversible si y solo si $\lambda = 0$ no es valor propio de A, independientemente de que A sea diagonalizable ó no.

Demostración

1. Sea $\vec{u} \in V_\lambda$. Entonces, $f\left(\vec{u}\right) = \begin{cases} \vec{0} \\ ó \\ \lambda\,\vec{u} \end{cases}$, por definición de V_λ. En cualquiera de los dos casos, $f\left(\vec{u}\right) \in V_\lambda$, por ser V_λ un subespacio vectorial de V; y hemos probado que V_λ es un subespacio vectorial invariante.

Si $\lambda = 1$ no es valor propio de f, entonces, no existe ningún vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ tal que $f\left(\vec{u}\right) = \vec{u}$. Luego, el subespacio de vectores invariantes se reduce a $\left\{\vec{0}\right\}$.

Por el contrario, si $\lambda = 1$ es valor propio de f, entonces, el subespacio de vectores invariantes es V_1 por su propia definición.

Si $\lambda = 0$ no es valor propio de f, entonces, no existe ningún vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ tal que $f\left(\vec{u}\right) = \vec{0}$ y, por tanto, $N(f) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Por el contrario, si $\lambda = 0$ es valor propio de f, V_0 está formado por los vectores $\vec{u} \in V$ tales que $f\left(\vec{u}\right) = \vec{0}$, y, en consecuencia, $V_0 = N(f)$.

2. Si $\lambda = 0$ es valor propio de A, el sistema lineal homogéneo $A\vec{u} = \vec{0}$ admite soluciones distintas de la trivial (los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 0$) y, por tanto, $|A| = 0$. Luego A no es inversible.

Si, por el contrario, $\lambda = 0$ no es valor propio de A, el sistema $A\vec{u} = \vec{0}$ solo tiene la solución trivial, luego, $|A| \neq 0$ y A es inversible.

3.15 Proposición

1. Sea $A \in M_2(K)$, el polinomio característico de A es
$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A|.$$

2. En el caso de ser $A \in M_3(K)$,se verifica que:
$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A)\ \lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\ \lambda + |A|$$

3. En general, si $A \in M_n(K)$, el término de grado n de $p_A(\lambda)$ es $(-1)^n\ \lambda^n$, el de grado $n-1$ es $(-1)^{n-1}\ tr(A)\lambda^{n-1}$ y el término independiente es $|A|$. Es decir, $p_A(\lambda)$ es de la forma $p_A(\lambda) = (-1)^n\ \lambda^n + (-1)^{n-1}\ tr(A)\lambda^{n-1} + ... + |A|$.

Demostración

1. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$. Entonces:

$$p_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda+|A|$$

2. Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\in M_3(K)$. Desarrollando el determinante mediante la regla de Sarrus, se obtiene:

$$p_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$-\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2-[(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})]\lambda+$$

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})=$$

$$-\lambda^3+\mathrm{tr}(A)\lambda^2-(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda+|A|$$

3. Solo uno de los n! productos del desarrollo del determinante $p_A(\lambda)=|A-\lambda I|$ puede contener términos en λ^n ó λ^{n-1}, y es precisamente $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda)$, ya que en los demás productos interviene algún a_{ij} con $i\neq j$, luego no interviene $a_{ii}-\lambda$ ni $a_{jj}-\lambda$; y, por tanto, estos n! – 1 productos son polinomios de grado menor ó igual que $n-2$.
Por otra parte, se tiene que:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\ldots$$

Luego, está demostrado que el término de grado n de $p_A(\lambda)$ es $(-1)^n\lambda^n$, y el de grado $n-1$ es $(-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1}$.
Además, el término independiente de $p_A(\lambda)$ es $p_A(0)=|A-0I|=|A|$.

$\boxed{3.16}$ Proposición

Sean $A,A'\in M_n(K)$, dos matrices semejantes. Se verifica, entonces, que:

1. $p_A(\lambda)=p_{A'}(\lambda)$

2. $|A|=|A'|$

3. $Tr(A) = Tr(A')$

4. Si $n = 2$ ó 3, entonces, $A_{11} + A_{22} + ... + A_{nn} = A'_{11} + A'_{22} + ... + A'_{nn}$.

Demostración

1. Ya está demostrado en el apartado 3.13.3.

2. Por ser $p_A(\lambda) = p_{A'}(\lambda)$, ambos polinomios tienen iguales todos sus términos. En particular, tienen iguales los términos independientes. Es decir, $|A| = |A'|$.

3. Análogamente, igualando los términos de grado $n-1$ de los polinomios $p_A(\lambda)$ y $p_{A'}(\lambda)$, se obtiene que $Tr(A) = Tr(A')$.

4. Si $n = 2$ ó 3, igualando los términos en λ de los polinomios característicos de A y A', se llega a que:

$$A_{11} + A_{22} + ... + A_{nn} = A'_{11} + A'_{22} + ... + A'_{nn}$$

$\boxed{3.17}$ Observación

El recíproco de la proposición anterior no es cierto; es decir, dos matrices A y A' pueden tener el mismo polinomio característico sin ser semejantes.
Esto ocurre, por ejemplo, con las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En efecto:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \text{ y, también } p_{A'}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 .$$

A es diagonalizable (es semejante a sí misma que es diagonal). En cambio, A' no es diagonalizable ya que $\dim V_0 = 1 \neq 2 =$ orden de multiplicidad de $(\lambda = 0)$ como raíz de $p_{A'}(\lambda)$. Demostremos que efectivamente V_0 está engendrado por un único vector $\vec{u} = (1,0)$.
Un vector $\vec{u} = (x, y) \in V_0$ si y solo si $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es decir, si y solo si $y = 0$. Luego, $V_0 = \{(x,0) / x \in R\} = \langle (1,0) \rangle$.

3.16 Proposición

Sea $A \in M_n(K)$. Se verifica:

1. A y A^t tienen el mismo polinomio característico.

2. Si λ es valor propio de A, entonces

- **a.** λ es también valor propio de A^t.
- **b.** λ^n es valor propio de A^n.
- **c.** Si $\lambda \neq 0$, $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}, siempre que A sea inversible.

Demostración

1. $p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^t| = |A^t - \lambda I| = p_{A^t}(\lambda)$.

2. a. Es consecuencia inmediata de que $p_A(\lambda) = p_{A^t}(\lambda)$.

b. Empleamos el método de inducción completa en la demostración.

Para $n = 2$:

Por ser λ un valor propio de A, existe un vector no nulo $\vec{x} \in K^n$ tal que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Entonces:

$$A^2\vec{x} = A\left(A\vec{x}\right) = A\left(\lambda\vec{x}\right) = \lambda\left(A\vec{x}\right) = \lambda\left(\lambda\vec{x}\right) = \lambda^2\vec{x}$$

Luego, λ^2 es valor propio de A^2.

Supongamos cierta la afirmación para $n-1$ y probémosla para n:

$$A^n\vec{x} = A\left(A^{n-1}\vec{x}\right) = A\left(\lambda^{n-1}\vec{x}\right) = \lambda^{n-1}\left(A\vec{x}\right) = \lambda^{n-1}\left(\lambda\vec{x}\right) = \lambda^n\vec{x}$$

Por tanto, λ^n es valor propio de A^n.

3. Siguiendo con la misma notación del apartado anterior, se verifica:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow A^{-1}\left(A\vec{x}\right) = A^{-1}\left(\lambda\vec{x}\right) \Rightarrow \vec{x} = \lambda\left(A^{-1}\vec{x}\right) \Rightarrow A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{x}$$

Luego, $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}.

3.17 Proposición

Si $A \in M_n(K)$ es una matriz diagonalizable semejante a la matriz diagonal $D = P^{-1}A\,P$, para una cierta matriz inversible $P \in M_n(K)$, entonces se verifica que:

$$A^k = P\,D^k P^{-1}$$

para cualquier número natural k.
Si además A es inversible, la igualdad es cierta para cualquier número entero k.

Demostración

Utilizamos el método de inducción completa en la demostración.
Para k = 2:

$$A^2 = \left(P\,DP^{-1}\right)\left(P\,DP^{-1}\right) = P\,D^2P^{-1}$$

Supongamos la igualdad cierta para $k-1$ y probémosla para k:

$$A^k = AA^{k-1} = \left(P\,DP^{-1}\right)\left(P\,D^{k-1}P^{-1}\right) = P\,D^kP^{-1}$$

Si A es inversible, entonces $\lambda = 0$ no es valor propio de A, por consiguiente existe D^{-1} y será

$$A^{-1} = \left(P\,DP^{-1}\right)^{-1} = P\,D^{-1}P^{-1}$$

De nuevo por inducción se demostraría para cualquier número entero k.

3.18 Observación

Para obtener D^k simplemente se elevan los elementos de la diagonal principal de D a la k-ésima potencia y entonces, utilizando la proposición anterior, es fácil y rápido calcular A^k a partir de P y D.

Ejemplo

Calcular A^5, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Según se demostró en el ejemplo 3.13, A es diagonalizable y se verifica que:

$$D = P^{-1} A\, P$$

para $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Entonces,

$$A^5 = P\, D^5 P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6^4 & \frac{6^5}{3} & \frac{6^5}{2} \\ 6^4 & \frac{6^5}{3} & \frac{6^5}{2} \\ 6^4 & \frac{6^5}{3} & \frac{6^5}{2} \end{pmatrix}.$$

Capítulo 4

DIAGONALIZACIÓN DE LAS MATRICES REALES SIMÉTRICAS

4.1 Introducción

Merece una atención especial el tema de la diagonalización de las matrices reales simétricas debido no solo a las particularidades matemáticas que encierra su estudio, sino sobre todo a las numerosas ocasiones en las que van a aparecer a lo largo del programa de Matemáticas en Topografía (transformaciones geométricas del espacio euclídeo, cónicas, estadística, ...) así como en otras materias de la carrera (Física, Teledetección, ...)

Son unas matrices siempre diagonalizables en el cuerpo de los números reales y además la matriz que permite la diagonalización puede elegirse de forma que sea una matriz ortogonal.

4.2 Definición

Un endomorfismo f del espacio vectorial euclídeo V es ***simétrico*** cuando se verifica la siguiente igualdad entre productos escalares:

$$\vec{x}\cdot f\left(\vec{y}\right) = \vec{y}\cdot f\left(\vec{x}\right),\ \forall \vec{x},\vec{y} \in V.$$

4.3 Proposición

Sea $A \in M_n(R)$. Sea f el endomorfismo de R^n que tiene a A como matriz asociada respecto de la base canónica. Se verifica entonces que A es simétrica si y solo si f es simétrico.

Demostración

Sean $\vec{x},\vec{y}$ dos vectores cualesquiera de R^n. Llamamos X e Y a las matrices columna constituídas por las coordenadas de $\vec{x}$ e $\vec{y}$, respectivamente.

Por definición de matriz asociada a un endomorfismo, se verifica que:

$$\vec{x}\cdot f\left(\vec{y}\right) = X^tAY \quad y \quad f\left(\vec{x}\right)\cdot\vec{y} = (AX)^t\cdot Y = X^tA^tY$$

Así:

f es simétrico $\Leftrightarrow \vec{x}\cdot f\left(\vec{y}\right) = \vec{y}\cdot f\left(\vec{x}\right) \Leftrightarrow X^t AY = X^t A^t Y \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow$ A es simétrica.

4.4 Proposición

Sea $A \in M_n(R)$ una matriz simétrica. Sean λ, μ valores propios (reales ó complejos) de A. Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores propios de A asociados a λ y μ respectivamente.

Entonces se verifica que:

1. $(\lambda - \mu)\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$.
2. Si $\lambda \neq \mu$, los subespacios propios V_λ y V_μ asociados a λ y μ, respectivamente, son ortogonales.
3. Los n valores propios de A son reales.

Demostración

1. Sea f el endomorfismo de R^n que tiene a A como matriz asociada respecto de la base canónica. Son, por tanto, λ y μ también valores propios de f.

Por ser f simétrico (ya que A es simétrica), se verifica que

$$\vec{x}\cdot f\left(\vec{y}\right) = \vec{y}\cdot f\left(\vec{x}\right),$$

es decir,

$$\vec{x}\cdot\left(\mu\,\vec{y}\right) = \left(\lambda\,\vec{x}\right)\cdot\vec{y}\ .$$

Por tanto, aplicando la pseudoasociatividad del producto escalar, se tiene que

$$\mu\left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right) = \lambda\left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right)$$

obteniéndose que

$$(\lambda - \mu)\vec{x}\cdot\vec{y} = 0.$$

2. Si $\lambda \neq \mu$, teniendo en cuenta el apartado anterior que aseguraba que $(\lambda - \mu)\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, se deduce que $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, es decir, que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son perpendiculares.

3. Razonemos por el absurdo y supongamos que $\lambda = a + bi$ es un valor propio complejo de A, con $b \neq 0$.
Por ser A una matriz real, los coeficientes de su polinomio característico, $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$, son también reales.
Así, como λ es una raíz de $p_A(\lambda)$, también su conjugado $\overline{\lambda} = a - bi$ es valor propio de A.
Sea $\vec{x} = \vec{x}_1 + i\,\vec{x}_2$ un vector propio asociado a λ, donde las coordenadas de $\vec{x}_1$ y de $\vec{x}_2$ son reales.
Si suponemos probado que entonces $\vec{y} = \vec{x}_1 - i\,\vec{x}_2$ es también un vector propio asociado a $\overline{\lambda}$, como demostraremos al final de la proposición, aplicando de nuevo el apartado 1. para los valores propios λ y $\overline{\lambda}$ y los vectores propios respectivos $\vec{x}$ e $\vec{y}$, se obtendría:

$$(\lambda - \overline{\lambda})\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Operando en la igualdad anterior resultaría:

$$[(a + bi) - (a - bi)]\left(\vec{x}_1 + i\,\vec{x}_2\right)\left(\vec{x}_1 - i\,\vec{x}_2\right) =$$

$$2bi\left(\left|\vec{x}_1\right|^2 - i\,\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 + i\,\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 + \left|\vec{x}_2\right|^2\right) = 2bi\left(\left|\vec{x}_1\right|^2 + \left|\vec{x}_2\right|^2\right) = 0$$

Lo cual es absurdo ya que $\left|\vec{x}_1\right|^2 + \left|\vec{x}_2\right|^2 \neq 0$ (pues $\vec{x} = \vec{x}_1 + i\,\vec{x}_2 \neq \vec{0}$ por la propia definición de vector propio) y $b \neq 0$ por hipótesis.

Hemos llegado al absurdo al suponer que λ no era real. Por tanto, todos los valores propios de A son reales.

Para completar la demostración falta probar que $\vec{y} = \vec{x}_1 - i\,\vec{x}_2$ es un vector propio asociado a $\overline{\lambda}$, en efecto:

Por ser $\vec{x} = \vec{x}_1 + i\,\vec{x}_2$ un vector propio asociado a λ, se verifica que $A\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x}$.
Operando en esta igualdad, se obtiene la siguiente cadena de equivalencias:

$$A\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x} \Leftrightarrow A\left(\vec{x}_1 + i\,\vec{x}_2\right) = (a + bi)\left(\vec{x}_1 + i\,\vec{x}_2\right) \Leftrightarrow$$

$$A\vec{x}_1 + iA\vec{x}_2 = a\vec{x}_1 + ai\vec{x}_2 + bi\vec{x}_1 - b\vec{x}_2 = \left(a\vec{x}_1 - b\vec{x}_2\right) + i\left(a\vec{x}_2 + b\vec{x}_1\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\vec{x}_1 = a\vec{x}_1 - b\vec{x}_2 \\ A\vec{x}_2 = a\vec{x}_2 + b\vec{x}_1 \end{cases}$$

Luego, $A\vec{y} = A\left(\vec{x}_1 - i\vec{x}_2\right) = A\vec{x}_1 - iA\vec{x}_2 = \left(a\vec{x}_1 - b\vec{x}_2\right) - i\left(a\vec{x}_2 + b\vec{x}_1\right)$, mientras que

$$\overline{\lambda}\vec{y} = (a - bi)\left(\vec{x}_1 - i\vec{x}_2\right) = a\vec{x}_1 - ai\vec{x}_2 - bi\vec{x}_1 - b\vec{x}_2 = \left(a\vec{x}_1 - b\vec{x}_2\right) - i\left(a\vec{x}_2 + b\vec{x}_1\right).$$

Por tanto, $A\vec{y} = \overline{\lambda}\vec{y}$ e $\vec{y}$ es un vector propio asociado al valor propio $\overline{\lambda}$.

4.5 Teorema

Sea $A \in M_n(R)$ una matriz simétrica. Existe una base ortonormal de R^n formada por vectores propios de A, es decir, A es ortogonalmente diagonalizable en el sentido de que existe una matriz $P \in M_n(R)$ ortogonal tal que $D = P^{-1}AP$ es una matriz diagonal semejante a A (las columnas de P son vectores propios de A que forman una base ortonormal de R^n y la diagonal de D está formada por los correspondientes autovalores de A, cada uno tantas veces como indique su multiplicidad algebraica).

Demostración

Sean $\lambda_1,...,\lambda_p$ los valores propios distintos de A (reales por la proposición anterior). Sean $B_1,...,B_p$ sendas bases ortonormales de $V_{\lambda_1},...,V_{\lambda_p}$. Sea $B = B_1 \cup ... \cup B_p$. Se verifica que B es ortonormal (por la proposición anterior) y es libre (por el apartado 2. del párrafo 3.14 relativo a las propiedades de los valores y vectores propios). Si además probamos que B engendra R^n, ya será B una base ortonormal de R^n y la matriz A sería diagonalizable ortogonalmente.

Demostremos pues que B es un sistema de generadores de R^n. Razonemos por el absurdo y supongamos que $\langle B\rangle \neq R^n$; entonces, el subespacio ortogonal será $\langle B\rangle^{\perp} \neq \left\{\vec{0}\right\}$.

Cualquier vector $\vec{x} \in \langle B \rangle$ es de la forma $\vec{x} = \vec{x}_1 + .. + \vec{x}_p$ con $\vec{x}_i \in V_{\lambda_i}, i = 1,...,p$, ya que $\langle B \rangle = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_p}$, por su propia construcción. Sea $\vec{y} \in \langle B \rangle^{\perp}, \vec{y} \neq \vec{0}$. Para cualquier vector $\vec{x} \in \langle B \rangle$ se verifica entonces que:

$$f\left(\vec{y}\right) \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot f\left(\vec{x}\right) = \vec{y} \cdot f\left(\vec{x}_1 + ... + \vec{x}_p\right) = \vec{y} \cdot \left(f\left(\vec{x}_1\right) + ... + f\left(\vec{x}_p\right)\right) =$$

$$\vec{y} \cdot \left(\lambda_1 \vec{x}_1 + ... + \lambda_p \vec{x}_p\right) = \lambda_1 \left(\vec{y} \cdot \vec{x}_1\right) + ... + \lambda_p \left(\vec{y} \cdot \vec{x}_p\right) = \lambda_1 0 + ... + \lambda_p 0 = 0$$

Luego, si $\vec{y} \in \langle B \rangle^{\perp}$, entonces también $f\left(\vec{y}\right) \in \langle B \rangle^{\perp}$. Así, la restricción $f /_{\langle B \rangle^{\perp}}$ es un endomorfismo de $\langle B \rangle^{\perp}$ simétrico, por serlo f, y por tanto, por el apartado 3. de la proposición anterior, tiene algún autovector $\vec{z} \in \langle B \rangle^{\perp}$.

Pero, esto es absurdo ya que $\vec{z}$ sería también autovector del endomorfismo f de R^n y, en consecuencia, $\vec{z} \in \langle B \rangle \cap \langle B \rangle^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$, y habría de ser $\vec{z} = \vec{0}$, lo cual no puede ocurrir por la propia definición de vector propio.

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ por ser real y simétrica es diagonalizable ortogonalmente.

Sus valores propios son las raíces de su polinomio característico:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \left(\lambda^2 - 16\right)^2 = (\lambda - 4)^2 (\lambda + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} 4 \\ -4 \end{cases}$$

La matriz A tiene pues dos valores propios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -4$, ambos con multiplicidad algebraica igual a dos.

Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 4$ son las soluciones del sistema homogéneo $(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$, equivalente a:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+z=0 \\ -y+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\alpha \\ t=\beta \end{cases}$$

Luego, el subespacio propio V_{λ_1} está engendrado por los vectores $(1,0,1,0)$ y $(0,1,0,1)$ que son perpendiculares (si no lo fueran, hubiéramos elegido otros dos vectores del plano vectorial V_{λ_1} que fueran perpendiculares), pero no unitarios; por tanto, los dividimos entre su módulo y obtenemos ya una base ortonormal de V_{λ_1}:

$$B_1 = \left\{ \vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \vec{u}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Análogamente se procedería para llegar a una base ortonormal de V_{λ_2}:

$$B_2 = \left\{ \vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \vec{u}_4 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

De esta forma, una base ortonormal de R^4 formada por vectores propios de A es:

$$B = B_1 \cup B_2 = \left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \right\}$$

La matriz A es semejante a la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, siendo la relación entre ambas:

$$D = P^{-1} A\, P$$

para la matriz ortogonal $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.