CAPÍTULO PRIMERO

1. Transformaciones geométricas. Isometrías o movimientos

Definiciones

1. Sea E_n un espacio afín euclídeo de dimensión n. Llamaremos **transformación geométrica** de E_n, a toda aplicación $T: E_n \to E_n$ biyectiva.

2. Dada T, transformación geométrica de E_n, a cualquier par de puntos $A, A' \in E_n$ tales que $T(A) = A'$, se les denomina **puntos homólogos** por T.

3. Si $T(A) = A$, se dice que A es un **punto doble o invariante** por T.

4. Análogamente, sea $F \subset E_n$ si $T(F) = F$, se dice que el subconjunto F es **invariante** por T.

5. Llamaremos **transformación identidad o identidad** de E_n y la designaremos por I_{E_n}, a la transformación tal que todos sus puntos son dobles; es decir,

$$\forall A \in E_n \Rightarrow I_{E_n}(A) = A$$

6. Se dice que T es una transformación **involutiva** de E_n si $T^2 = I_{E_n}$; es decir, $T \circ T = I_{E_n}$

7. Las transformaciones geométricas que conservan los ángulos se llaman **transformaciones conformes o isogonales.**

Estudiaremos, en primer lugar, aquellas transformaciones geométricas que tienen como característica esencial que conservan las distancias: son las llamadas isometrías o movimientos.

8. Sea V el R-espacio vectorial asociado al espacio afín euclídeo E_n. Denotando por d la métrica definida en E, diremos que una transformación geométrica $T: E_n \to E_n$ es una **isometría** si verifica que para todo par de puntos A, B de E_n:

$$d(T(A),T(B))=d(A,B).$$

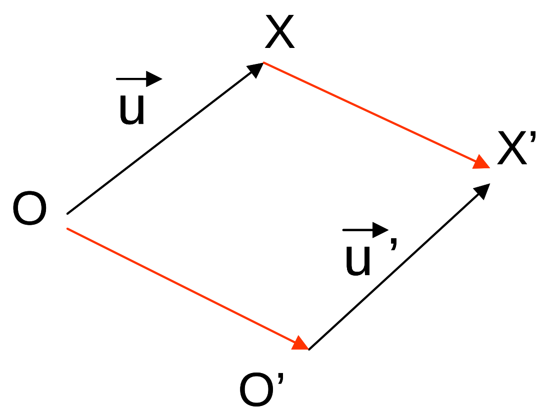
[1]

---

[1] **Nota:** Usualmente se denominan movimientos a aquellas isometrías que conservan la orientación de las figuras. Por convenio utilizaremos la denominación de movimiento para todo tipo de isometría añadiendo "directo" si se trata de una isometría que conserva la orientación de las figuras.

1.1 Aplicación vectorial asociada a una transformación geométrica

Dada la transformación geométrica $T: E_n \to E_n$, se denomina **aplicación asociada** a la aplicación $f: V_n \to V_n$ donde, sea $O \in E_n$, $\forall \vec{u} \in V_n$, existe $X \in E_n$ tal que, $\vec{u} = \overrightarrow{OX} \Rightarrow$
$f(\vec{u}) = f(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{T(O)T(X)} = \overrightarrow{O'X'} = u'$
siendo $T(O) = O'$ y $T(X) = X'$



Proposición: La aplicación f no depende del punto O elegido.

T es una **aplicación afín** de E_n si su aplicación f asociada es una transformación lineal.

1.2. Aplicación vectorial asociada a una isometría o movimiento

Si $T: E_n \to E_n$ es una isometría entonces su aplicación asociada $f: V_n \to V_n$ verifica:

1. f conserva el producto escalar (p. e.)
2. f es lineal
3. f es biyectiva

Demostración:

En efecto: fijado $O \in E_n$, un punto cualquiera, entonces $\forall \vec{u} \in V_n$, existe $X \in E_n$ tal que, $\vec{u} = \overrightarrow{OX}$. Además si designamos por $T(O) = O'$, $T(X) = X'$, entonces, se define $f(\vec{u}) = \overrightarrow{O'X'} = \vec{u}'$, luego:

$$V_n \xrightarrow{f} V_n$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{OX} \longrightarrow \overrightarrow{O'X'} = \vec{u}'$$

1. f conserva el producto escalar: $f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_n$.

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$, entonces existen $A, B \in E_n$ tales que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ si $T: E_n \to E_n$ es una isometría, luego d(T(A),T(B))=d(A,B) siendo A'=T(A) B'=T(B),

Por definición: $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| \Rightarrow d^2(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 =$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} =$

$\left|\overrightarrow{OB}\right| - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \left|\overrightarrow{OA}\right| =$ **(1)**

Análogamente, $d(A', B') = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| \Rightarrow d^2(A', B') = \left|\overrightarrow{A'B'}\right|^2 =$

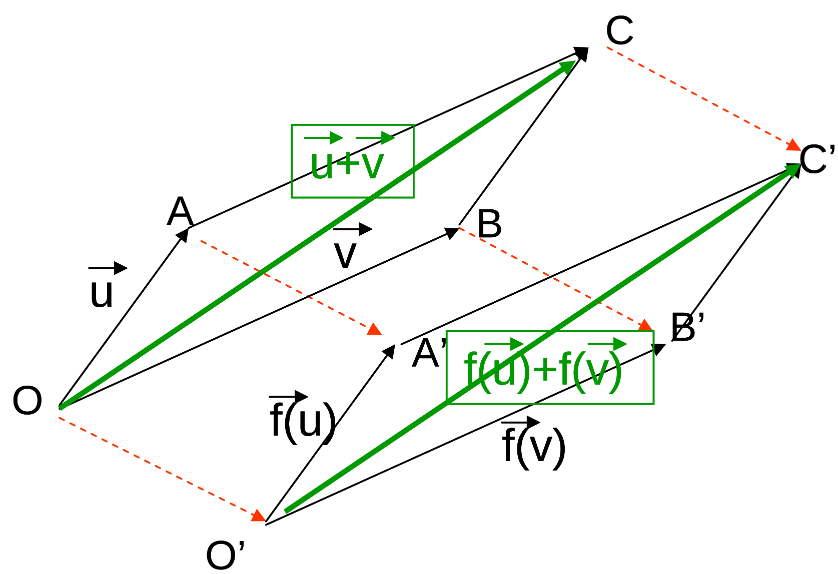
$$=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'B'}=\left(\overrightarrow{O'B'}-\overrightarrow{O'A'}\right)+\left(\overrightarrow{O'B'}-\overrightarrow{O'A'}\right)=$$

$$\overrightarrow{O'B'}\cdot\overrightarrow{O'B'}-2\,\overrightarrow{O'B'}\cdot\overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'A'}=\left|\overrightarrow{O'B'}\right|-2\overrightarrow{O'B'}\cdot\overrightarrow{O'A'}+\left|\overrightarrow{O'A'}\right|= \qquad \textbf{(2)}$$

pero $\left\{\begin{array}{l}\left|\overrightarrow{AB}\right|=d(A,B)=d(A',B')=\left|\overrightarrow{A'B'}\right| \\ \left|\overrightarrow{OB}\right|=d(O,B)=d(O',B')=\left|\overrightarrow{O'B'}\right| \\ \left|\overrightarrow{OA}\right|=d(O,A)=d(O',A')=\left|\overrightarrow{O'A'}\right|\end{array}\right\}$ por ser T isometría

luego **(1)=(2)** $\Rightarrow -2\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2\ \overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}\ \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=f(\vec{u})\cdot f(\vec{v})$.

2. f es lineal, es decir $\left\{\begin{array}{ll} f(\vec{u}+\vec{v})=f(\vec{u})+f(\vec{v}) & \forall\ \vec{u},\vec{v}\in\ V \\ f(\lambda\vec{u})=\lambda\ f(\vec{u}) & \forall\ \vec{u}\in\ V\quad \forall\ \lambda\in R\end{array}\right\}$



$\forall\vec{u},\vec{v}\in V;\ \exists\ A,B\in E_n$ tal que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ y $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$. Sea $C\in E_n$ tal que

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{u}+\vec{v}$ y $A'=T(A);\ B'=T(B);\ C'=T(C)$, entonces:

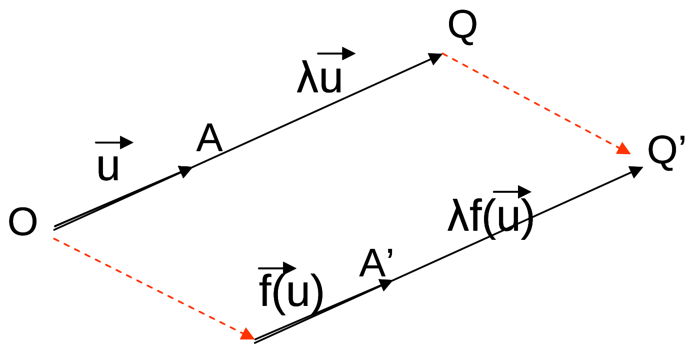
$$\left|f\left(\overrightarrow{u+v}\right)-f(\vec{u})-f(\vec{v})\right|^2=\left|\overrightarrow{O'C'}-\overrightarrow{O'A'}-\overrightarrow{O'B'}\right|^2=$$

$$=\left(\overrightarrow{O'C'}-\overrightarrow{O'A'}-\overrightarrow{O'B'}\right)\left(\overrightarrow{O'C'}-\overrightarrow{O'A'}-\overrightarrow{O'B'}\right)=$$

$$=\overrightarrow{O'C'}\cdot\overrightarrow{O'C'}-2\ \overrightarrow{O'C'}\cdot\overrightarrow{O'A'}-2\ \overrightarrow{O'C'}\cdot\overrightarrow{O'B'}+\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'A'}+2\ \overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}+\overrightarrow{O'B'}\cdot\overrightarrow{O'B'}=$$
$$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}-2\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-2\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+2\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}=$$
$$=\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=\left|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|^2=$$

$$=\left|\overrightarrow{u+v}-\vec{u}-\vec{v}\right|^2=0\Leftrightarrow\ f\left(\overrightarrow{u+v}\right)-f(\vec{u})-f(\vec{v})=\vec{0}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})}.$$



Análogamente, sea $A \in E_n$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ y $Q \in E_n$ tal que $\lambda\vec{u} = \lambda\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ}$ y sea

$$A' = T(A),\ Q' = T(Q) \Rightarrow \left|f(\lambda\vec{u}) - \lambda\, f(\vec{u})\right|^2 = \left|\overrightarrow{O'Q'} - \lambda\ \overrightarrow{O'A'}\right|^2 =$$

$$= \left(\overrightarrow{O'Q'} - \lambda\ \overrightarrow{O'A'}\right)\left(\overrightarrow{O'Q'} - \lambda\ \overrightarrow{O'A'}\right) =$$

$$= \overrightarrow{O'Q'}\cdot\overrightarrow{O'Q'} - 2\lambda\ \overrightarrow{O'Q'}\cdot\overrightarrow{O'A'} + \lambda^2\ \overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'A'} =$$

$$= \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OQ} - 2\lambda\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA} + \lambda^2\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} = \left(\overrightarrow{OQ} - \lambda\ \overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OQ} - \lambda\ \overrightarrow{OA}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{OQ} - \lambda\ \overrightarrow{OA}\right|^2 = 0 \iff f(\lambda\vec{u}) - \lambda\, f(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow f(\lambda\vec{u}) = \lambda\, f(\vec{u}).$$

3. Por ser f lineal basta comprobar que f es inyectiva, es decir, que $N(f)=\left\{\vec{0}\right\}$.

En efecto, sea $\vec{u} \in V_n$, tal que, $f(\vec{u}) = \vec{0}$, por tanto, existe $X \in E_n$ para el cual, $f(\vec{u}) = f\left(\overrightarrow{OX}\right) = \overrightarrow{O'X'} = \vec{0}$, luego X'=O', es decir, d(O',X')=0=d(O,X) $\Rightarrow X = O$ $\iff \overrightarrow{OX} = \vec{u} = \vec{0}$.

1.3. Transformaciones ortogonales de un espacio vectorial

Las aplicaciones $f: V_n \longrightarrow V_n$ biyectivas, lineales y que conservan el producto escalar reciben el nombre de **transformaciones ortogonales**.

NOTA: Obsérvese que la demostración de la linealidad de f sólo necesita que f conserve el producto escalar, luego podemos enunciar el siguiente corolario:

Corolario: Toda aplicación $f: V_n \longrightarrow V_n$ que conserve el producto escalar es lineal y biyectiva.

1.4. Propiedades de las transformaciones ortogonales

Si f es una transformación ortogonal de V, entonces:

Demostración:

1. f conserva la norma de los vectores y los ángulos entre ellos.

2. f transforma bases ortonormales en bases ortonormales, verificándose además el recíproco: Toda transformación lineal de V que transforme al menos una base ortonormal de V en una base ortonormal de V es una transformación ortogonal.

3. Si f y g son transformaciones ortogonales, $f \circ g$ también lo es.

4. El conjunto de las transformaciones ortogonales respecto de la composición tiene estructura de grupo. Lo denominaremos grupo ortogonal de V, y lo designaremos por $O(V)$.

5. Los valores propios reales de f son 1 y/o -1.

En efecto:

1. Sea $\vec{u} \in V$. Por definición $\left|f(\vec{u})\right| = \sqrt{f(\vec{u}) \cdot f(\vec{u})} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = |\vec{u}|$, por conservar f el producto escalar.

Además:

$$\cos\left(f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v})\right) = \frac{f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v})}{\left|f(\vec{u})\right| \cdot f(\vec{v})} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u} \cdot||\vec{v}|} = \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

2. Como f conserva las normas y los ángulos, si $\{\vec{e}_1, \ldots\ldots, \vec{e}_n\}$ es una base ortonormal de V, los vectores $\vec{e}_i$ con $i=1,\ldots.,n$ son unitarios y ortogonales entre sí, por tanto, los $f(\vec{e}_i)$ con $i=1,\ldots.,n$ son unitarios y perpendiculares entre sí. Queda por ver que es un sistema generador; pero es evidente por tener el mismo número de elementos que la base $<\{\vec{e}_i\}>$ con $i=1,\ldots.,n$

Recíprocamente, si la transformada $\{f(\vec{e}_1), \ldots\ldots, f(\vec{e}_n)\}$ de la base ortonormal $<\{\vec{e}_1, \ldots\ldots, \vec{e}_n\}>$ de V es una base ortonormal, entonces el rango de f es n luego f es biyectiva, además si $\vec{u}, \vec{v}$ son dos vectores cualesquiera de V cuyas coordenadas respecto de $<\{\vec{e}_1, \ldots\ldots, \vec{e}_n\}>$ son $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots y_n)$, respectivamente, entonces $f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots x_n\vec{e}_n) \cdot f(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots y_n\vec{e}_n) =$
$= \left(x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots x_n f(\vec{e}_n)\right) . \left(y_1 f(\vec{e}_1) + y_2 f(\vec{e}_2) + \cdots y_n f(\vec{e}_n)\right) =$
$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \vec{u} \cdot \vec{v}$, luego f conserva el producto escalar, y, por tanto, resulta que f es una transformación ortogonal.

3. Por ser f y g ortogonales, se verifica que $g \circ f(\vec{u}) \cdot g \circ f(\vec{v}) = g\left(f(\vec{u})\right) \cdot g\left(f(\vec{v})\right) =$ $= f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$, luego $g \circ f$ conserva el producto escalar. Además como f y g son biyectivas, $g \circ f$ es biyectiva. $g \circ f$ es lineal por conservar el producto escalar.

4. El elemento neutro es la identidad I$_V$. El elemento inverso de g es la aplicación inversa g^{-1} que existe por ser las transformaciones ortogonales biyectivas, y es ortogonal: $\vec{u}\cdot\vec{v}=g\cdot g^{-1}(\vec{u})\cdot g\cdot g^{-1}(\vec{v})=g\left(g^{-1}(\vec{u})\right)g\left(g^{-1}(\vec{v})\right)=\quad g^{-1}(\vec{u})\cdot g^{-1}(\vec{v})$, luego g^{-1} es ortogonal. Luego el conjunto de las transformaciones ortogonales de V es un grupo que designaremos por O(V).

5. Sea λ un valor propio real de f y sean $\vec{u},\vec{v}$ no nulos dos vectores propios asociados, entonces:

$$f(\vec{u})\cdot f(\vec{v})=\lambda\vec{u}\cdot\lambda\vec{v}=\lambda^2(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{v}\ \Rightarrow\ \lambda^2=1\ \Rightarrow\ \begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=-1\end{cases}$$

1.5. **Consecuencias.** Si f es una transformación ortogonal de V$_n$, entonces:

1. f transforma un subespacio vectorial en otro subespacio vectorial de la misma dimensión.
2. $\forall$ A,B $\subset V_n$ tales que A y B son ortogonales, se tiene que f(A) y f(B) son ortogonales.

1.6. Ecuación matricial de una transformación ortogonal

Sea f una transformación ortogonal de V$_n$, y B= $\{\vec{e}_1,.....,\vec{e}_n\}$ una base ortonormal de V. Designamos por $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ las coordenadas de un vector $\vec{u}\in V$ cualquiera, y por $(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$ las de su transformado $f(\vec{u})\in V$, respecto de la base B. Por ser f lineal, tenemos:

$$f(\vec{u})=x'_1\vec{e}_1+x'_2\vec{e}_2+\cdots+x'_n\vec{e}_n.$$

$$f(\vec{u})=f(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\cdots+x_n\vec{e}_n)=x_1f(\vec{e}_1)+x_2f(\vec{e}_2)+\cdots x_nf(\vec{e}_n).$$

Llamando $(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, a las coordenadas de $f(\vec{e}_i)$, i=1,2,...,n , respecto de B, entonces

la ecuación matricial de f es: $\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\ \cdot\\ \cdot\\ x'_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdot&\cdot&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdot&\cdot&a_{n2}\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ a_{1n}&a_{2n}&\cdot&\cdot&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix}$ (I) $\Leftrightarrow$

$$\left(x'_1,\quad x'_2,\quad\cdot\quad\cdot\quad x'_n\right)=\left(x_1,\quad x_2,\quad\cdot\quad\cdot,\quad x_n\right)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdot&\cdot&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdot&\cdot&a_{n2}\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ a_{1n}&a_{2n}&\cdot&\cdot&a_{nn}\end{pmatrix}^t \quad \text{(II)}$$

Llamando $X'=\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$ la ecuación matricial de f, abreviadamente, es $X' = MX$ (I), o bien, $(X')^t = X^t M^t$ (II), donde M es la matriz asociada a f y tiene por columnas las coordenadas de los transformados de los vectores de la base. Por ser f biyectiva $|M| \neq 0$.

Consecuencia: Por ser f una transformación ortogonal, entonces $\{f(\vec{e}_1),\ldots\ldots,f(\vec{e}_n)\}$ es también base ortonormal de V, luego $\forall\ i=1,\ldots,n$ $\quad |f(\vec{e}_i)|^2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 = 1$ y

$$f(\vec{e}_i)\cdot f(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\cdot\alpha_{jk} = 0 \quad i \neq j \iff M\cdot M^t = M^t\cdot M = I_n \iff M^{-1} = M^t$$

1.7. Matrices ortogonales

A las matrices M asociadas a una transformación ortogonal las llamaremos matrices ortogonales y se caracterizan por cumplir que $M^{-1} = M^t$.

NOTA: Otra demostración de que M es ortogonal, $M^{-1} = M^t$, sería la siguiente: M es ortogonal si y solo si

$$\forall\ \vec{u},\vec{v} \in V \ ,\vec{u}\cdot\vec{v} = f(\vec{u})\cdot f(\vec{v}) = M\vec{u}\cdot M\vec{v} = \vec{u}^t M^t M\vec{v} \iff M^t\cdot M = I_n \iff M^{-1} = M^t.$$

1.8. Determinante de una matriz ortogonal

Si M es una matriz ortogonal, entonces $|M| = \pm 1$.

En efecto: M ortogonal $\iff M\cdot M^t = I_n \Rightarrow |M\cdot M^t| = |I_n| = 1 \Rightarrow |M|\cdot|M^t| = |M|^2 = 1$ $\Rightarrow |M| = \pm 1$

Ahora es muy fácil obtener la ecuación general de un movimiento.

1.9. Ecuación de una isometría de E

Sea una isometría T de E_n, y su transformación ortogonal asociada $f: V_n \longrightarrow V_n$. Fijado un punto cualquiera $A \in E_n$ y si $A'=T(A)$, tenemos que para cada $X \in E_n$ y su homólogo $X'=T(X)$ es:

$$X = A + \overrightarrow{AX} = A + \vec{u} \quad \text{donde } \vec{u} = \overrightarrow{AX}$$

$$X' = A' + \overrightarrow{A'X'} = A' + \vec{u}' \quad \text{donde } \vec{u}' = \overrightarrow{A'X'} = f\left(\overrightarrow{AX}\right) = f(\vec{u})$$

Luego: $T(X) = T(A+\vec{u}) = A' + \vec{u}' = T(A) + f(\vec{u}) \iff T(X) = T(A) + f\left(\overrightarrow{AX}\right)$.

Si M es la matriz ortogonal que define f, respecto de cierta base ortonormal, podemos escribir $T(X)=T(A)+M\vec{u}$, o bien, $X'=A'+M\overrightarrow{AX}$, expresiones que constituyen las ecuaciones vectoriales de T.
Fijando una referencia en el espacio euclídeo E_n, se obtienen las formas matriciales de estas ecuaciones.

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{T} & E_n \\ A & \longrightarrow & A'=T(A) \\ \vec{u}\downarrow & & \downarrow f(\vec{u})=\overrightarrow{A'X'} \\ X & \longrightarrow & X'=T(X) \end{array}$$

NOTA:

1. El punto $A\in E_n$, es un punto cualquiera; puede ser el origen de la referencia del espacio euclídeo E_n. Siempre que exista se tomará un punto invariante por T.

2. En general la ecuación de una transformación geométrica de E_n es $X'=O'+f\left(\overrightarrow{OX}\right)$ donde f es la aplicación vectorial asociada.

1.10. Propiedades de las isometrías de E_n (n= 1, 2, 3)

Sea T una isometría de E_n y f la transformación ortogonal de V_n asociada, (siendo como siempre V_n el espacio vectorial sobre R asociado a E_n); se verifica que:

1. T transforma variedades lineales afines (subespacios afines) de E_n, en variedades lineales afínes de la misma dimensión. Es decir, para n = 1, 2, 3 las isometrías transforman rectas en rectas y planos en planos.
En efecto: veámoslo en concreto para rectas y planos, aplicaremos la propiedad **2** de **1.4**.

Sea r la recta de ecuación $X=A+\lambda\vec{u}\quad \lambda\in V$, su transformada $T\left(X\right)=T\left(A+\lambda\vec{u}\right)=T\left(A\right)+M\cdot\lambda\vec{u}=A'+\lambda\cdot M\vec{u}=\ A'+\lambda\,\vec{u}'\quad\lambda\in R$ que es la ecuación de la recta que pasa por A' y su dirección es $\vec{u}'$. Análogamente, si π es el plano de ecuación: $X=A+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\quad\lambda,\mu\ \in R$ su transformado será

$T(X)=T(A+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=T\left(A\right)+M\left(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\right)=A'+\lambda\ M\vec{u}+\mu\ M\vec{v}=A'+\lambda\vec{u}'+\mu\ \vec{v}'$

$\lambda,\mu\ \in R$, que es la ecuación del plano afín que pasa por A' y su dirección es el plano vectorial determinado por $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$. Consecuencia de esta propiedad son las 4 siguientes:

2. Las isometrías transforman semirrectas en semirrectas, semiplanos en semiplanos,...

3. Transforman segmentos en segmentos de igual longitud (basta tomar $a\le\lambda\le b$).

4. Transforman vectores fijos en vectores fijos de igual módulo.

5. Transforman triángulos en triángulos de lados respectivamente iguales.

6. Conservan los ángulos entre dos variedades lineales afines; es decir, conservan los ángulos entre dos rectas, dos planos, recta y plano.
Conservan, por tanto, el paralelismo y la perpendicularidad entre variedades lineales afines.

7. La composición de dos isometrías, (también la denominaremos producto), es otra isometría cuya transformación ortogonal asociada es la compuesta de las transformaciones ortogonales asociadas a cada uno de las isometrías dados.
En efecto, sean T_1 y T_2 dos isometrías de E_n y sean f_1 y f_2 sus transformaciones ortogonales asociadas:
$\forall\ X \in E_n \Rightarrow \left\{\begin{matrix} T_1(X) = T_1(A) + f_1(\vec{u}) \\ T_2(X) = T_2(A) + f_2(\vec{u}) \end{matrix}\right\}$, siendo $A \in E_n$ un punto elegido libremente.
Entonces, $T_2 \circ T_1(X) = T_2(T_1(X)) = T_2(T_1(A) + f_1(\vec{u})) = T_2(T_1(A)) + f_2(f_1(\vec{u})) =$ $= T_2 \circ T_1(A) + f_2 \circ f_1(\vec{u}) = T_2 \circ T_1(A) + M_2 \cdot M_1(\vec{u})$, siendo M_1 y M_2 las matrices ortogonales asociadas a f_1 y f_2 respectivamente. $T_2 \circ T_1$ es una isometría porque:
$d(T_2 \circ T_1(A), T_2 \circ T_1(B)) = d(T_2[T_1(A)], T_2[T_1(B)]) = d(T_1(A), T_1(B)) = d(A, B)$,
$\forall\ A, B \in E_n$.

8. El conjunto de las isometrías de E_n es un grupo respecto del producto definido, que denominaremos **grupo de las isometrías** de E_n. Se designa por $I_s(E_n)$.

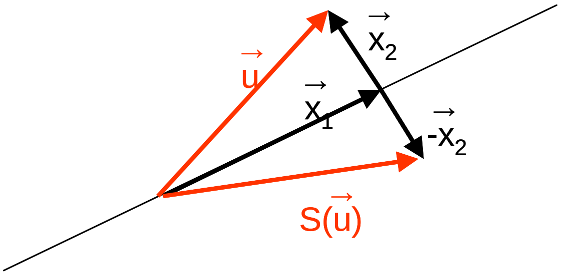
CAPÍTULO SEGUNDO

2. Transformaciones ortogonales del espacio vectorial euclídeo

2.1 Simetrías ortogonales de V_n

Sea $s: V_n \to V_n$ y $F \subset V_n$ un subespacio vectorial, diremos que s es una **simetría ortogonal** respecto de F si s es una simetría respecto de F de dirección $F^{\perp}$.

Es decir, $\forall \vec{u} \in V_n$ como $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ con $\vec{x}_1 \in F$, $\vec{x}_2 \in F^{\perp}$ únicos entonces



$s(\vec{u}) = s(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

Obviamente **F es el subespacio de vectores invariante por s**.

2.2. Caracterización de las simetrías ortogonales

Las simetrías ortogonales vectoriales de V_n son las transformaciones ortogonales involutivas de V_n.

Demostración:

En efecto: Sea $s: V_n \to V_n$ simetría ortogonal respecto de F s.v. de V_n, entonces $\forall \vec{u} \in V_n$, se tiene: $s^2(\vec{u}) = s^2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = s(s(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) = s(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{u}$, luego es involutiva.

Veamos que conserva el producto escalar:

$$\vec{u}, \vec{v} \in V_n \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, & \vec{x}_1 \in F, \vec{x}_2 \in F^{\perp} \\ \vec{v} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2, & \vec{y}_1 \in F, \vec{y}_2 \in F^{\perp} \end{cases}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2)(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x}_1\vec{y}_1 + \underbrace{\vec{x}_1\vec{y}_2}_{0} + \underbrace{\vec{x}_2\vec{y}_1}_{0} + \vec{x}_2\vec{y}_2 = \vec{x}_1\vec{y}_1 + \vec{x}_2\vec{y}_2$$

$$s(\vec{u})s(\vec{v}) = s(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)s(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) = \vec{x}_1\vec{y}_1 - \vec{x}_1\vec{y}_2 - \vec{x}_2\vec{y}_1 + \vec{x}_2\vec{y}_2 =$$

$= \vec{x}_1\vec{y}_1 + \vec{x}_2\vec{y}_2$, luego $s(\vec{u})s(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Por conservar el producto escalar, entonces es lineal.

Para ver que es biyectiva basta ver que es inyectiva (por ser lineal):

$s(\vec{u}) = s(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2 \in F \cap F^{\perp} = \vec{0}$, luego $\vec{u} = \vec{0}$.

Hemos demostrado que s es una transformación ortogonal involutiva.

Probemos ahora el recíproco:

Sea $f: V_n \to V_n$ ortogonal e involutiva $s^2(\vec{u}) = s(\vec{u})$; podemos escribir $\forall \vec{u} \in V_n$:

$$\vec{u}=\frac{\vec{u}+\vec{u}+f(\vec{u})-f(\vec{u})}{2}=\frac{\vec{u}+f(\vec{u})}{2}+\frac{\vec{u}-f(\vec{u})}{2} \quad \text{y llamando } \vec{x}_1=\frac{\vec{u}+f(\vec{u})}{2},$$

$\vec{x}_2=\dfrac{\vec{u}-f(\vec{u})}{2}$ se verifica que $f(\vec{x}_1)=f\left(\dfrac{\vec{u}+f(\vec{u})}{2}\right)=\dfrac{f(\vec{u})+f^2(\vec{u})}{2}=\dfrac{f(\vec{u})+\vec{u}}{2}=\vec{x}_1$,

entonces $\vec{x}_1$ es invariante y $f(\vec{x}_2)=f\left(\dfrac{\vec{u}-f(\vec{u})}{2}\right)=\dfrac{f(\vec{u})-f^2(\vec{u})}{2}=\dfrac{f(\vec{u})-\vec{u}}{2}=-\vec{x}_2$.

Veamos que $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ son perpendiculares, es decir, $\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2=0$.

$\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2=\dfrac{\vec{u}+f(\vec{u})}{2}\cdot\dfrac{\vec{u}-f(\vec{u})}{2}=\dfrac{1}{4}\left(\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot f(\vec{u})+f(\vec{u})\cdot\vec{u}+f(\vec{u})\cdot f(\vec{u})\right)$, por ser f ortogonal $f(\vec{u})\cdot f(\vec{u})=\vec{u}\cdot\vec{u}$, luego $\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2=0$.

Llamando F al conjunto de los $\vec{x}_1$ y G al de los $\vec{x}_2$, se verifica que $F+G=V_n$ y que F y G son ortogonales luego $F\cap G=\{\vec{0}\}$ y $G=F^{\perp}$.

Por tanto, por ser f transformación ortogonal involutiva, existe $F\subset V_n$ tal que $\forall\vec{u}\in V_n$, $\vec{u}=\vec{x}_1+\vec{x}_2$ con $\vec{x}_1\in F$ y $\vec{x}_2\in F^{\perp}$ y $f(\vec{u})=f(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\vec{x}_1-\vec{x}_2$, luego f es una simetría respecto de F de dirección $F^{\perp}$.

Corolario Si M es la matriz que define una simetría ortogonal de V_n, entonces M^t=M, es decir, M es una matriz simétrica.

En efecto: s simetría ortogonal vectorial $\Leftrightarrow$ s es involutiva $\Leftrightarrow$ $s^2=I_{V_n}$ $\Leftrightarrow$ $M^2=I_n$ $\Leftrightarrow$ M^{-1} = M y como M ortogonal $M^{-1}=M^t$, luego $M=M^t$, es decir M es simétrica.

Simetría ortogonal respecto de hiperplano

Sea $s:V_n\to V_n$ simetría ortogonal respecto de F (dirección $F^{\perp}$).
Si dim F = dim V_n – 1 = n - 1, se dice que s es una **simetría ortogonal respecto de un hiperplano.**

2.3. Transformaciones ortogonales directas e inversas

Sea M la matriz asociada a la transformación ortogonal f respecto de una base ortonormal de V_n, designaremos por

$$\begin{cases} O^+(V_n)=\{f\in O(V_n)\,/\,|M|=1\} \\ O^-(V_n)=\{f\in O(V_n)\,/\,|M|=-1\} \end{cases}$$

Si $f\in O^+(V_n)$ se dice que f es una transformación ortogonal **directa**.

Si $f\in O^-(V_n)$ se dice que f es una transformación ortogonal **inversa**.

2.4. Transformaciones ortogonales de V_1. Clasificación

Sea $f: V_1 \to V_1$ una transformación ortogonal, llamamos F al subespacio vectorial de vectores invariantes por f, luego $F \subset V_1$

Como se ha de verificar que $\left|f\left(\vec{u}\right)\right| = \left|\vec{u}\right|,\ \forall \vec{u} \in V_n$ entonces

$$\begin{cases} f\left(\vec{u}\right) = \vec{u} \Leftrightarrow f = I_{V_1} \Leftrightarrow F = V_1 \\ f\left(\vec{u}\right) = -\vec{u} \Leftrightarrow f = -I_{V_1} \Leftrightarrow F = \left\{\vec{0}\right\} \end{cases}.$$

dim F	**F**	**f**	**|M|**
0	$F = \left\{\vec{0}\right\}$	$-I_{V_1}$	-1
1	$F = V_1$	I_{V_1}	1

Resumen:

Como vemos, por ser dim $V_1=1$ entonces la matriz asociada es de orden 1, es decir, es una constante que vale 1 o -1.

$$\begin{cases} O^+(V_1) = \left\{I_{V_1}\right\} \\ O^-(V_1) = \left\{-I_{V_1}\right\} \end{cases}.$$

2.5. Transformaciones ortogonales de V_2. Clasificación y ecuaciones

Sea $f: V_2 \to V_2$ transformación ortogonal y F el subespacio de vectores invariantes por f. Sabemos que, fijada previamente una base ortonormal, f está definida por una matriz M ortogonal tal que $f\left(\vec{u}\right) = M\vec{u},\ \forall \vec{u} \in V_n$. Se trata pues, de estudiar los tipos de matrices ortogonales de orden 2.

Si M es ortogonal, entonces $\begin{cases} M^t = M^{-1} \\ |M| = \pm 1 \end{cases}$.

$$\text{Sea } M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \dfrac{1}{|M|}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \\ |M| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \pm 1 \end{cases}$$

Caso 1º: $|M| = 1$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d = a \\ c = -b \end{cases} \\ |M| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a^2 + b^2 = 1$$

Caso 2º: $|M| = -1$

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d = -a \\ c = b \end{cases} \\ |M| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = -1 \end{array}\right. \Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}; a^2 + b^2 = 1$$

Como en ambos casos $a^2 + b^2 = 1$ podemos considerar $\alpha \in R$ tal que $\begin{cases} a = \cos\alpha \\ b = \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$. Por tanto, las matrices ortogonales de orden 2, se pueden clasificar en dos tipos que designaremos M_1 y M_2:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{observaciones: } \begin{cases} \text{si } \alpha = 0^{\circ} \Rightarrow M_1 = I_2 \\ \text{si } \alpha = 180^{\circ} \Rightarrow M_1 = -I_2 \end{cases} \Rightarrow |M_1| = 1$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow |M_2| = -1$$

2.5.1. Estudio de $O^{+}(V_2)$

Definición: Los elementos de $O^{+}(V_2)$ se llaman rotaciones o giros vectoriales de V_2. y su matriz asociada es del tipo M_1.Se designa por g_α la **rotación de ángulo** α

Teorema: $O^{+}(V_2)$ es un grupo conmutativo respecto de la composición. En efecto, basta ver que es un grupo respecto del producto.

1. El producto de matrices del tipo M_1 es una matriz del tipo M_1:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}, \text{ luego } g_\alpha \circ g_\beta$$

2. Se verifica la propiedad asociativa (por verificarse en general para el producto de matrices cuadradas).

3. El elemento unidad es $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luego $g_{0^{\circ}}$ es la rotación unidad

4. Por ser M_1 ortogonal, su inversa es su traspuesta

$$M_1^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}, \text{ por tanto, } g_\alpha^{-1} = g_{-\alpha}$$

5. Conmutativa

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

luego $g_\alpha \circ g_\beta = g_{\alpha+\beta} = g_\beta \circ g_\alpha$

Elementos involutivos de $O^+(V_2)$. Hay que estudiar para qué valores de α se verifica que $g_\alpha^2 = I_{V_2} \Leftrightarrow M_1^2 = I_2$:

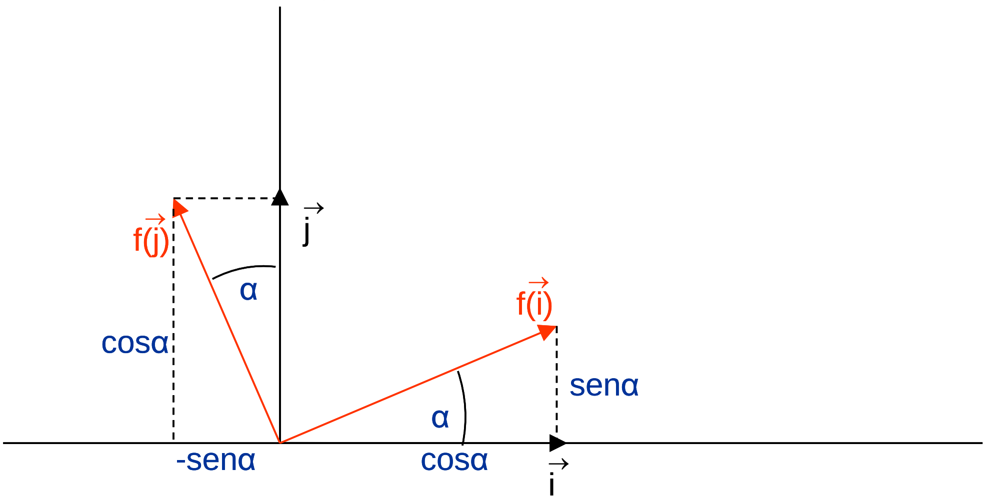
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\operatorname{sen}2\alpha \\ \operatorname{sen}2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0^\circ, \text{luego se trata de } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matriz asociada a } I_{V_2} \\ \alpha = 180^\circ, \text{luego se trata de } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ matriz asociada a } -I_{V_2} \end{cases}$$

Luego $O^+(V_2)$ es un grupo conmutativo y sus únicos elementos involutivos son: I_{V_2}, $-I_{V_2}$.

Interpretación geométrica: Sea $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ base canónica de V2 y g_α la rotación de ecuación $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces los transformados de los vectores de la base canónica $\{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\}$, son:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = f(\vec{i}) \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = f(\vec{j}) \end{cases}$$



La base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ se ha transformado en la base $\{f(\vec{i}), f(\vec{j})\}$ girada con respecto a la anterior un ángulo α. Para cualquier vector $\vec{v} \in V_n$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j}$, se verifica que $f(\vec{v}) = \lambda f(\vec{i}) + \mu f(\vec{j})$ lo que significa una rotación de ángulo α.

Vectores invariantes por una rotación vectorial:

1. Si $f \in O^+(V_2)$ y $f = I_{V_2}$, entonces $f(\vec{u}) = \vec{u}, \forall \vec{u} \in V_2$ luego $F = V_2$ es el subespacio de vectores invariantes por I_{V_2}.

2. Si $f \in O^+(V_2)$ y $f \neq I_{V_2}$, entonces el subespacio de vectores invariantes es $F = \{\vec{0}\}$.
En efecto, sean (x, y) las coordenadas de un vector $\vec{u} \in V_2$ respecto de una base ortonormal B de V_2. Si $\vec{u}$ es invariante por f, $f(\vec{u}) = \vec{u}$, es decir,

$$M_1\vec{u} = \vec{u} \Leftrightarrow (M_1 - I)\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ y como

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - 1 & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - 1 \end{vmatrix} = 2(1-\cos\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \forall\alpha \neq 0^\circ$$, entonces el conjunto de vectores invariantes es el conjunto solución de un sistema homogéneo determinado, luego $\vec{u} = \vec{0}$, por tanto $F = \{\vec{0}\}$.

2.5.2. Estudio de $O^-(V_2)$

Teorema: Si $f \in O^-(V_2)$, entonces f es involutiva y $f \neq I_{V_2}, f \neq -I_{V_2}$.

En efecto: Sea $f \in O^-(V_2)$, su matriz asociada es del tipo $M_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

Ahora bien, $M_2^2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir, $M_2^2 = I_{V_2} \Leftrightarrow f^2 = I_{V_2} \Leftrightarrow f$ involutiva y al ser $|M_2| = -1$, se verifica que $f \neq I_{V_2}, f \neq -I_{V_2}$

Corolario: Si $f \in O^-(V_2)$, entonces f es una simetría ortogonal de V_2 respecto de una recta vectorial, es decir, f es una **simetría axial vectorial**, se designa por s_e, donde e =F, subespacio de vectores invariantes.

En efecto: por ser f involutiva f es una simetría ortogonal de V_2. Además, si F es el subespacio de vectores invariantes por f, entonces

$$\begin{cases} F \neq V_2 \text{ puesto que } f = I_{V_2} \in O^+(V_2), \text{ luego } \dim F \neq 2 \\ F \neq \{\vec{0}\} \text{ puesto que } f = -I_{V_2} \in O^+(V_n), \text{ luego } \dim F \neq 0 \end{cases}$$

Por tanto, dim F=1 $\Leftrightarrow$ F= recta vectorial y, por tanto, f es una simetría axial vectorial cuyo eje es F.

Proposición: La pendiente del eje F de una simetría axial de V_2 es $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Por ser $f \in O^-(V_2)$, su matriz asociada es: $M_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$; y F: subespacio de vectores invariantes, es el conjunto solución de la ecuación $M_2\vec{u} = \vec{u} \Leftrightarrow (M_2 - I)\vec{u} = \vec{0}$.

Si (x, y) son las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de una base ortonormal B de V_2, entonces,

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} \cos\alpha-1 & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha-1 \end{vmatrix}=1-\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=0 \text{, luego}$$

rango(M_2-I)=1, luego el sistema es compatible indeterminado y equivalente a $(\cos\alpha-1)x+\operatorname{sen}\alpha\ y=0$, que es una recta vectorial cuya pendiente es:

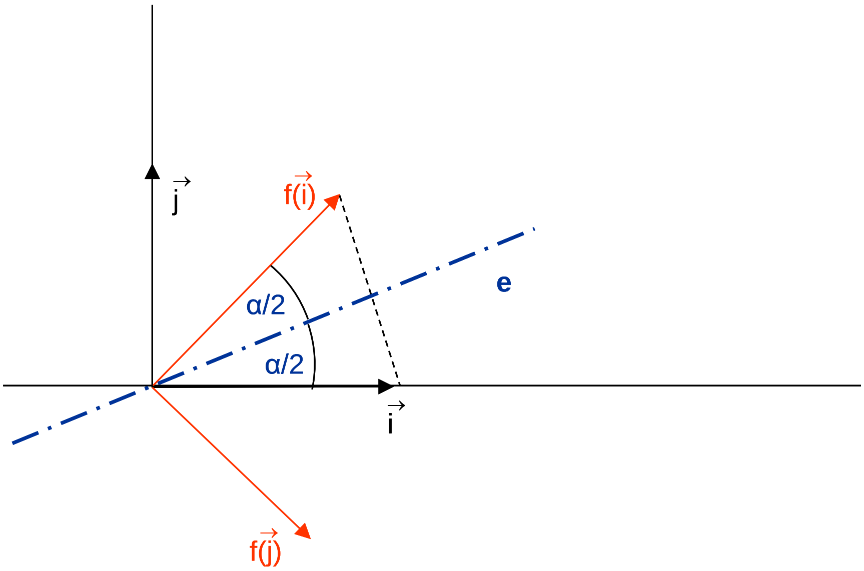
$$m=\frac{-(\cos\alpha-1)}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Por tanto, la pendiente del eje de una simetría axial es $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Interpretación geométrica: Sea $\{\vec{i},\vec{j}\}$ la base canónica de V_2 y s_e la simetría cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}=M_2$. Hemos calculado su eje $e=F\equiv(\cos\alpha-1)x+\operatorname{sen}\alpha\ y=0$ y un vector director es $(-\operatorname{sen}\alpha\ ,\cos\alpha-1)=\vec{v}$.

Por otro lado, dado $\vec{i}=(1,0)$, su transformado por s_e es $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}=f(\vec{i})$. Observamos que el vector $f(\vec{i})-\vec{i}=(\cos\alpha-1,\operatorname{sen}\alpha)$ es perpendicular a $\vec{v}$, luego $f(\vec{i})-\vec{i}\perp e$.

Además $\text{áng}\left(f(\vec{i}),e\right)=\alpha-\text{áng}\left(e,\vec{i}\right)=\frac{\alpha}{2}=\text{áng}\left(e,\vec{i}\right)$.



Análogamente $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}=f(\vec{j})$ y $f(\vec{j})-\vec{j}=(\operatorname{sen}\alpha,-\cos\alpha-1)\perp e$. Y $\text{áng}\left(f(\vec{j}),e\right)=\alpha-\text{áng}\left(e,\vec{j}\right)=\frac{\alpha}{2}=\text{áng}\left(e,\vec{j}\right)$. Luego la

base $\left\{\vec{i}=(1,0), \vec{j}=(0,1)\right\}$ se ha transformado en la base $\left\{f(\vec{i}), f(\vec{j})\right\}$ cuyos vectores son simétricos respecto del eje e.
La base $\left\{f(\vec{i}), f(\vec{j})\right\}$ tiene orientación contraria a la de la base $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$.

Para cualquier vector $\vec{v} \in V_n$ tal que $\vec{v}=\lambda\vec{i}+\mu\vec{j}$, se verifica que $f(\vec{v})=\lambda f(\vec{i})+\mu f(\vec{j})$ es simétrico de $\vec{v}$ respecto de la recta e.

2.5.3. __Teorema__:

1. El producto de un giro y una simetría axial de V_2 es una simetría axial de V_2; es decir, dados $g \in O^{+}(V_2)$ y $s \in O^{-}(V_2)$, entonces $g \circ s$ y $s \circ g$ son elementos de $O^{-}(V_2)$.

En efecto: La matriz asociada a g es del tipo M_1 con $|M_1|=1$ y la matriz asociada a s es del tipo M_2 con $|M_2|=-1$.
Por otro lado, las matrices asociada a $g \circ s$ y $s \circ g$ son $M_1 \cdot M_2$ y $M_2 \cdot M_1$ respectivamente y $\begin{cases} |M_1 \cdot M_2| = |M_1||M_2| = -1 \\ |M_2 \cdot M_1| = |M_2||M_1| = -1 \end{cases}$, luego $g \circ s$ y $s \circ g \in O^{-}(V_2)$.

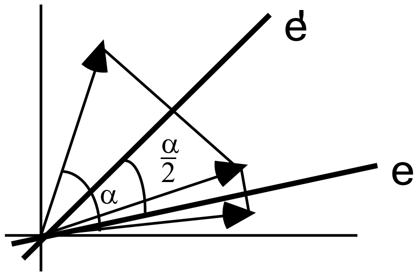
2. a) Toda rotación vectorial de V_2 se descompone en el producto de dos simetrías axiales de V_2, pudiendo elegirse arbitrariamente una de ellas.

En efecto: Dada $g \in O^{+}(V_2)$, consideramos $s \in O^{-}(V_2)$ arbitraria, al ser S involutiva se verifica que $\begin{cases} g = g \circ s \circ s = (g \circ s) \circ s \\ \text{O bien,} \\ g = s \circ s \circ g = s \circ (s \circ g) \end{cases}$

Por el apartado **1** y llamando $\begin{cases} s' = g \circ s \in O^{-}(V_2), \text{ resulta que } g = s' \circ s \\ s'' = s \circ g \in O^{-}(V_2), \text{ resulta que } g = s \circ s'' \end{cases}$.

Es fácil comprobar que el ángulo de la rotación es el doble del formado por los ejes de las simetrías.

dim F	**F**	**f**	$\lvert M \rvert$
0	$\{\vec{0}\}$	rotación vectorial g_α	1
1	recta de pendiente $\alpha/2$	simetría axial s_e	-1
2	V_2	identidad I_{V_2}	1



b) Recíprocamente, el producto de dos simetrías axiales vectoriales de V_2 es una rotación vectorial, ya que el determinante de la matriz asociado a dicho producto vale 1. (Además el ángulo de la rotación es el doble del formado por los ejes de las simetrías).

2.5.4. **<u>Resumen y ecuaciones</u>:** Sea f una transformación ortogonal de V_2, F subespacio de vectores invariantes y M su matriz asociada.

$$\text{Luego } \begin{cases} O^+(V_2) = \{\text{rotaciones de } V_2\} \\ O^-(V_2) = \{\text{simetrías axiales de } V_2\} \end{cases}$$

Dada una base ortonormal B de V_2. Si $\vec{u} = (x, y)$; $f(\vec{u}) = (x', y')$ son las coordenadas respecto de B, entonces:

i) Ecuación de la rotación de ángulo α: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ii) Ecuación de la simetría axial cuyo eje tiene de pendiente $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.6. Transformaciones ortogonales de V_3. Clasificación y ecuaciones.

<u>Proposición previa</u>: Sea f una transformación ortogonal de V_3 y $F \subset V_3$ el subespacio de vectores invariantes por f.
Se verifica que la restricción de f a $F^\perp$, que designamos por $f|_{F^\perp}$, es también una transformación ortogonal de $F^\perp$ cuyo subespacio de vectores invariantes es $\{\vec{0}\}$.

En efecto, bastaría comprobar que $f|_{F^\perp}(F^\perp) = F^\perp$. Como $F \oplus F^\perp = V_3$ y f es biyectiva y lineal, entonces:
$V_3 = f(V_3) = f(F \oplus F^\perp) = f|_F(F) + f|_{F^\perp}(F^\perp) = F + f|_{F^\perp}(F^\perp)$, además por conservar f la ortogonalidad $f|_{F^\perp}(F^\perp) \perp F$, luego $F \cap f|_{F^\perp}(F^\perp) = \{\vec{0}\}$.

Por tanto, $F \oplus f\big|_{F^\perp}\left(F^\perp\right) = V_3$. La unicidad del ortogonal nos conduce a establecer que $f\big|_{F^\perp}\left(F^\perp\right) = F^\perp$. Luego $f\big|_{F^\perp}$ es una transformación ortogonal de $F^\perp$ cuyo subespacio de vectores invariantes es $F \cap F^\perp = \left\{\vec{0}\right\}$.

Clasificación de las transformaciones ortogonales de V_3

Lo haremos según la dimensión de F y la transformación ortogonal $f\big|_{F^\perp}$.

Caso 1º: La identidad.

Consideramos la hipótesis:

dim F = 3 $\Leftrightarrow$ $F = V_3$, entonces $f = I_{V_3}$ y su matriz asociada es $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \left|I_3\right| = 1$

Respecto de cualquier base ortonormal de V_3, la ecuación matricial de f es:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Abreviadamente, $\boxed{X'=X}$.

Caso 2º: Simetría especular de V_3.

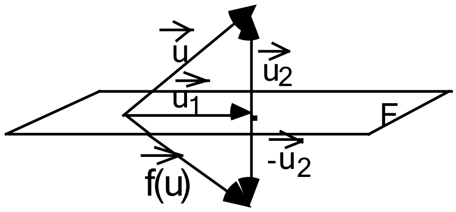
Consideramos la hipótesis dim F =2 $\Leftrightarrow$ F es un plano vectorial y $F^\perp$ es la recta ortogonal a F, entonces $f\big|_{F^\perp} : F^\perp \to F^\perp$ es una transformación ortogonal de $F^\perp$ ($F^\perp \approx V_1$) cuyo subespacio de vectores invariantes es $F \cap F^\perp = \left\{\vec{0}\right\}$, por tanto según **2.4.** $f\big|_{F^\perp} = -I_{F^\perp}$.

Es decir: $\forall \vec{u} \in V_3$ tal que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\vec{u}_1 \in F$ y $\vec{u}_2 \in F^\perp$ se verifica que $f\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right) = f\left(\vec{u}_1\right) + f\left(\vec{u}_2\right) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, luego f es una simetría ortogonal respecto del plano F. Se designa por s_F.

Ecuación: Si consideramos una base ortonormal $\left\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\right\}$ de F y el vector unitario $\left\{\vec{v}_1\right\}$ de $F^\perp$ tal que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$, entonces $B = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right\}$ es una base ortonormal de V_3 (de igual orientación que la base canónica), respecto de la cual,

$\begin{cases} f\left(\vec{v}_1\right) = -\vec{v}_1 \\ f\left(\vec{v}_2\right) = \vec{v}_2 \\ f\left(\vec{v}_3\right) = \vec{v}_3 \end{cases}$, y la matriz asociada a s_F es: $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \left|M_1\right| = -1$. Luego respecto de B la ecuación matricial de f es: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Se trata de la **identidad**.

Abreviadamente escribiremos $\boxed{X' = M_1 X}$.



Recíprocamente, toda transformación ortogonal de V_3 cuya ecuación respecto de una base B ortonormal sea $X'= M_1X$ es una simetría ortogonal respecto del plano coordenado XY.

Teorema: Una transformación ortogonal de V_3 es una simetría ortogonal respecto de un plano, si y solo si, el subespacio F de vectores invariantes tiene dimensión 2. F es el plano base de la simetría. La denotaremos por s_π $(\pi = F)$ y se denomina **simetría especular** de V_3 de base $(\pi = F)$.

Caso 3º: Rotación de V_3

Consideramos la hipótesis dim F=1 $\Leftrightarrow$ F= recta vectorial, luego $F^\perp$ es el plano vectorial ortogonal a F ($F^\perp \approx V_2$) y $f|_{F^\perp} : F^\perp \to F^\perp$ es una transformación ortogonal del plano euclídeo cuyo único vector invariante es $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$, por tanto, $f|_{F^\perp}$ es una rotación vectorial del plano $F^\perp$:

Definición: Llamaremos **rotación vectorial** de V_3, a toda transformación ortogonal f de V_3, cuyo subespacio F de vectores invariantes sea una recta (dim F= 1). A la recta vectorial F se le denomina eje de la rotación y, el ángulo α de la rotación $f|_{F^\perp}$, es el ángulo de la rotación. Se designa por $g_{(e,\alpha)}$ donde e=F.

Ecuación: Si consideramos $\langle\{\vec{v}_1\}\rangle$ base de F , $|\vec{v}_1| = 1$, y $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ base ortonormal de $F^\perp$, tal que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$, entonces $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base ortonormal de V_3 (de igual orientación que la base canónica), respecto de la cual la matriz asociada a $g_{(e,\alpha)}$ es:

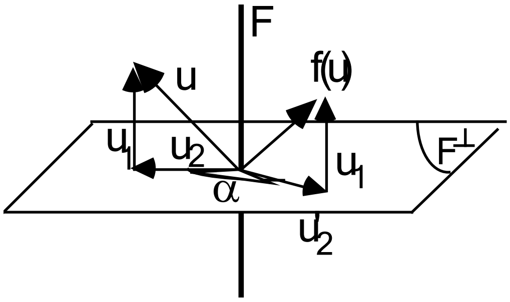
$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; |M_2| = 1 \text{ por ser,}$$

$$\begin{cases} f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 = (1,0,0) \\ f(\vec{v}_2) = \cos\alpha\vec{v}_2 + \operatorname{sen}\alpha\vec{v}_3 = (0, \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \\ f(\vec{v}_3) = -\operatorname{sen}\alpha\vec{v}_2 + \operatorname{sen}\alpha\vec{v}_3 = (0, -\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha) \end{cases}$$, y la ecuación matricial es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$. Abreviadamente $\boxed{X' = M_2\, X}$

Si $\alpha = 0º$, entonces $g_{(e,\ \alpha=0º)} = I_{V_3}$ (**identidad**).

Recíprocamente, toda transformación ortogonal de V_3 que respecto de una base B ortonormal tiene de ecuación $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es una **rotación vectorial** de ángulo α alrededor del eje X



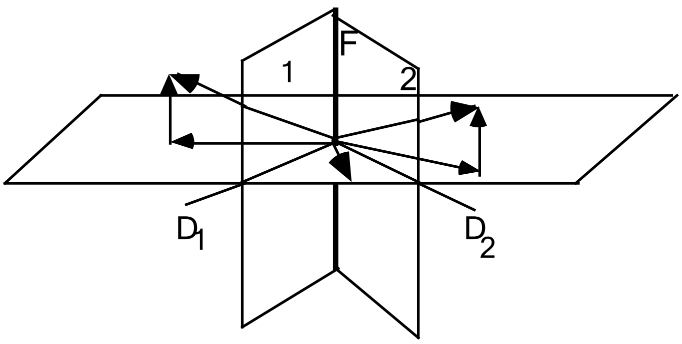
$\vec{u}'_2$ es el vector resultante de girar $\vec{u}_2$ un ángulo α en el plano $F^{\perp}$.

Teorema: Toda rotación vectorial f=$g_{(e,\alpha)}$ de eje e=F, se descompone en el producto de dos simetrías especulares vectoriales cuyos planos de vectores invariantes se cortan según F, pudiéndose elegir libremente una de ellas. Y recíprocamente, el producto de dos simetrías especulares es una rotación cuyo eje es la recta intersección de los planos bases de las simetrías y de ángulo el doble del formado por dichos planos.

En efecto: Sabemos que $f|_{\pi}$ es una rotación vectorial en el plano $F^{\perp}$ existen, por tanto 2 simetrías axiales (una de ellas elegida libremente) s_1 y s_2 tales que $f|_{F^{\perp}} = s_2 \circ s_1$. Sean D_1 y D_2 los ejes de s_1 y s_2 respectivamente y llamamos $\begin{cases} \pi_1 = D_1 + F \\ \pi_2 = D_2 + F \end{cases}$.

Si consideramos las simetrías especulares respecto de los planos π_1 y π_2 y las denominamos s_{π_1} y s_{π_2} respectivamente, entonces $f = s_{\pi_1} \circ s_{\pi_2}$ puesto que el subespacio de vectores invariantes es la recta $\pi_1 \cap \pi_2 = F$. Además como su restricción a $F^{\perp}$ es una rotación de ángulo α, entonces, $\frac{\alpha}{2} = \text{áng}(D_1, D_2) = \text{áng}(\pi_1, \pi_2)$.

El recíproco es evidente.



Corolario: El producto de un número par de simetrías especulares de V_3 es una rotación de V_3.

Observaciones: 1º $O^{+}(V_3)=\{\text{conjunto de las rotaciones de } V_3\}$

2º Si $\alpha=0º$,entonces $f=I_{V_3}$, y si $\alpha=180º$ entonces f=$g_{(F;180º)}$ es una simetría axial. Por tanto, los elementos involutivos de $0^{+}(V_3)$ son la identidad y las simetrías axiales.

Teorema: $O^{+}(V_3)$ es un subgrupo de $O(V_3)$.

Basta ver que es cerrado respecto de la composición y hallar la rotación inversa de una rotación dada.

En efecto: Sean g y g' $\in O^{+}(V_3)\Rightarrow \exists s_1,s_2,s_3$ simetrías especulares tales que:

$$\begin{cases} g=s_2\circ s_1 \\ g'=s_3\circ s_2 \end{cases} \Rightarrow g'\circ g=s_3\circ s_2\circ s_2\circ s_1=s_3\circ s_1\in 0^{+}(V_3).$$

Además, si $g=s_2\circ s_1\Rightarrow g^{-1}=(s_2\circ s_1)^{-1}=s_1^{-1}\circ s_2^{-1}=s_1\circ s_2\in 0^{+}(V_3)$

Caso 4º: Simetría rotacional de V_3.

Consideramos la hipótesis dim F = 0 $\Leftrightarrow F=\langle\{\vec{0}\}\rangle$. Vamos a demostrar que f se descompone de manera única, salvo cuando $f=-I_{V_3}$, en el producto de una simetría especular y una rotación de V_3 cuyos subespacios de vectores invariantes respectivos son ortogonales. Además, este producto es conmutativo. A esta clase de transformaciones ortogonales las llamamos simetrías rotacionales vectoriales.

Designemos por M la matriz asociada a f respecto de una base ortonormal dada Por ser $M\in M(3x3)$ su polinomio característico $P(\lambda)=|M-\lambda I_3|$ es de tercer grado, luego posee al menos una raíz real. Ahora bien, por ser f ortogonal, sólo admite por valores propios reales 1 y/o -1 (propiedad **5** de **1.4**) pero $\lambda\neq 1$ pues entonces $F\neq\langle\{\vec{0}\}\rangle$, luego $\boxed{\lambda=-1}$ es un valor propio de M (con multiplicidad simple o triple).

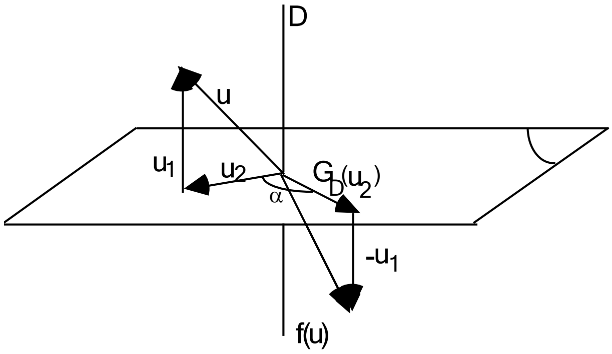
Sea $\vec{v}_1\in V_3$ vector propio unitario asociado a $\lambda=-1$. Consideramos la recta D de dirección $\vec{v}_1$, y el plano π ortogonal a D ($\pi+D=V_3$). La transformación $f|_{\pi}$ .es una transformación ortogonal del plano π cuyo subespacio de vectores invariantes es $\pi\cap F=\langle\{\vec{0}\}\rangle$, luego $f|_{\pi}$ es una rotación de π.

Sea g_D la rotación vectorial de eje D y ángulo α, tal que $g_D|_{\pi}=f|_{\pi}$, se verifica que $f=s_{\pi}\circ g_D$ y su subespacio de vectores invariantes es $\pi\cap D=\langle\{\vec{0}\}\rangle$.

Además, este producto es conmutativo.

$\forall\vec{u}\in V_3=D\oplus\pi$, es $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2$ donde $\vec{u}_1\in D$ $\vec{u}_2\in\pi$, por tanto

$$\begin{cases} s_{\pi}\circ g_D(\vec{u})=s_{\pi}\circ g_D(\vec{u}_1+\vec{u}_2)=s_{\pi}[\vec{u}_1+g_D(\vec{u}_2)]=-\vec{u}_1+g_D(\vec{u}_2) \\ s_D\circ g_{\pi}(\vec{u})=g_D\circ s_{\pi}(\vec{u}_1+\vec{u}_2)=g_D[(-\vec{u}_1)+(\vec{u}_2)]=-\vec{u}_1+g_D(\vec{u}_2) \end{cases}$$



Veamos que la descomposición es única, salvo en el caso $f=-I_{V_3}$ Supongamos que existen s_π y $g_{D'}$ tales que $s_\pi \circ g_D = s_{\pi'} \circ g_{D'}$ entonces $(S_\pi \circ G_D)^2 = (S_{\pi'} \circ G_{D'})^2$, pero:

$$\begin{cases} (s_\pi \circ g_D)^2 = s_\pi \circ g_D \circ s_\pi \circ g_D = g_D \circ s_\pi \circ s_\pi \circ g_D = g_D^2 \\ (s_{\pi'} \circ g_{D'})^2 = s_{\pi'} \circ g_{D'} \circ s_{\pi'} \circ g_{D'} = g_{D'} \circ s_{\pi'} \circ s_{\pi'} \circ g_{D'} = g_{D'}^2 \end{cases}$$ luego $g_D^2 = g_{D'}^2$ y por tanto:

$$\begin{cases} D = D' \quad \text{y por tanto } \pi=\pi' \\ \text{o bien} \\ \text{el ángulo de rotación es de } 180° \text{ y } s_\pi \circ g_D = s_{\pi'} \circ g_{D'} = -I_{V_3} \end{cases}$$ siendo $D \neq D'$ y $\pi \neq \pi'$.

Ecuación: Sea ahora $\vec{v}_1$ vector unitario de D y $\{\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ una base ortonormal de π, tal que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ entonces $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ es una base ortonormal de V_3 (de igual orientación que la base canónica).

Respecto de la base B, la matriz asociada es $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; $|M_3| = -1$, por ser $\begin{cases} f(\vec{v}_1) = -\vec{v}_1 = (-1,0,0) \\ f(\vec{v}_2) = \cos\alpha\vec{v}_2 + \operatorname{sen}\alpha\vec{v}_3 = (0,\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha) \\ f(\vec{v}_3) = -\operatorname{sen}\alpha\vec{v}_2 + \operatorname{sen}\alpha\vec{v}_3 = (0,-\operatorname{sen}\alpha,\cos\alpha) \end{cases}$ y la ecuación de f, respecto de B es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$ Abreviadamente $\boxed{X'=M_3X}$.

Obsérvese que $M_3 = M_2 \cdot M_1 = M_1 \cdot M_2$ dónde $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ son las matrices asociadas a s_π y g_D, respectivamente, respecto de la base B.

Recíprocamente la ecuación $X'=M_3 \cdot X$ es la de una simetría rotacional de V_3. Acabamos de demostrar el siguiente teorema que caracteriza las simetrías rotacionales

Teorema: Toda transformación ortogonal de V_3 cuyo subespacio de vectores invariantes sea F = $\{\vec{0}\}$ es una simetría rotacional y viceversa.

Corolario 1: Toda simetría rotacional se descompone en producto de tres simetrías vectoriales especulares dónde uno de los planos es perpendicular a los otros dos.

Corolario 2: Si f es una simetría rotacional vectorial, entonces f^2 es una rotación vectorial de V_3.

2.6.5. Tabla resumen de las transformaciones ortogonales de V_3

Sea f una transformación ortogonal de V_3, F el subespacio de vectores invariantes por f y M la matriz que define la transformación.

dim F	F	f	$\lvert M\rvert$
3	V_3	identidad I_{V_3}	1
2	plano vectorial π	Simetría especular s_π	-1
1	recta vectorial e	Rotación $g_{(e,\alpha)}$	1
0	$\langle\{\vec{0}\}\rangle$	Simetría rotacional	-1

Luego $\begin{cases} O^+(V_3) = \{\text{rotaciones de eje e}\} \\ O^-(V_3) = \begin{Bmatrix} \text{simetrías especulares} \\ \text{simetrías rotacionales} \end{Bmatrix} \end{cases}$

2.7. Tabla resumen de transformaciones ortogonales de V_n.

Designamos por V_n al espacio vectorial euclídeo de dimensión n, con n=1, 2, 3; f la transformación ortogonal de V_n; F el subespacio de vectores invariantes de f y M la matriz ortogonal asociada a f.

n	dim F	F	f	$\lvert M\rvert$
1	1	V_1	Identidad, I_{V_1}	1
	0	$\langle\{\vec{0}\}\rangle$	Simetría central $-I_{V_1}$	-1
2	2	V_2	Identidad , I_{V_2}	1
	1	recta vectorial	Simetría axial de eje F	-1
	0	$\langle\{\vec{0}\}\rangle$	Rotación vectorial de ángulo α	1
3	3	V_3	Identidad , I_{V_3}	1
	2	plano vectorial	Simetría especular de plano F	-1
	1	recta vectorial	Rotación vectorial de eje F	1
	0	$\langle\{\vec{0}\}\rangle$	Simetría rotacional	-1

Además, hemos demostrado:

En V_2:
Toda rotación vectorial se descompone en el producto de dos simetrías axiales vectoriales (una elegida arbitrariamente).

En V_3:
i) Toda rotación vectorial se descompone en el producto de dos simetrías especulares vectoriales (una elegida arbitrariamente).

ii) Toda simetría rotacional se descompone en el producto de tres simetrías especulares vectoriales.

2.8 Teorema de descomposición de transformaciones ortogonales (1):

Toda transformación ortogonal de V_n, se descompone a lo sumo en n simetrías ortogonales vectoriales respecto de hiperplanos.

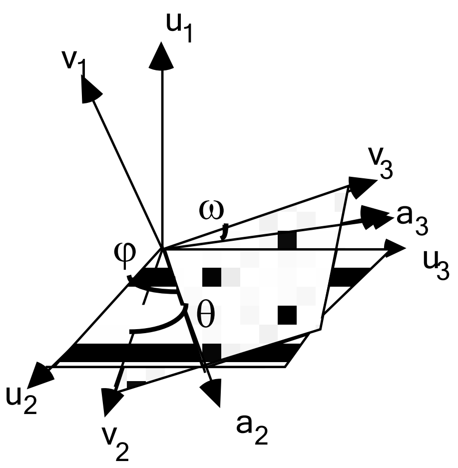
Para acabar este capítulo vamos a estudiar la descomposición de una rotación de V_3 en producto de tres rotaciones respecto de los ejes de coordenadas.

Teorema: Toda rotación vectorial de V_3, de eje arbitrario, se puede descomponer como el producto de 3 rotaciones vectoriales respecto de ejes de coordenadas.

Esta descomposición no es única. A continuación, se demuestra cómo descomponer una rotación vectorial, de eje arbitrario de V_3 como producto de tres rotaciones vectoriales respecto de los ejes x, y, z respectivamente.

En efecto, sabemos que toda rotación vectorial de V_3 transforma bases ortogonales en bases ortonormales de igual orientación Y viceversa: Todo cambio de base ortonormal a base ortonormal, definido por una matriz M cuyo determinante $|M| = 1$ define una rotación vectorial de V_3.

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ la base usual de V_3, que mediante la rotación $g_{(e,\alpha)}$, se transforma en $B^* = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$



Buscamos un vector $\vec{a}_2$ tal que $\begin{cases}\vec{a}_2 \perp \vec{u}_1 \\ \vec{a}_2 \perp \vec{v}_3\end{cases}$, y unitario: $\begin{cases}\vec{a}_2 \in \langle\{\vec{u}_2,\vec{u}_3\}\rangle \perp \vec{u}_1 \\ \vec{a}_2 \in \langle\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}\rangle \perp \vec{v}_3\end{cases}$, luego: $\vec{a}_2 \in \langle\{\vec{u}_2,\vec{u}_3\}\rangle \cap \langle\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}\rangle$.

Se verifica que la base de vectores $\{\vec{u}_1,\vec{a}_2,\vec{u}_1 \wedge \vec{a}_2\}$ es ortonormal y su orientación es igual a la de $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$. Si llamamos $\vec{a}_1 = \vec{u}_1$, y $\vec{a}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{a}_2$, tendremos que existe una rotación de eje la recta vectorial definida por $\vec{u}_1$ (eje x) y ángulo φ, tal que $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\} \xrightarrow{G(\vec{u}_1,\varphi)} \{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$.

Su matriz asociada es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ y su ecuación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Denominemos $B' = \{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$.

Consideramos ahora, la base de vectores $\{\vec{a}_2 \wedge \vec{v}_3,\vec{a}_2,\vec{v}_3\}$ que también es ortonormal y de igual orientación que B'.

Llamando $\vec{b}_1 = \vec{a}_2 \wedge \vec{v}_3$, $\vec{b}_2 = \vec{a}_2$, $\vec{b}_3 = \vec{v}_3$, tendremos que existe la rotación alrededor del eje definido por $\vec{a}_2$ (eje y) y ángulo ω tal que: $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\} \xrightarrow{G(\vec{a}_2,\varpi)} \{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$ cuya matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} \cos\varpi & 0 & \operatorname{sen}\varpi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varpi & 0 & \cos\varpi \end{pmatrix} \text{ y tiene por ecuación } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varpi & 0 & \operatorname{sen}\varpi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varpi & 0 & \cos\varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Denominemos $B'' = \{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$

Por último, consideramos la base $B^* = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$, que es por hipótesis, ortonormal y de igual orientación que B'' , existe por tanto una rotación de eje definido por $\vec{b}_3 = \vec{v}_3$ (eje z) y ángulo θ tal que: $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\} \xrightarrow{G(\vec{b}_2,\theta)} \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$, cuya matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y su ecuación es } \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Resumiendo, la rotación $g(e,\alpha)$ que transforma la base $B = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ en $B^* = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$, se puede descomponer de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\} & \xrightarrow{G(\vec{u}_1,\varphi)} & \{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\} & \xrightarrow{G(\vec{a}_2,\varpi)} & \{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\} & \xrightarrow{G(\vec{b}_2,\theta)} & \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\} \\ X & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & X^* \end{array}$$

y su ecuación será:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varpi & 0 & \text{sen}\,\varpi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\varpi & 0 & \cos\varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varpi & 0 & \text{sen}\,\varpi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\varpi & 0 & \cos\varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varpi & 0 & \text{sen}\,\varpi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\varpi & 0 & \cos\varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\text{sen}\,\varphi \\ 0 & \text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO TERCERO

3. Movimientos del Espacio Afín Euclídeo

Todo movimiento (isometría) T de E_n tiene de ecuación, $T(X)=T(A)+f\left(\overrightarrow{AX}\right)$**, dónde A es un punto cualquiera de E_n y f es la aplicación asociada de V_n.** Designaremos $X'=T(X), \forall X\in E_n$.

Análogamente a como hicimos en el espacio vectorial euclídeo, definimos en primer lugar, las simetrías ortogonales de E_n.

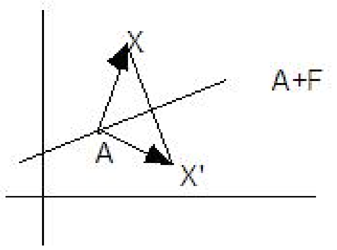
3.1. Simetrías ortogonales. Clasificación.

3.1.1 **Definición:** Sea $\boldsymbol{F}$ una variedad lineal, no vacía, del espacio euclídeo E_n de dirección F (F: subespacio vectorial de V_n), luego $\boldsymbol{F}=A+F$, donde A es un punto cualquiera de $\boldsymbol{F}$.

Simetría ortogonal respecto de $\boldsymbol{F}$ es la simetría de base $\boldsymbol{F}$ y dirección $F^{\perp}$. Se representa por $S_{\boldsymbol{F}}$. y si designamos $S_{\boldsymbol{F}}(X)=X'$, su ecuación es $X'=A+S_F\left(\overrightarrow{AX}\right)$, para cualquier $X\in E_n$, siendo S_F. la simetría vectorial asociada.

Obviamente los puntos de $\boldsymbol{F}$ son invariantes por la simetría $S_{\boldsymbol{F}}$.

Interpretación geométrica:



Gráficamente el par X, X' cumple que $\begin{cases}\overline{XX'}\perp \boldsymbol{F}\\ d(X,\boldsymbol{F})=d(X',\boldsymbol{F})\end{cases}$

3.1.2. **Teorema:** Un movimiento de E_n es **involutivo** si y solo si es una simetría ortogonal.

En efecto: sea $T:E_n\to E_n$ involutivo y $f:V_n\to V_n$ su transformación ortogonal asociada, entonces:

Si T es involutivo, entonces $T^2=I_{E_n}\Rightarrow f^2=I_{V_n}\Leftrightarrow$ f involutiva $\Leftrightarrow$ f simetría ortogonal vectorial respecto de un subespacio vectorial F. Ahora bien, siempre existe $A\in E_n$ tal que $T(A)=A$ (basta tomar $A=\dfrac{X+T(X)}{2}, \forall X\in E_n$), entonces A+F=$\boldsymbol{F}$ es la base de la simetría ortogonal T. El recíproco es obvio.

3.1.3 **Clasificación de las simetrías ortogonales**

Sea $\boldsymbol{F}$ el conjunto de puntos invariantes, o base, de una simetría $S_{\boldsymbol{F}}$ de E_n:

i) Si $\boldsymbol{F}$ ={A} (dim $\boldsymbol{F}$ = 0), se designa $S_{\boldsymbol{F}} \equiv S_A$ y se denomina **simetría central** de centro A.
ii) Si $\boldsymbol{F}$ es una recta afín e (dim $\boldsymbol{F}$ = 1), se designa $S_{\boldsymbol{F}} \equiv S_e$ y se denomina **simetría axial** de eje e.
iii) Si $\boldsymbol{F}$ = plano afín π (dim $\boldsymbol{F}$ = 2), se designa $S_{\boldsymbol{F}} \equiv S_\pi$ y se denomina **simetría especular** de plano π.
Y en general, si (dim $\boldsymbol{F}$ = dim E_n-1 = n-1), se dice que $S_{\boldsymbol{F}}$ es una simetría respecto del hiperplano afín $\boldsymbol{F}$.

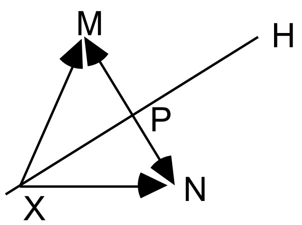
3.1.4. Determinación de una simetría ortogonal respecto de hiperplano

1. Si M, N son dos puntos cualesquiera de E_n, $M \neq N$, entonces existe una unica simetría ortogonal respecto de un hiperplano H, S_H, tal que $S_H(M) = N$. El hiperplano H se llama hiperplano mediatriz de M y N.

2. $H = \{X \in E_n \,/\, d(X,M) = d(X,N)\}$

En efecto:
1. Sean $M, N \in E_n$, $M \neq N$; consideramos el punto medio P del segmento $\overline{MN}$, entonces el hiperplano H_S que pasa por P y es $\perp \overline{MN}$ determina una simetría ortogonal S tal que $S(M) = N$.
Además S es única por ser único el hiperplano H_S.

2. Veamos que $H = H_S$.



Obviamente $H_S \subset H$ ya que $P \in H_S$ y $P \in H$ y $\forall X \in H_S$ es $\begin{cases} \overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{XN} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PN} \end{cases}$ con

$\begin{cases} \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{PN} \\ \overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{XP} \end{cases}$, luego: $\left|\overrightarrow{XM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{XP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{XP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PN}\right|^2 = \left|\overrightarrow{XN}\right|^2 \Rightarrow$
$d(X,M) = d(X,N) \Rightarrow X \in H$.

Veamos que $H \subset H_S$.
Hay que probar que $H \perp \overline{MN}$.
Si $X \in H \Rightarrow \left|\overrightarrow{XM}\right| = \left|\overrightarrow{XN}\right|$ (*) Ahora bien:

$$\begin{cases}\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{XP}-\overrightarrow{PN}\\ \overrightarrow{XN}=\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{PN}\end{cases}\text{(P punto medio de } \overline{MN}\text{)}$$. Entonces:

$$\left|\overrightarrow{XM}\right|^2=\overrightarrow{XM}\cdot\overrightarrow{XM}=\left(\overrightarrow{XP}-\overrightarrow{PN}\right)\cdot\left(\overrightarrow{XP}-\overrightarrow{PN}\right)=\overrightarrow{XP}\cdot\overrightarrow{XP}-2\overrightarrow{XP}\cdot\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{PN}=$$

$$=\left|\overrightarrow{XP}\right|^2-2\overrightarrow{XP}\cdot\overrightarrow{PN}+\left|\overrightarrow{PN}\right|^2.$$

$$\left|\overrightarrow{XN}\right|^2=\overrightarrow{XN}\cdot\overrightarrow{XN}=\left(\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{PN}\right)\cdot\left(\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{PN}\right)=\overrightarrow{XP}\cdot\overrightarrow{XP}+2\overrightarrow{XP}\cdot\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{PN}=$$

$$=\left|\overrightarrow{XP}\right|^2+2\overrightarrow{XP}\cdot\overrightarrow{PN}+\left|\overrightarrow{PN}\right|^2.$$

De $(*)$

$$\left|\overrightarrow{XP}\right|^2-2\overrightarrow{XP}\cdot\overrightarrow{PN}+\left|\overrightarrow{PN}\right|^2=\left|\overrightarrow{XP}\right|^2+2\overrightarrow{XP}\cdot\overrightarrow{PN}+\left|\overrightarrow{PN}\right|^2\Rightarrow-2\overrightarrow{XP}\cdot\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{XP}\cdot\overrightarrow{PN}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{XP}\cdot\overrightarrow{PN}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{XP}\perp\overrightarrow{PN}\ \Rightarrow X\in H_S.$$

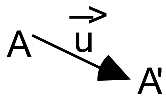
3.2. Movimientos. Planteamiento del problema

Vamos a estudiar las **distintas clases de isometrías o movimientos de E_n, n=1,2,3,** teniendo en cuenta las consideraciones siguientes:

Sea T un movimiento de E_n, f su transformación ortogonal asociada, definida por la matriz ortogonal M respecto de cierta base ortonormal, y F el subespacio vectorial de vectores invariantes por f. Designaremos por ***F*** la variedad lineal de puntos invariantes por T. Se pueden dar 2 casos:

1º). Si $\boldsymbol{F}\neq\varnothing$, es decir, T tiene al menos un punto A invariante, entonces ***F*** =A+F y $\forall X\in E_n$ la ecuación vectorial de T queda $X'=A+f\left(\overrightarrow{AX}\right)\Leftrightarrow X'=A+M\overrightarrow{AX}$. Luego **T está perfectamente determinado por un punto invariante por T y la matriz M de la transformación ortogonal f asociada a T.**

2º) Si $\boldsymbol{F}=\varnothing$, es decir, $\forall X\in E_n\Rightarrow T(X)\neq X$, entonces elegido cualquier punto $A\in E_n$, la ecuación de T es $X'=A'+f\left(\overrightarrow{AX}\right)\Leftrightarrow X'=A+f\left(\overrightarrow{AX}\right)+\overrightarrow{AA'}$. Llamando $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$, queda $X'=A+M\overrightarrow{AX}+\vec{u}$ y vemos que **T está perfectamente determinado por otro movimiento que deja invariante al punto A y el vector $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}\neq\vec{0}$, que define una TRASLACIÓN,** ya que si no hay puntos invariantes por T podemos deducir que existe una traslación de vector no nulo que los ha transformado.



Proposición : Si $\boldsymbol{F}=\varnothing$, entonces f verifica que dimF$\geq$ 1.

Si no hay puntos invariantes por T entonces existen vectores invariantes por f además del vector nulo.

En efecto, la ecuación de T es $X'=A'+f\left(\overrightarrow{AX}\right)\Leftrightarrow X'=X=A'+M\overrightarrow{AX}$ =A'+MX-MA =(A'-MA)+MX. Llamando C=A'-MA, entonces ***F*** es la solución de X=C+MX $\Leftrightarrow$

(I-M)X=C, como $\boldsymbol{F} = \varnothing$, entonces rango(I-M) $\neq$ rango(I-M|C) (sistema incompatible), luego r(I-M)<n; ya que si rango(I-M)=n sería compatible determinado. Por otro lado, los vectores invariantes forman F solución de la ecuación X=MX$\Leftrightarrow$ (I-M)X=$\vec{0}$ y como rango(I-M)<n , resulta que F$\neq\{\vec{0}\}$, luego dimF$\geq$ 1.
Obsérvese que en este caso F es el subespacio propio asociado al valor propio λ=1.

Nota: Demostraremos más adelante que si $\boldsymbol{F} = \varnothing$, se pueden elegir A y $\vec{u}$ de manera que $\vec{u}$ sea paralelo a F.

3.3. Movimientos directos e inversos

Diremos que $T: E_n \to E_n$ es un movimiento **directo** si su transformación ortogonal f asociada verifica que $f \in 0^+(V_n)$ y diremos que se trata de un movimiento **inverso** si $f \in 0^-(V_n)$.

Como, fijada una cierta base ortonormal, f queda definida por su matriz ortogonal M asociada, entonces:

$$\begin{cases} \text{T es un movimiento directo} \Leftrightarrow |M| = 1 \\ \text{T es un movimiento inverso} \Leftrightarrow |M| = -1 \end{cases}$$

3.4. Movimientos de E_1. Clasificación y ecuaciones

Sean T un movimiento de E_1, $f: V_n \to V_n$ su transformación ortogonal asociada, M la matriz que define f, F el subespacio de vectores invariantes por f y $\boldsymbol{F}$ la variedad lineal o subespacio afín de puntos invariantes por T.

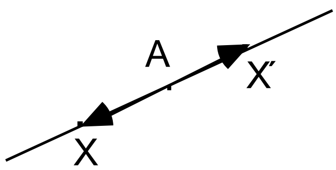
1º Si dim $\boldsymbol{F}$ = 1$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{F} = E_1 \Leftrightarrow T = I_{E_1}$ **(IDENTIDAD)**, y su ecuación es X'=X.

2º Si dim $\boldsymbol{F}$ =0$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{F} = A = A + \{\vec{0}\}$, luego F=$\{\vec{0}\}$, por tanto $f = -I_{V_1}$, y la ecuación de T es:

$$X' = A - I_{V_1}(\overrightarrow{AX}) \Leftrightarrow X' = A - \overrightarrow{AX} \Leftrightarrow X' = 2A - X.$$

T es la SIMETRÍA CENTRAL de centro A. Se designa S_A

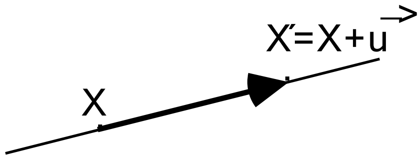
Interpretación geométrica:



3º Si $\boldsymbol{F} = \varnothing$ y dim F=1 (ya que dimF$\geq$ 1) ,entonces $f = I_{V_1}$ y la ecuación de T es $X' = A + I_{V_1}(\overrightarrow{AX}) + \overrightarrow{AA'}$,donde A es un punto cualquiera de E_1, llamando $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ queda $X' = X + \vec{u}$.

T es una TRASLACIÓN de vector $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$. Se designa $T_{\vec{u}}$.

Interpretación geométrica:.



3.4.4. Tabla resumen:

dim ***F***	***F***	F	**T**	$\|M\|$
1	$E_1 = A+V_1$	V_1	Identidad: I_{E_1}	1
0	$A+\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$	Simetría central: S_A	-1
	$\varnothing$	V_1	Traslación $T_{\vec{u}}$	1

3.5. Movimientos de E2. Clasificación y ecuaciones

Sean T movimiento de E_2, f su transformación ortogonal asociada de V_2, M la matriz que define f respecto de cierta base ortonormal, F el subespacio de vectores invariantes por f y ***F*** la variedad lineal de puntos invariantes por T.

1º Si dim ***F*** $=2 \Leftrightarrow$ ***F*** $= E_2 \Leftrightarrow T = I_{E_2}$ **(IDENTIDAD)** y su ecuación es X'=X.

Obsérvese que existe un valor propio λ=1 doble.

2º Si dim ***F*** $=1 \Leftrightarrow$ ***F*** $=A+\langle\vec{u}\rangle$ (recta afín donde A es un punto cualquiera de ***F***), entonces $F=\langle\vec{u}\rangle$ (recta vectorial) luego f es una simetría axial de V_2 y por tanto, la ecuación de T es

$$X' = A + M\overrightarrow{AX},\ \text{donde, } M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

T es la SIMETRÍA AXIAL respecto de la recta e≡ *F*. Se designa Se.

Ya que la matriz ortogonal de orden 2 tiene los vectores columnas unitarios y ortogonales. Se trata de una matriz simétrica que se corresponde con una transformación involutiva. Obsérvese que existen dos valores propios λ=1 y λ=-1.

Proposición: La pendiente del eje F de una simetría axial de V_2 es $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Por ser $f \in O^-(V_2)$, su matriz asociada es: $M_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$; y F el subespacio de vectores invariantes, es el conjunto solución de la ecuación

$$M_2\vec{u} = \vec{u} \Leftrightarrow (M_2 - I)\vec{u} = \vec{0}.$$

Si (x, y) son las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de una base ortonormal B de V_2, entonces,

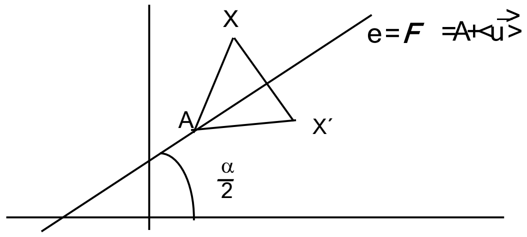
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha - 1 & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha - 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0,$$

luego rango(M_2-I)=1, luego el sistema es compatible indeterminado y equivalente a $(\cos\alpha - 1)x + \operatorname{sen}\alpha\ y = 0$, que es una recta vectorial cuya pendiente es :

$$m=\frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}=\frac{2\text{sen}^2(\alpha/2)}{2\text{sen}(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}=\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Por tanto, la pendiente del eje de una simetría axial es $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

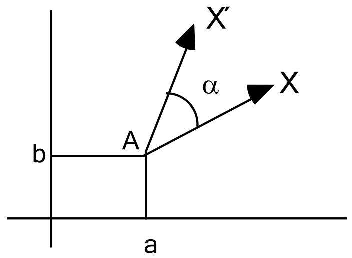
Interpretación geométrica :



3º Si dim $\boldsymbol{F}$ =0 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{F}$ =A+{ $\vec{0}$ }, luego F={ $\vec{0}$ }, entonces f es una rotación vectorial.de V_2 y la ecuación de T es $X'=A+M\overrightarrow{AX}$, dónde $M=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\text{sen}\alpha\\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

T es la ROTACIÓN de E_2 de centro A y ángulo α**.** Se designa G(A, α)

Interpretación geométrica:



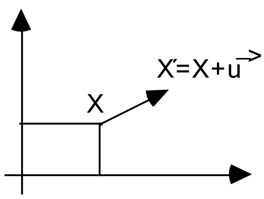
Obsérvese que, en general, no tiene valores propios reales. Si tiene al valor propio λ=-1 doble se trata del giro o rotación de 180º que es involutivo, y por tanto una simetría que se dice CENTRAL.

4º Si $\boldsymbol{F}=\varnothing$, tenemos que considerar dos casos

4ºa) dim F=2 $\Leftrightarrow$ F=V_2 , luego f= I_{V_2} y la ecuación de T es $X'=A+I_{V_2}\left(\overrightarrow{AX}\right)+\overrightarrow{AA'}$, donde A es un punto cualquiera de E_2. Llamando $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$ tenemos $X'=X+\vec{u}$.

T es una TRASLACIÓN de vector $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$. Se designa $T_{\vec{u}}$.

Interpretación geométrica:

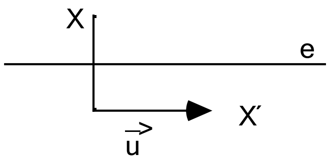


4ºb) dim F=1$\Leftrightarrow$ F=$\langle\vec{u}\rangle$, luego f es una simetría axial de V_2 de eje F y la ecuación de T es $X'=A+M\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{AA'}$, donde $M=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \text{sen}\alpha\\ \text{sen}\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$.

Demostraremos, más adelante que podemos tomar A tal que el vector $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ verifique que $\vec{u} \parallel F$, ($\vec{u} = \lambda\vec{v}, \lambda \in \Re$), y llamando e=A+$\langle\vec{u}\rangle$, entonces,

T recibe el nombre de SIMETRÍA DESLIZANTE de elementos e y $\vec{u}$. Se designa $S(e,\vec{u})$.

Interpretación geométrica:



3.5.5. Tabla resumen:

dim ***F***	***F***	F	T	M	|M|
2	E_2	V_2	**Identidad** I_{E_2}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
1	$A+\langle\vec{u}\rangle$	$\langle\vec{u}\rangle$	**Simetría axial Se**	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$	-1
0	$\{A\}$	$\{\vec{0}\}$	**Rotación G(A, α)**	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	1
	$\varnothing$	V_2	**Traslación** $T_{\vec{u}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
	$\varnothing$	$\langle\vec{u}\rangle$	**Simetría deslizante S(e, $\vec{u}$)**	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$	-1

3.5.6. Ecuaciones

Dada una referencia ortonormal $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de E_2, respecto de la cual $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$;

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\ X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$, entonces:

•**La ecuación de la simetría axial** S_e, de eje e (que pasa por A y tiene de inclinación $\alpha/2$), es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$. Operando:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} c = a - a\ \cos\alpha - b\ \operatorname{sen}\ \alpha \\ d = b - a\ \operatorname{sen}\alpha + b\ \cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\c&\cos\alpha&\operatorname{sen}\alpha\\d&\operatorname{sen}\alpha&-\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=c+x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha\\y'=d+x\operatorname{sen}\alpha-y\cos\alpha\end{cases}.$$

•**La ecuación de la rotación** $G(A,\ \alpha)$, de centro A y ángulo α, es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}.$$ Operando tenemos:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\text{ donde }\begin{cases}c=a-a\cos\alpha+b\operatorname{sen}\alpha\\d=b-a\operatorname{sen}\alpha-b\cos\alpha\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\c&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\d&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=c+x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha\\y'=d+x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha\end{cases}.$$

•**La ecuación de la traslación** $T_{\vec{u}}$, de vector $\vec{u}$ es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\m&1&0\\n&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=m+x\\y'=n+y\end{cases}.$$

•**La ecuación de una simetría deslizante** $T_{\vec{u}}\circ S_e$, de vector $\vec{u}$ y eje e (que pasa por A y tiene de inclinación $\alpha/2$), es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\alpha&\operatorname{sen}\alpha\\\operatorname{sen}\alpha&-\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}.$$ Operando:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\alpha&\operatorname{sen}\alpha\\\operatorname{sen}\alpha&-\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\text{ donde }\begin{cases}e=a-a\cos\alpha-b\operatorname{sen}\alpha+m\\f=b-a\operatorname{sen}\alpha+b\cos\alpha+n\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\e&\cos\alpha&\operatorname{sen}\alpha\\f&\operatorname{sen}\alpha&-\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=e+x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha\\y'=f+x\operatorname{sen}\alpha-y\cos\alpha\end{cases}$$

3.6. Movimientos de E_3. Clasificación y ecuaciones

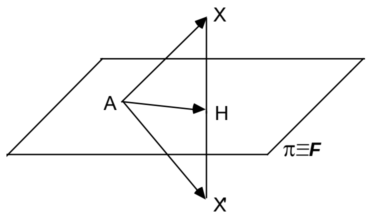
Al igual que en E_2, denotaremos por T un movimiento de E_3, f su transformación ortogonal de V_3 asociada, M la matriz de orden 3 que define f respecto de cierta referencia ortonormal R, F el subespacio de vectores invariantes por f, y ***F*** la variedad lineal de puntos invariantes por T.

1º Si dim $\boldsymbol{F}$ =3 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{F}$ = E3, entonces $T = I_{E_3}$ **(IDENTIDAD)** y su ecuación es X'=X, respecto de cualquier sistema de referencia.
Obsérvese que existe un valor propio λ=1 triple.

2º Si dim $\boldsymbol{F}$ =2 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{F}$ =A+$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (plano afín donde A es un punto cualquiera de $\boldsymbol{F}$), entonces F=$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ es un plano vectorial y f es, por tanto, una simetría especular de V_3.
Si consideramos la referencia ortonormal $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de E3, dextrógira (de igual orientación que la referencia canónica) y tal que $\langle \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, entonces la ecuación de T respecto de la referencia R es $X' = A + M\overrightarrow{AX}$, donde $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $|M| = -1$.

T es la SIMETRÍA ESPECULAR de base $\boldsymbol{F}$ =A+$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Se designa por S_π, donde π=$\boldsymbol{F}$.
Obsérvese que existe un valor propio λ=1 doble y un valor propio λ=-1 simple.

Interpretación geométrica :



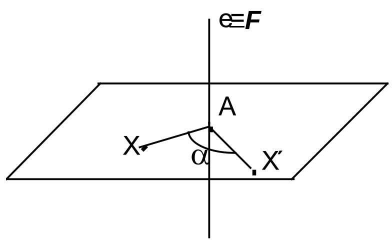
$\overline{XX'} \perp \pi$, y, d(X, π)=$\overline{XH} = \overline{HX'}$ =d(X', π).

3º Si dim $\boldsymbol{F}$ =1 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{F}$ =A+$\langle \vec{u} \rangle$ (recta afín donde A es un punto cualquiera de $\boldsymbol{F}$), entonces F=$\langle \vec{u} \rangle$ es una recta vectorial y f es, por tanto, una rotación vectorial alrededor de la recta $\boldsymbol{F}$.
Si consideramos la referencia ortonormal $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de E3, dextrógira tal que $\langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}_1 \rangle$, entonces la ecuación de T respecto de la referencia R es $X' = A + M\overrightarrow{AX}$, donde

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

T es la ROTACIÓN de eje e = $\boldsymbol{F}$ y ángulo α. Se designa por G(e, α**)**
Obsérvese que existe un valor propio λ=1 simple.

Interpretación geométrica:

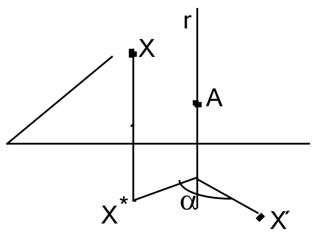


Los puntos X, X' están en un plano $\perp$ e, y el ángulo $\widehat{XAX'} = \alpha$.
Si α **=180º** se trata de la **rotación** de eje e que contiene al punto A, $G_{(e,180º)}$.
Obsérvese que existe un valor propio λ=-1 doble.

4º Si dim $\boldsymbol{F}$ =0 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{F}$ ={A}=A+ $\{\vec{0}\}$, luego F= $\{\vec{0}\}$ y f es, por tanto, una simetría rotacional expresable como el producto conmutativo f=Sp∘G$_{(D,\alpha)}$ donde P es el plano de V_3 que define Sp y D es la recta vectorial, ortogonal a P, que define G$_{(D,\alpha)}$ Si consideramos la referencia ortonormal $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ de E_3, dextrógira tal que $\langle\vec{u}_1\rangle$ = D, y $\langle\vec{u}_2,\vec{u}_3\rangle$=P, entonces la ecuación de T respecto de la referencia R es $X'=A+M\overrightarrow{AX}$, dónde M=$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha\\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$; $|M|=-1$.

D es el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda=-1$

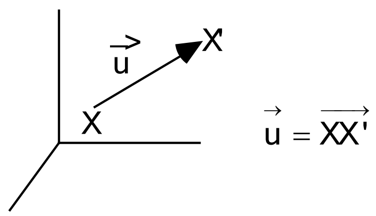
T es la SIMETRÍA ROTACIONAL de centro el punto doble A, y elementos la recta afín r=A+D y el plano afín π=A+P. Se designa por S$_{(r,\pi)}$.
Si α **=180º** se trata de la **simetría central** de centro A, S$_A$. En cuyo caso el valor propio $\lambda=-1$ es triple.
Interpretación geométrica:



5º Si $\boldsymbol{F}$ =∅, tenemos que considerar los siguientes casos:
5ºa) dim F=3⇔ F=V_3, luego $f=I_{V_3}$, y la ecuación de T es $X'=A+I_{V_3}\left(\overrightarrow{AX}\right)+\overrightarrow{AA'}$, donde A es un punto cualquiera de E_3. Llamando $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$, tenemos que $X'=X+\vec{u}$, respecto de cualquier referencia de E_3.

T es la TRASLACIÓN de vector $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$. Se designa $T_{\vec{u}}$.

Interpretación geométrica:



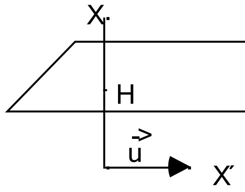
5ºb) dim F=2 ⇔ F=$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$ (plano vectorial), luego f es una simetría especular de V_3 respecto del plano F, y la ecuación de T es $X'=A+M\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{AA'}$. Si consideramos la referencia ortonormal $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ de E_3, dextrógira y tal que $\langle\vec{u}_2,\vec{u}_3\rangle=\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$ entonces

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ |M|=-1.$$

Podemos tomar el punto A tal que $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$ sea paralelo a F ($\vec{u}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$ con $\lambda,\mu\in\Re$), y llamando π=A+$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$, entonces

T es la SIMETRÍA DESLIZANTE de elementos π y $\vec{u}$. Se designa por $S_{(\pi,\vec{u})}$.

Interpretación geométrica:



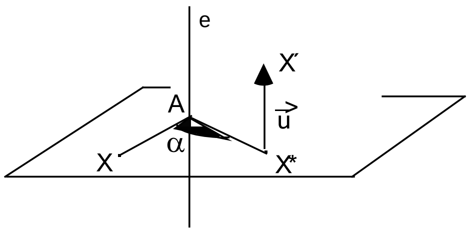
5ºc) dimF=1 $\Leftrightarrow$ F=$\langle\vec{u}\rangle$ (recta vectorial), luego f es una rotación de V_3 respecto de la recta F, y la ecuación de T es $X'=A+M\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{AA'}$. Si consideramos la referencia ortonormal $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ de E3, dextrógira con $\langle\vec{u}\rangle=\langle\vec{u}_1\rangle$, entonces

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix};\ |M|=1$$

Demostraremos que podemos tomar el punto A tal que $\vec{v}=\overrightarrow{AA'}$ sea paralelo a F ($\vec{u}=\lambda\vec{v}$, $\lambda\neq 0$), y llamando e=A+$\langle\vec{u}\rangle$, entonces:

T es un MOVIMIENTO HELICOIDAL de elementos e, α y $\vec{u}$.

Interpretación geométrica:



X, X^* están en un plano $\perp$ e por A y $\overrightarrow{X^*X'}=\vec{u}$

3.6.6. Tabla resumen:

dim *F*	*F*	F	T	M	$\lvert M\rvert$
3	E_3	V_3	Identidad: I_{E_3}	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	1
2	A+ $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$	$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$	Simetría especular:S_π	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	-1
1	A+$\vec{u}$	$\vec{u}$	Rotación: $G_{(e,\alpha)}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$	1

0	$A+\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$	Simetría rotacional: $S_\pi \circ G_{(e,\alpha)} = G_{(e,\alpha)} \circ S_\pi$ con $A = e \cap \pi$ y $e \perp \pi$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	-1
	Ø	V_3	Traslación: $T_{\vec{u}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
	Ø	$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$	Simetría deslizante: $S_{(\pi,\vec{u})}$ con $\pi \parallel \vec{u}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	-1
	Ø	$\vec{u}$	Movimiento helicoidal: $G(e, \vec{u})$ con $e \parallel \vec{u}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	1

3.6.7. Ecuaciones:

Sea $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una referencia ortonormal de E3 (que iremos especificando en cada caso), tal que si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, entonces su transformado mediante el movimiento sea $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

•**La ecuación de la simetría especular** $S\pi$ de plano π, considerando la referencia $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, ortonormal y dextrógira, tal que los vectores $\vec{u}_2, \vec{u}_3$ sean paralelos a π, es:

Si A un punto del plano π, tal que $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ respecto de R:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (*)$$

•**La ecuación de la rotación** $G_{(e,\alpha)}$, considerando la referencia $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, ortonormal y dextrógira, tal que $\vec{u}_1$ sea paralelo al eje e, es:

Si A un punto del eje e, tal que $A=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ respecto de R:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}.\text{ Operando:}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\e\\f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\text{ con }\begin{cases}e=b-b\cos\alpha+c\operatorname{sen}\alpha\\f=c-b\operatorname{sen}\alpha-c\cos\alpha\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\e&0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\f&0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x\\y'=e+y\cdot\cos\alpha-z\cdot\operatorname{sen}\alpha\quad(*)\\z'=f+y\cdot\operatorname{sen}\alpha+z\cdot\cos\alpha\end{cases}$$

Si $\alpha=180^{\circ}$; T es la **simetría axial** de eje ***F***.

•**La ecuación de una simetría rotacional** $G_{(e,\alpha)}\circ S\,\pi$, considerando la referencia $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, ortonormal y dextrógira, tal que $\vec{u}_1$ sea paralelo al eje e y $\vec{u}_2,\vec{u}_3$ sean paralelos al plano π es:

Si A el centro de T (único punto doble), y $A=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ respecto de R:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix};\text{ operando:}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad\text{con }\begin{cases}d=2a\\e=b-b\cos\alpha+c\operatorname{sen}\alpha\\f=c-b\operatorname{sen}\alpha-c\cos\alpha\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\d&-1&0&0\\e&0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\f&0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=d-x\\y'=e+y\cdot\cos\alpha-z\cdot\operatorname{sen}\alpha\quad\mathbf{(*)}\\z'=f+y\cdot\operatorname{sen}\alpha+z\cdot\cos\alpha\end{cases}$$

Si α=180º; entonces T es la **simetría central** de centro A.

•**La ecuación de la traslación** $T_{\vec{u}}$, de vector $\vec{u}=\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$, respecto de cualquier referencia R, es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x'=m+x \\ y'=n+y \\ z'=p+z \end{cases}$$

•**La ecuación de la simetría deslizante** $T_{\vec{u}}\circ S_{\pi}$, considerando la referencia $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ ortonormal y dextrógira, tal que los vectores $\vec{u}_2,\vec{u}_3$ sean paralelos a π, es:

Si A un punto cualquiera de π y $\vec{u}=\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ respecto de R, ($\vec{u}$ paralelo a π)

entonces:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}.$$ Operando:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+m \\ n \\ p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2a+m & -1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x'=2a+m+x \\ y'=n+y \\ z'=p+z \end{cases}$$

•**La ecuación de un movimiento helicoidal** $T_{\vec{u}}\circ G_{(e,\alpha)}$, considerando la referencia $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, ortonormal y dextrógira, tal que $\vec{u}_1$ sea paralelo al eje e, es:

Si A un punto cualquiera del eje e, y $A=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\vec{u}=\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$ respecto de R ($\vec{u}$ paralelo a e),

entonces: $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}.$$ Operando:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{donde: } \begin{cases} d = m \\ e = b - b\cos\alpha + c\,\text{sen}\alpha + n \\ f = c - b\,\text{sen}\alpha - c\cos\alpha + p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ e & 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ f & 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = d + x \\ y' = e + y\cdot\cos\alpha - z\cdot\text{sen}\alpha \quad (*) \\ z' = f + y\cdot\text{sen}\alpha + z\cdot\cos\alpha \end{cases}$$

(*): Para hallar las ecuaciones respecto de cualquier otra referencia, basta aplicar un cambio de referencia. Sin embargo, es más adecuado hallar previamente la matriz de la transformación ortogonal asociada respecto de la base de vectores deseada, mediante un cambio de base, y posteriormente hallar la ecuación del movimiento en la referencia que contiene a dicha base de vectores (ver cambio de base de una transformación lineal). Quedará una expresión de la forma $X' = A + PMP^{-1}\overrightarrow{AX}$, donde A es un punto doble de T, o bien, $X' = A + PMP^{-1}\overrightarrow{AX} + \vec{u}$ si T no tiene puntos dobles, siendo P la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ respecto de la base deseada, o de la canónica si es el caso.

3.7. Teorema de descomposición de movimientos de E_n.

(Cartan-Dieudonnè)

En la página 26 resumíamos el teorema de descomposición de transformaciones ortogonales de V_n para n=2,3 (para n=1 es obvio). A partir de aquél, podemos demostrar el siguiente teorema de descomposición de movimientos de E_n (n=1, 2, 3).

Teorema: Sea T un movimiento de E_n. Se verifica:

1. Si T tiene al menos un punto invariante $A \in E_n$, entonces T es el producto de, a lo sumo, n simetrías ortogonales respecto de hiperplanos de E_n (simetrías axiales si T es un movimiento de E_2 o simetrías especulares si T es un movimiento de E_s).

2. Si T no tiene puntos invariantes, entonces T es el producto de, a lo sumo, n + 1 simetrías ortogonales respecto de hiperplanos de E_n

Demostrémoslo, por ejemplo, para n = 3:

1. Suponemos que T tiene, al menos, un punto $A \in E_n$ invariante; entonces $T(X) = A + f\left(\overrightarrow{AX}\right) \Leftrightarrow X' = A + f\left(\overrightarrow{AX}\right)$; pero, hemos visto que f se puede descomponer en el producto de, a lo sumo, 3 simetrías especulares vectoriales, entonces $f = s_p \circ \cdots \circ s_1$ con $p \le 3 \Rightarrow X' = A + s_p \circ \cdots \circ s_1\left(\overrightarrow{AX}\right)$.

Llamaremos S_i a la simetría especular que deja invariante al punto A y tiene como transformación ortogonal asociada s_i, i=1,...,p, $\left(S_i(X) = A + s_i\left(\overrightarrow{AX}\right)\right)$. Se tiene entonces que $T = S_p \circ \cdots \circ S_1$, $p \le 3$, es decir, T es el producto de, a lo sumo, 3 simetrías especulares.

2. Si T no tiene puntos invariantes, entonces elegido un punto $A \in E_n$ de homólogo $T(A) = A'$, sabemos que existe una única simetría especular S tal que $S(A) = A' = T(A)$. Como las simetrías son involutivas, se verifica que $S \circ S(A) = A = S \circ T(A)$, luego el movimiento $S \circ T$ deja invariante al punto A. Por tanto, aplicando el apartado 1, se verifica que $S \circ T = S_p \circ \cdots \circ S_1 \quad p \le 3$; luego $T = S^{-1} \circ S_p \circ \cdots \circ S_1 = S \circ S_p \circ \cdots \circ S_1$, por lo tanto T se descompone en $p + 1 \le 3 + 1 = 4$, es decir, a lo sumo en 4 simetrías especulares.

<u>**Corolario**</u>**:** Llamamos $\boldsymbol{F}$ a la variedad lineal o subespacio afín de puntos invariantes por T. Si T es el producto de p simetrías respecto de hiperplanos (p=1, 2,...,n) y $\boldsymbol{F} \neq \emptyset$ se verifica entonces que dim $\boldsymbol{F}$= n-p.

Veámoslo para n=3:
Suponemos que T no es una simetría especular (p=1) pues estaríamos ante un caso trivial . Hay dos posibilidades:

a) Si $T = S_2 \circ S_1$, entonces $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F_1} \cap \boldsymbol{F_2}$, siendo: $\boldsymbol{F_i}$ variedad lineal de puntos invariantes por $\mathbf{S_i}$, donde $\boldsymbol{F_1} \neq \boldsymbol{F_2}$ (si no: $S_1 \equiv S_2$ y $T = I_{E_3}$); luego $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F_1} \cap \boldsymbol{F_2}$ es una recta vectorial (ha de ser $\boldsymbol{F} \neq \emptyset$) y, por tanto, T es una rotación alrededor de $\boldsymbol{F}$, y 1=dim $\boldsymbol{F}$=3-2.

b) Si $T = S_3 \circ S_2 \circ S_1$, entonces $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F_1} \cap \boldsymbol{F_2} \cap \boldsymbol{F_3}$, siendo:
Variedad de puntos invariantes por S_2; donde $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ y $\boldsymbol{F}_3$ son sendos planos afines distintos que determinan una radiación de planos (si no estaríamos en un caso anterior, o su intersección sería $\emptyset$), entonces $\boldsymbol{F_1} \cap \boldsymbol{F_2} \cap \boldsymbol{F_3} = \{A\}$, por tanto, T es una simetría rotacional y 0=dim $\boldsymbol{F}$ =3-3.

3.8. Aplicaciones del teorema de descomposición

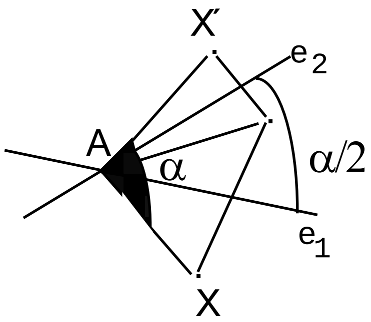
Como consecuencia de los teoremas de descomposición de E_n y de V_n, tenemos:

3.8.1. Teorema 1: Descomposición de movimientos de E_2

a) Toda rotación de centro A y ángulo α puede descomponerse en producto de 2 simetrías axiales cuyos ejes pasan por A, pudiéndose elegir libremente una de ellas. El ángulo que forman los ejes es $\alpha / 2$.

El recíproco también se verifica: el producto de 2 simetrías axiales de E_2 es una rotación cuyo centro es la intersección de los ejes y cuyo ángulo es dos veces el formado por los ejes.

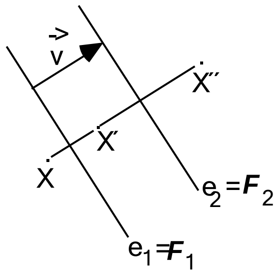
Interpretación geométrica:



b) Toda traslación de vector $\vec{u}$ puede descomponerse en producto de dos simetrías axiales de ejes paralelos entre sí, cuya dirección es ortogonal a $\vec{u}$ y tales que la distancia entre ambos es $\frac{1}{2}|\vec{u}|$.

Recíprocamente: El producto de dos simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación de vector $\vec{u} = 2\vec{v}$ donde $\vec{v}$ es perpendicular a los dos ejes y tal que: $t_{\vec{v}}(\boldsymbol{F}_1) = \boldsymbol{F}_2$, siendo $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ los ejes de las simetrías.

Interpretación geométrica:

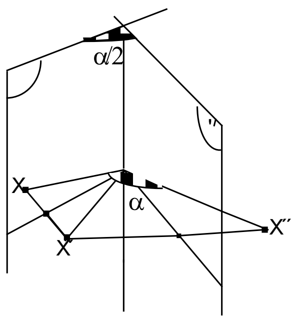


3.8.2. Teorema 2: Descomposición de movimientos de E_3

a) Toda rotación de eje e y ángulo α puede descomponerse en producto de 2 simetrías especulares cuyos planos se cortan según el eje e, pudiéndose elegir arbitrariamente una de ellas. El ángulo que forman los planos es $\alpha/2$.

Recíprocamente: el producto de dos simetrías especulares de E_3 de planos no paralelos, es una rotación cuyo eje es la intersección de los planos de simetría y cuyo ángulo es dos veces el formado por dichos planos.

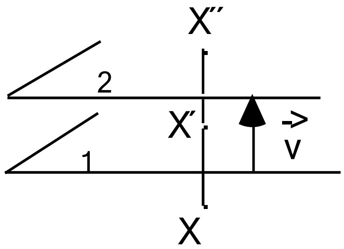
Interpretación geométrica:



b) Toda traslación de vector $\vec{u}$ puede descomponerse en producto de dos simetrías especulares de planos paralelos entre sí y perpendiculares a $\vec{u}$, tales que la distancia entre ambos sea $\frac{1}{2}|\vec{u}|$. Uno de ellos puede elegirse arbitrariamente con tal de que sea perpendicular a $\vec{u}$.

Recíprocamente: el producto de dos simetrías especulares de planos paralelos es una traslación de vector $\vec{u} = 2\vec{v}$ donde $\vec{v}$ es perpendicular a los dos planos y tal que: $t_{\vec{v}}(\boldsymbol{F}_1) = \boldsymbol{F}_2$, siendo $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ los planos de puntos dobles de las simetrías.

Interpretación geométrica :



Estos resultados son consecuencia directa de los teoremas de descomposición de movimientos y de la descomposición de rotaciones vectoriales de E_2 y E_3.

3.9. El grupo de las traslaciones

Teorema: El conjunto de las traslaciones respecto de la composición es un grupo conmutativo.

En efecto, es obvio, puesto que la transformación ortogonal asociada a cualquier traslación es I_{V_n}, luego la transformación ortogonal asociada a $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ es $I_{V_n}{}^2 = I_{V_n}$, por tanto, el producto de traslaciones es una traslación. Además:
$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}(X) = T_{\vec{v}}(T_{\vec{u}}(X)) = (X + \vec{u}) + \vec{v} = X + (\vec{u} + \vec{v}) = X + (\vec{v} + \vec{u})$, luego es conmutativo $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}} = T_{\vec{v}+\vec{u}}$.

3.10. Producto de movimientos

Vamos ahora a estudiar como consecuencias de estos teoremas:
i) Producto de una rotación y una traslación.
ii) Producto de una simetría respecto de hiperplano y una traslación.

i) Producto de una rotación y una traslación

Sean un giro $G_{(F,\alpha)}$ y una traslación $T_{\vec{u}}$:

•En E_2:

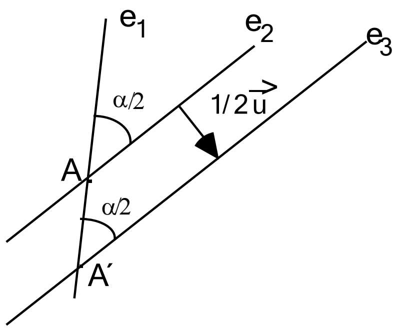
En este caso $\boldsymbol{F} = \{A\}$ y por los teoremas 1 y 2 podemos descomponer en $\begin{cases} G_{(A,\alpha)} = S_2 \circ S_1 \\ T_{\vec{u}} = S_3 \circ S_2 \end{cases}$ (S_1, S_2, S_3, simetrías axiales de ejes e_1, e_2, e_3) tal y como se indica en la figura. Entonces:

$$T_{\vec{u}} \circ G_{(A,\alpha)} = S_3 \circ S_2 \circ S_2 \circ S_2 = S_3 \circ S_1 = G_{(A',\alpha)}$$

(A' es el punto intersección de los ejes e_1, y e_3).

De manera análoga se procedería en el caso de traslación por giro. Luego, el producto de una traslación y un giro de E_2 es otro giro de igual ángulo y distinto centro.

Interpretación geométrica:



•En E3:

Sea $\boldsymbol{F} = e$ una recta afín. Vamos a considerar 2 casos:

a) El vector $\vec{u}$ de la traslación es paralelo al eje e de la rotación:

Entonces $T_{\vec{u}} \circ G_{(e,\alpha)}$ es el movimiento que hemos llamado helicoidal. Nos faltaba ver que el anterior producto es conmutativo, es decir: $T_{\vec{u}} \circ G_{(e,\alpha)} = G_{(e,\alpha)} \circ T_{\vec{u}}$.

Demostración:

Sea $A \in e$, entonces:

$$\begin{cases} T_{\vec{u}} \circ G_{(e,\alpha)} = T_{\vec{u}}\left[G_{(e,\alpha)}(A)\right] = T_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u} = A' \in e \\ G_{(e,\alpha)} \circ T_{\vec{u}} = G_{(e,\alpha)}\left[T_{\vec{u}}(A)\right] = G_{(e,\alpha)}\left(A + \vec{u}\right) = G_{(e,\alpha)}(A') = A' \end{cases}$$

Como, para cada $X \in E_3$, $X = A + \overrightarrow{AX}$, tenemos:

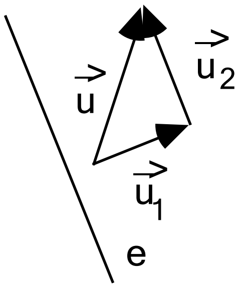
$$\begin{cases} T_{\vec{u}} \circ G_{(e,\alpha)}(X) = A' + M_2 \cdot M_1 \overrightarrow{AX} \\ G_{(e,\alpha)} \circ T_{\vec{u}}(X) = A' + M_1 \cdot M_2 \overrightarrow{AX} \end{cases}, \text{ siendo } \begin{cases} M_1 : \text{matriz asociada a } G_{(e,\alpha)} \\ M_2 = I_3 : \text{matriz asociada a } T_{\vec{u}} \end{cases}$$

y, como $M_2 \cdot M_1 = I_2 \cdot M_1 = M_1 \cdot I_2 = M_1 \cdot M_2$, se deduce que:

$$T_{\vec{u}} \circ G_{(e,\alpha)} = G_{(e,\alpha)} \circ T_{\vec{u}}$$

b) El vector $\vec{u}$ de la traslación no es paralelo al eje e de la rotación:

Podemos descomponer $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, siendo $\begin{cases} \vec{u}_1 \text{ perpendicular a e} \\ \vec{u}_2 \text{ paralelo a e} \end{cases}$

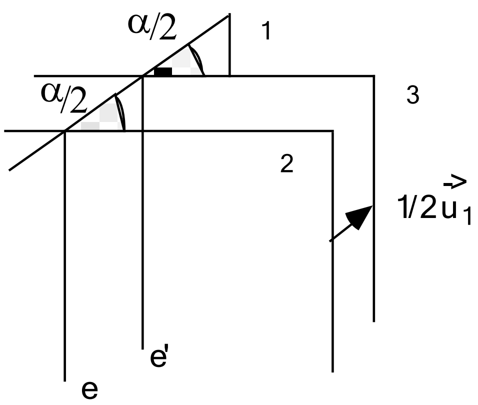


$$T_{\vec u} = T_{\vec u_1+\vec u_2} = T_{\vec u_2+\vec u_1} = T_{\vec u_1}\circ T_{\vec u_2}$$

$$\text{luego}: T_{\vec u}\circ G_{(e,\alpha)} = T_{\vec u_2}\circ\left(T_{\vec u_1}\circ G_{(e,\alpha)}\right) = (*)$$

Usando la propiedad asociativa del producto hallamos primero $T_{\vec u_1}\circ G_{(e,\alpha)}$ ($\vec u_1$ perpendicular a e) y, procediendo de manera semejante a como hacíamos en E_2, descomponemos:

$G_{(e,\alpha)} = S_2\circ S_1$ y $T_{\vec u_1} = S_3\circ S_2$ (S_1, S_2, S_3 simetrías especulares de planos π_1,π_2,π_3 respectivamente) como se indica en la figura.



Entonces, $T_{\vec u_1}\circ G_{(e,\alpha)} = S_3\circ S_2\circ S_2\circ S_1 = S_3\circ S_1 = G_{(e',\alpha)}$,

siendo $e' = \pi_1\cap\pi_3$ y e' paralelo a e.

Sustituyendo en $(*)$, resulta:

$T_{\vec u}\circ G_{(e,\alpha)} = T_{\vec u_2}\circ\left(T_{\vec u_1}\circ G_{(e,\alpha)}\right) = T_{\vec u_2}\circ G_{(e',\alpha)}$ siendo e' y $\vec u_2$ paralelos entre sí, luego se trata de un movimiento helicoidal.

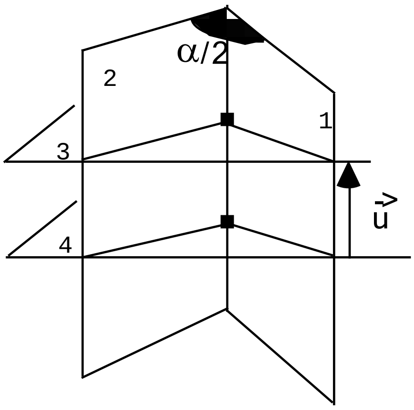
Además, y como consecuencia del apartado a), esta descomposición es conmutativa y es única por ser única la descomposición $\vec u = \vec u_1 + \vec u_2$.

NOTA: Se podría decir que todo movimiento directo de E_3 es un movimiento helicoidal, considerando que las traslaciones son movimientos helicoidales cuyo ángulo de rotación es 0º, y que las rotaciones son movimientos helicoidales cuyo vector de traslación es el $\vec 0$.

Si aplicamos el teorema de descomposición a los movimientos helicoidales, resulta:

Corolario: Todo movimiento helicoidal es el producto de 4 simetrías especulares como máximo.

Interpretación geométrica:



ii) Producto de simetría y traslación

Sean una simetría S$_F$ (***F*** hiperplano) y $T_{\vec{u}}$ una traslación.

Consideraremos dos casos según que $\vec{u}$ y ***F*** sean paralelos ó no.
Como el estudio es totalmente análogo para E2 y E3, lo haremos para E2.

Sea ***F* =e** una recta afín de E2:
a) Supongamos que $\vec{u}$ y e son paralelos, entonces $T_{\vec{u}} \circ S_e$ es una simetría deslizante.
Veamos que $T_{\vec{u}} \circ S_e = S_e \circ T_{\vec{u}}$.

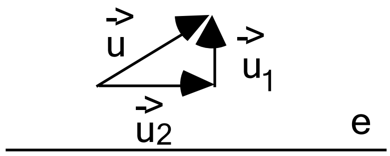
Si $A \in e$, entonces: $\begin{cases} T_{\vec{u}} \circ S_e(A) = T_{\vec{u}}\left[S_e(A)\right] = T_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u} = A' \in e \\ S_e \circ T_{\vec{u}}(A) = S_e\left[T_{\vec{u}}(A)\right] = S_e(A + \vec{u}) = S_e(A') = A' \end{cases}$.

Como para cada $X \in E_2$, $X = A + \overrightarrow{AX}$, entonces:

$\begin{cases} T_{\vec{u}} \circ S_e(X) = A' + M_2 \cdot M_1 \overrightarrow{AX} \\ S_e \circ T_{\vec{u}}(X) = A' + M_1 \cdot M_2 \overrightarrow{AX} \end{cases}$ donde $\begin{cases} M_1: \text{ matriz asociada a } S_e \\ M_2 = I_2: \text{matriz asociada a } T_{\vec{u}} \end{cases}$ y

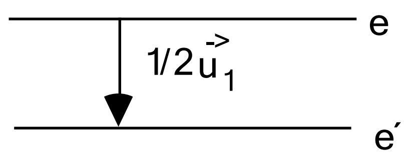
$M_2 \cdot M_1 = I_2 \cdot M_1 = M_1 \cdot I_2 = M_1 \cdot M_2$, y por tanto $T_{\vec{u}} \circ S_e = S_e \circ T_{\vec{u}}$.

b) Si $\vec{u}$ y e no son paralelos, podemos descomponer $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$:



, dónde: $\begin{cases} \vec{u}_1 \text{ perpendicular a e} \\ \vec{u}_2 \text{ paralelo a e} \end{cases}$ y

$T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}_1+\vec{u}_2} = T_{\vec{u}_2} \circ T_{\vec{u}_1}$. Por tanto, $T_{\vec{u}} \circ S_e = T_{\vec{u}_2} \circ \left(T_{\vec{u}_1} \circ S_e\right) = (*)$.
Usando la propiedad asociativa, calculamos en primer lugar $T_{\vec{u}_1} \circ S_e$ ($\vec{u}_1$ y e perpendiculares).



Por el teorema **1b,** $T_{\vec{u}_1} = S_{e'} \circ S_e$ con e' y e paralelos entre sí y perpendiculares a $\vec{u}_1$ tales que $T_{\frac{1}{2}\vec{u}_1}(e) = e'$, entonces, $T_{\vec{u}} \circ S_e = S_{e'} \circ S_e \circ S_e = S_{e'}\left(S_e \circ S_e\right) = S_{e'}$; y sustituyendo en $(*)$ obtenemos:

$T_{\vec{u}} \circ S_e = T_{\vec{u}_2} \circ \left(T_{\vec{u}_1} \circ S_e\right) = T_{\vec{u}_2} \circ S_{e'}$, con $\begin{cases} e' \text{ y } \vec{u}_2 \text{ paralelos} \\ e' = T_{\frac{1}{2}\vec{u}_1}(e) \end{cases}$, luego se trata de una simetría deslizante de eje e' y vector $\vec{u}_2$.

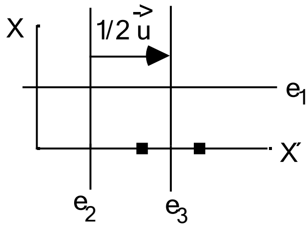
Además, y como consecuencia del apartado **a)**, esta descomposición es conmutativa y también es única por ser única la descomposición $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

En E_3, $\boldsymbol{F} = \pi$ (plano afín de E_3), y el proceso es totalmente análogo, considerando simetrías especulares en lugar de axiales.

Si aplicamos el teorema **2** a las simetrías deslizantes, resulta:

Corolario: En E_2 (respectivamente E_3) toda simetría deslizante es el producto de 3 simetrías axiales (respectivamente especulares). (Ver teorema de descomposición de movimientos **3.7**.)

Interpretación geométrica:



3.11. Resumen de la descomposición de movimientos

Los resultados de aplicar el teorema de descomposición a los movimientos de E_2 y E_3, en resumen, son los siguientes:

• **En E_2:**

1º) Toda rotación (giro) de $\mathbf{E_2}$, de ángulo $\alpha \neq 0$, se descompone en el producto de 2 simetrías axiales cuyos ejes pasan por el centro de la rotación y forman entre sí un ángulo $\alpha/2$, pudiendo elegirse libremente una de ellas.

2º) Toda traslación de vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ de **E₂**, se descompone en el producto de 2 simetrías axiales de ejes e_1 y e_2 paralelos entre sí y perpendiculares a $\vec{u}$, tales que, $T_{\frac{1}{2}\vec{u}}(e_1) = e_2$ pudiendo elegirse libremente una de ellas.

3º) Toda simetría deslizante de $\mathbf{E_2}$ cuyo vector de traslación $\vec{u} \neq \vec{0}$, se descompone en el producto de 3 simetrías axiales cuyos ejes respectivos e_1, e_2, e_3 verifican que:

$$\begin{cases} e_2 \text{ y } e_3 \text{ son paralelos entre si y perpendiculares a } e_1 \\ T_{\frac{1}{2}\vec{u}}(e_2) = e_3 \end{cases}$$

En E₃:

1º) Toda rotación (giro) de **E₃**, de ángulo $\alpha \neq 0$, se descompone en el producto de 2 simetrías especulares cuyos planos contienen al eje de la rotación y forman entre sí un ángulo $\alpha / 2$, pudiendo elegirse libremente una de ellas.

2º) Toda traslación de vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ de **E₃**, se descompone en el producto de 2 simetrías especulares de planos π_1 y π_2 paralelos entre sí y perpendiculares a $\vec{u}$, tales que $T_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\pi_1) = \pi_2$, pudiendo elegirse libremente una de ellas.

3º) Toda simetría deslizante de **E₃** cuyo vector de traslación $\vec{u} \neq \vec{0}$, se descompone en el producto de 3 simetrías especulares cuyos planos respectivos π_1, π_2, π_3 verifican que: $\begin{cases} \pi_1 \perp \pi_2, \pi_3 \\ T_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\pi_2) = \pi_3 \end{cases}$

4º) Toda simetría rotacional de E₃, de ángulo $\alpha \neq 0$, se descompone en el producto de 3 simetrías especulares cuyos planos respectivos π_1, π_2, π_3 verifican que :

$$\begin{cases} \pi_1, \pi_2, \pi_3 \quad \text{pasan por el punto invariante} \\ \text{áng}(\pi_2, \pi_3) = \dfrac{\alpha}{2} \\ \pi_2, \pi_3 \perp \pi_1 \end{cases}$$

5º) Todo movimiento helicoidal de E₃, de ángulo $\alpha \neq 0$ y vector de traslación $\vec{u} \neq \vec{0}$ se descompone en el producto de 4 simetrías especulares cuyos planos respectivos π_1, π_2, π_3 y π_4, verifican:

$$\begin{cases} \text{áng}(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{\alpha}{2} \\ \pi_3, \pi_4 \perp \pi_1, \pi_2 \\ \pi_4 = T_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\pi_3) \end{cases}$$

<u>NOTA</u>: Obsérvese que por ser las simetrías respecto de hiperplanos, transformaciones involutivas, entonces:

i) En E_2: la identidad I_{E_2} se puede escribir como el producto de una simetría axial (elegida libremente) por si misma.

ii) En E_3: la identidad I_{E_3} se puede escribir como el producto de una simetría especular (elegida libremente) por sí misma.

3.12. Tabla resumen de clasificación de movimientos de E_n (n=1,2,3)

Designamos por **F** la variedad lineal de puntos invariantes por el movimiento T:

E_1

$$\text{Movimientos directos}\left\{\begin{array}{l} F=E_1:\ I_{E_1}\left(\text{traslación de vector } \vec{0}\right) \\ F=\varnothing:\ \left(\text{traslación de vector } \vec{u}\neq\vec{0}\right)\end{array}\right\}\text{ Traslaciones}$$

$$\text{Movimientos inversos}\left\{F=A:\ (\text{Simetría de centro A})\right\}\text{ Simetría respecto a un punto}$$

E_2

$$\text{Movimientos directos}\left\{\begin{array}{l} F=E_2:\ \text{Identidad (traslación de vector } \vec{0}) \\ F=A:\ \text{rotación de centro A, } \alpha\neq 0 \\ F=\varnothing\ :\ \text{traslación de vector } \vec{u}\neq\vec{0}\end{array}\right\}\text{Rotaciones y Traslaciones}$$

$$\text{Mvtos. inversos}\left\{\begin{array}{l} F=e\ :\text{Simetría axial (deslizante con } \vec{u}=\vec{0}) \\ F=\varnothing\ :\text{Simetría deslizante } \left(\vec{u}\neq\vec{0}\right)\end{array}\right\}\text{Simetrías deslizantes}$$

E_3

$$\text{Movimientos directos}\left\{\begin{array}{l} F=E_3:\ I_{E_3}(\text{traslación de vector } \vec{0}) \\ \\ F=E_3:\ I_{E_3}(\text{traslación de vector } \vec{0}) \\ F=\varnothing\ :\ \left\{\begin{array}{l}\text{traslación de vector } \vec{u}\neq\vec{0} \\ \text{Mvto. helicoidal}\left(\alpha\neq 0, \vec{u}\neq\vec{0}\right)\end{array}\right.\end{array}\right\}\text{Movimientos. helicoidales}$$

$$\text{Mvtos. inversos}\left\{\begin{array}{l} F=p:\ \text{Simetría especular} \\ F=\ A\ :\text{Simetría rotacional } (\alpha\neq 0) \\ F=\varnothing\ :\text{Simetría deslizante } \left(\vec{u}\neq\vec{0}\right)\end{array}\right\}\text{Simetrías rotac. y deslizantes}$$

CAPÍTULO CUARTO

4. Homotecias del espacio afín euclídeo

4.1 Homotecias vectoriales de V_n (n=1, 2, 3)

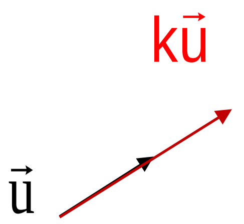
Definición: Sea V_n el R-espacio vectorial euclídeo asociado a E_n, llamaremos **homotecia vectorial** de V_n de **razón** $k\neq 0$, a toda transformación lineal:

$$\begin{array}{l} V_n \xrightarrow{h_k} V_n \\ \vec{u} \longrightarrow k\vec{u} = \vec{u}\,' \end{array}$$

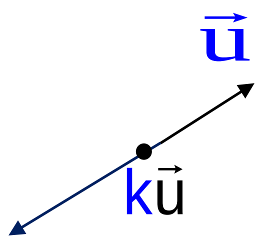
. Se designa por h_k.

Interpretación geométrica

con k>0



con k<0



Propiedades: Toda homotecia vectorial h_k de V_n verifica que:
i) h_k es una transformación lineal.
ii) h_k es biyectiva.
iii) h_k no es una transformación ortogonal, es decir no conserva el producto escalar, salvo si k = 1, o bien, k = -1.

En efecto:

$$\text{i)}\ \begin{cases} h_k(\vec{u}+\vec{v}) = k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v} = h_k(\vec{u})+h_k(\vec{v}) \\ h_k(\lambda\vec{u}) = k(\lambda\vec{u}) = (k\lambda)\vec{u} = \lambda(k\,\vec{u}) = \lambda h_k(\vec{u}) \end{cases}$$

. Luego h_k es lineal.

ii) Por ser lineal basta demostrar que $N(h_k) = \{\vec{0}\}$.

Si $h_k(\vec{u}) = k\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$, puesto que $k\neq 0$ por hipótesis.

$$\text{iii)}\ \begin{cases} h_k(\vec{u}) = k\vec{u} \\ h_k(\vec{v}) = k\vec{v} \end{cases}.\ \text{Luego}\ h_k(\vec{u})\cdot h_k(\vec{v}) = k\vec{u}\cdot k\vec{v} = k^2(\vec{u}\cdot\vec{v}) \neq (\vec{u}\cdot\vec{v}),\ \text{si}\ k\neq\pm 1.$$

Ecuación:

Sea $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\}$ una base ortonormal de V_n (n=1, 2, 3) y h_k una homotecia vectorial de V_n. Respecto de B la matriz M asociada a dicha homotecia tiene por columnas:

$$h_k(\vec{e}_1) = k\,\vec{e}_1 = (k, 0, \cdots, 0)$$
$$h_k(\vec{e}_2) = k\,\vec{e}_2 = (0, k, \cdots, 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h_k(\vec{e}_n) = k\,\vec{e}_n = (0, 0, \cdots, k)$$

Luego M= $\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$ $=k.I_n$, por tanto, $|M| = k^n$ y la ecuación matricial de h_k es $\boxed{X' = k.I_n X}$, respecto de la base B.

Observaciones.

i) Si k = 1, entonces M = I_n, por tanto, $h_1 = I_{V_n}$.

ii) Si k = -1, entonces M = $-I_n$, y $h_{-1} = -I_{V_n}$, simetría central de V_n

iii) Si $k \neq 1$, el único vector invariante por h_k es $\vec{0}$, es decir, F={$\vec{0}$}.

Definición

Si k>0 se dice que la homotecia h_k es **directa**.
Si k<0 se dice que la homotecia h_k es **inversa**.

4.2. Caracterización de las homotecias vectoriales de V_n

Sea h una transformación lineal de V_n. Se verifica que h es una homotecia vectorial si y solo si h(D)=D para cualquier recta D de V_n.

En efecto:

$\Rightarrow$) Sea h la homotecia vectorial de razón k, y D=$\langle \vec{v} \rangle = \{\lambda\vec{v},\ \lambda \in R\}$ una recta cualquiera de V_n, entonces $h(\lambda\vec{v}) = k(\lambda\vec{v}) = (k\ \lambda)\vec{v} \in D$, luego h(D)$\subset$D, como h es biyectiva, h(D)=D.

$\Leftarrow$) Sea D una recta vectorial cualquiera. Por ser h(D)=D, dado un vector $\vec{v}$ de D , no nulo, existe un escalar k≠0 tal que h($\vec{v}$)=k$\vec{v}$.

Veamos que $h(\vec{u}) = k\vec{u}$, $\forall \vec{u} \in V_n$ (k no depende de $\vec{v}$).

i) Sea $\vec{w} \neq \vec{v}$ con $\vec{w} \in D$, entonces $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ y $h(\vec{w}) = h(\lambda\vec{v}) = h(\lambda\vec{v}) = h(\lambda\vec{v}) =$
$= \lambda h(\vec{v}) = \lambda k(\vec{v}) = k(\lambda\vec{v}) = k\vec{w}$.

ii) Sea $\vec{u} \notin D$, por ser h lineal $h(\vec{w}+\vec{u}) = h(\vec{w}) + h(\vec{u})$. Como h transforma una recta vectorial en si misma, existen escalares k’, k’’ tales que:

$\begin{cases} h(\vec{w}+\vec{u}) = k''(\vec{w}+\vec{u}) \\ h(\vec{u}) = k'(\vec{u}) \end{cases}$, por tanto, se verificaría que:

$k''(\vec{w}+\vec{u}) = k''\,\vec{w} + \vec{u}k'' = k\vec{w} + \vec{u}k'$ $\Leftrightarrow$ (k''-k) $\vec{w}$ +(k''-k') $\vec{u}$ =0, siendo $\vec{u}$ y $\vec{w}$ dos vectores linealmente independientes (por no pertenecer a la misma recta vectorial), luego ha de ser k''-k=k''-k'=0 $\Leftrightarrow$ k''=k'=k.

Por tanto $h\,h(\vec{u}) = k\vec{u}$, $\forall \vec{u} \in V_n$.

Consecuencias:

i) Las homotecias vectoriales conservan los ángulos entre rectas.

ii) Conservan los ángulos entre vectores:

$$\cos(k\vec{u}, k\vec{v}) = \frac{k\vec{u} \cdot k\vec{v}}{|k||\vec{u}||k||\vec{v}|} = \frac{k^2(\vec{u} \cdot \vec{v})}{|k|^2|\vec{u}||\vec{v}|} = \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

iii) El conjunto de las homotecias vectoriales es un grupo conmutativo respecto del producto.

Veamos que es ley interna. Sean h_{k_1} y h_{k_2} dos homotecias vectoriales cualesquiera, la transformación producto $h_{k_1} \circ h_{k_2}$, respecto de la referencia ortonormal R viene definida por la matriz producto $(k_1 \cdot I_n) \cdot (k_2 \cdot I_n) = (k_1 \cdot k_2) \cdot I_n$ que define la homotecia vectorial $h_{k_1 \cdot k_2}$ de razón k_1k_2.
(El resto de la demostración se propone como ejercicio)

4.3. Homotecias afines de E_n (n=1, 2, 3)

Definición: Sea E_n el espacio afín euclídeo de dimensión n cuyo R-espacio vectorial asociado es V_n. Llamaremos **homotecia afín** a toda transformación geométrica H de E_n cuya aplicación lineal de V_n asociada sea una homotecia vectorial h_k con $k \neq 0$ y $k \neq 1$.
Si k>0 se dice que la homotecia es **directa**.
Si k<0 se dice que la homotecia es **inversa**.

Fijada una referencia ortonormal de V_n, su matriz asociada es, por tanto, de la forma $k\,I_n$.

Centro de una homotecia afín

Las homotecias afines de E_n de razón $k \neq 0$ y $k \neq 1$ tienen un solo punto doble o invariante que denominaremos **centro** de la homotecia.

En efecto:
La ecuación vectorial de la homotecia afín de razón k, fijada previamente una referencia ortonormal R, puede escribirse de la forma:

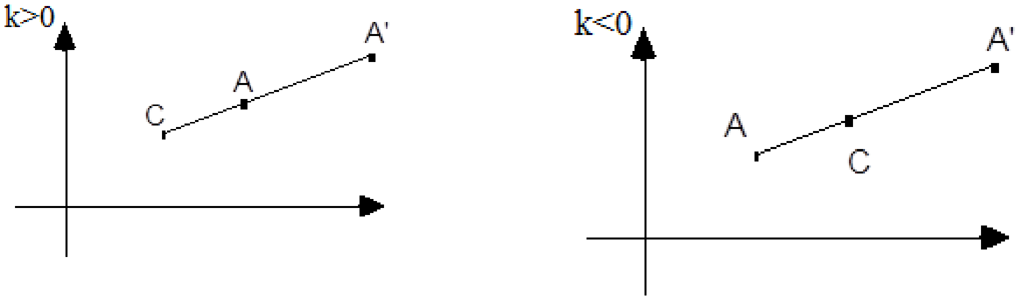
$X' = O' + (kI_n)\overrightarrow{OX}$ donde O es el origen de la referencia R y O' su homólogo por la homotecia H.
Haciendo X'=X queda $X=O'+(kI_n)X \Leftrightarrow (1-k)\,I_nX=O'$ (∗).
Ahora bien, rango$[(1-k)I_n]$ = n si $k\neq1$, luego (∗) es un sistema compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

NOTA: Si denotamos por C a dicho punto, designaremos $H_{(C,k)}$ a la homotecia afín de centro C y razón k.

Consecuencia (Ecuación de $H_{(C,k)}$)

Respecto de la referencia ortonormal R, la ecuación de una homotecia de centro C y razón k, $H_{(C,k)}$ es: $\boxed{X' = C + (kI_n)\overrightarrow{CX}}$

Interpretación geométrica:



Observaciones:

i) Si k = -1 $\Rightarrow$ $H_{(C,-1)} = S_C$ simetría central de centro C.

ii) Si k = 1, es decir, si tenemos una transformación geométrica de E_n cuya transformación asociada es I_n, puede ocurrir, o bien, que deje invariantes todos los puntos, en cuyo caso se trata de la identidad, o bien, que no tenga ningún punto doble, en cuyo caso sería una traslación $T_{\vec{u}}$ dónde $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ siendo A un punto cualquiera de E_n.

4.4. Grupo de las homotecias y traslaciones

El conjunto de las homotecias y traslaciones de E_n forman un grupo respecto del producto (composición) de aplicaciones.

En efecto:
i) Veamos primero que es ley interna.
Sean T_1 y T_2 dos transformaciones de E_n que son homotecias y/o traslaciones, designemos por h_{k_1} y h_{k_2} sus homotecias vectoriales asociadas (k_1, k_2, no nulas). La transformación $T_1 \circ T_2$ tiene como aplicación asociada $h_{k_1} \circ h_{k_2} = h_{k_1 \cdot k_2}$, entonces:
- O bien $k_1k_2=1$, por tanto $h_{k_1 \cdot k_2} = I_n$ y $T_1 \circ T_2$ es una traslación o la identidad I_{En}.
- O bien $k_1k_2 \neq 1$ y $T_1 \circ T_2$ es una homotecia de razón k_1k_2 y centro su único punto doble.

ii) Se verifica que el producto es asociativo (por serlo en general el producto de aplicaciones).

iii) El elemento unidad es la identidad.

iv) La inversa de la transformación T, que tiene como aplicación vectorial asociada h_k, es la transformación T^{-1} que tiene como asociada a $h_{\frac{1}{k}}$.

$$\text{Si} \begin{cases} T = T_{\vec{u}} \Rightarrow T^{-1} = T_{-\vec{u}} \\ T = H_{(C,k)} \Rightarrow T^{-1} = H_{\left(C,\frac{1}{k}\right)} \quad (k \neq 0) \end{cases}$$

Consecuencias:

1- El producto de dos homotecias afines con el mismo centro es otra homotecia con el mismo centro y razón el producto de las razones o la identidad si el producto de las razones es 1.

2- El producto de dos homotecias afines con distinto centro $H_{(C_1,k_1)}$ y $H_{(C_2,k_2)}$:

i) Si $k_1k_2 \neq 1$ es otra homotecia $H_{(C,k)}$ cuyo centro $C \neq C_1, C_2$ pero alineado con ellos y $k=k_1k_2$.

ii) Si $k_1k_2 = 1$ se trata de una traslación $T_{\vec{u}}$ siendo $\vec{u} = (1-k_2)\overrightarrow{C_1C_2}$

En efecto:

$H_{(C_1,k_1)}(X) = X' \Leftrightarrow \overrightarrow{C_1X'} = k_1\overrightarrow{C_1X}$ y $H_{(C_2,k_2)}(X') = X'' \Leftrightarrow \overrightarrow{C_2X''} = k_2\overrightarrow{C_2X'}$

Entonces, $\overrightarrow{C_2X''} = k_2\overrightarrow{C_2X'} = k_2\left(\overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{C_1X'}\right) = k_2\overrightarrow{C_2C_1} + k_2\overrightarrow{C_1X'} =$

$$= k_2\overrightarrow{C_2C_1} + k_2\left(k_1\overrightarrow{C_1X}\right) = k_2\overrightarrow{C_2C_1} + \underbrace{k_2k_1}_{1}\overrightarrow{C_1X} = k_2\overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{C_1X} = k_2\overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_2X}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{C_2X''} - \overrightarrow{C_2X} = k_2\overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} = -k_2\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_2} \Rightarrow \overrightarrow{XX''} = (1-k_2)\overrightarrow{C_1C_2}$. Luego, se trata efectivamente de $T_{\vec{u}}$, con $\vec{u} = (1-k_2)\overrightarrow{C_1C_2}$.

4.5. Algunas propiedades de las homotecias afines y traslaciones

1.- Una transformación geométrica T es una homotecia o una traslación de E_n si y solo si la imagen por T de cualquier recta afín de E_n es otra recta afín paralela a ella.

2.- Si T es una homotecia o una traslación de E_n transforma variedades lineales de E_n en variedades lineales de E_n de la misma dirección.

3.- Si T es una homotecia o una traslación de E_n conserva los ángulos entre variedades lineales de E_n.

4.- Toda homotecia $H_{(C,k)}$ de E_n verifica que si A, A' y B, B' son dos pares cualesquiera de puntos homólogos por $H_{(C,k)}$, entonces d(A',B')= $|k|$ d(A,B).

5.- Si T es una homotecia de E_n transforma segmentos en segmentos de igual dirección y proporcionales.

6.- Dadas dos circunferencias de E_2 de radios distintos existen siempre dos homotecias, una directa y otra inversa, respecto de las cuales son homólogas (homotéticas).

Análogamente dadas dos esferas de E_3 de radios distintos existen siempre dos homotecias, una directa y otra inversa, respecto de las cuales son homólogas (homotéticas).

En general, dadas dos bolas de E_n de radios distintos existen siempre dos homotecias, una directa y otra inversa, respecto de las cuales son homólogas (homotéticas).

CAPÍTULO QUINTO

5. Semejanzas del Espacio Euclídeo

5.1 Semejanzas de E_n

Definición: Llamaremos **semejanza** de E_n a toda transformación geométrica S de E_n que cumpla la siguiente condición:

$$\boxed{\text{Para cualesquiera } A,B \in E_n \quad d(S(A),S(B)) = k\,d(A,B) \quad \text{siendo } k \in \mathbb{R} \text{ y } k>0.}$$

El número k>0 se denomina **razón de la semejanza**.

Si k=1 entonces S es un movimiento (isometría) de E_n. Los movimientos de E_n se consideran pues, semejanzas de razón 1.

Lema:

Sea S_k una semejanza de razón k de E_n .Si $C \in E_n$ y $H_{(C,k)}$ es la homotecia de centro C y razón k, existen dos únicos movimientos T y T' de E_n tales que:

$$\boxed{S_k = H_{(C,k)} \circ T = T' \circ H_{(C,k)}}.$$

En efecto, consideremos la transformación geométrica $T = H_{\left(C,\frac{1}{k}\right)} \circ S_k$; para cualesquiera par de puntos A y B de E_n, T verifica que:

$$d(T(A),T(B)) = d\left(H_{\left(C,\frac{1}{k}\right)}(S_k(A)), H_{\left(C,\frac{1}{k}\right)}(S_k(B))\right) = \frac{1}{k} d(S_k(A),S_k(B)) = \frac{1}{k} k d(A,B) =$$

$=d(A,B)$, luego T es un movimiento y $S_k = \left(H_{\left(C,\frac{1}{k}\right)}\right)^{-1} \circ T = H_{(C,k)} \circ T$.

Análogamente se demuestra que $T' = S_k \circ H_{\left(C,\frac{1}{k}\right)}$ es un movimiento.

La unicidad de T y T' se deduce de la unicidad de $H_{\left(C,\frac{1}{k}\right)}$.

Teorema: Toda semejanza S_k de E_n es una aplicación afín y biyectiva de E_n.
En efecto, por serlo T y $H_{(C,k)}$ se deduce directamente del lema anterior.

5.2 Distintas descomposiciones de una semejanza:

i) Toda semejanza se puede descomponer como el producto de una homotecia y un movimiento, de infinitas formas, siendo la razón de la homotecia igual a la razón de la semejanza.

ii) Recíprocamente, el producto de un movimiento y una homotecia de razón $k\neq 0$ es una semejanza de razón $|k|$.

En efecto: i) Se deduce directamente del lema, basta variar el centro C de la homotecia para obtener distintas descomposiciones de la semejanza.
Para demostrar ii) consideramos un movimiento T y una homotecia $H_{(C,k)}$ ($k\neq 0$) cualesquiera de E_n y comprobamos que su producto es una semejanza:

$$d\left(H_{(C,k)}\circ T(A), H_{(C,k)}\circ T(B)\right) = d\left(H_{(C,k)}(T(A)), H_{(C,k)}(T(B))\right) =$$

$= |k|\,d(T(A),T(B)) = |k|\,d(A,B)$ siendo A y B dos puntos cualesquiera de E_n.

Se trata efectivamente de una semejanza de razón $|k|$.

5.3 Grupo de las semejanzas

El conjunto de las semejanzas de E_n respecto del producto (composición) tiene estructura de grupo. Se designa por Sem(E_n).

En efecto:
1. Es cerrado respecto del producto: Dadas S_k, $S_{k'}$ dos semejanzas cualesquiera de E_n $(k, k'>0)$ entonces $d\left(S_k\circ S_{k'}(A), S_k\circ S_{k'}(B)\right) = d\left(S_k(S_{k'}(A)), S_k(S_{k'}(B))\right) = kd\left(S_{k'}(A), S_{k'}(B)\right) = kk'd(A,B)$. Luego $\boxed{S_k\circ S_{k'} = S_{kk'}}$.
2. El producto es asociativo por serlo el producto de aplicaciones en general.
3. El elemento unidad es, obviamente, la aplicación identidad I_n.
4. La semejanza inversa de la semejanza S_k existe y es una semejanza de razón $\frac{1}{k}$:

$d(S_k(A), S_k(B)) = k\,d(A,B) \Rightarrow d\left((S_k)^{-1}(A'), (S_k)^{-1}(B')\right) = d(A,B) =$

$=\frac{1}{k}d(S_k(A), S_k(B))$, luego $\boxed{(S_k)^{-1} = S_{\frac{1}{k}}}$

Su existencia se deduce directamente del lema (al existir las inversas de T y $H_{(C,k)}$).

5.4. Caracterización de la transformación lineal asociada a una semejanza

Si f es la transformación lineal de V_n asociada a la semejanza S_k, entonces existe una única transformación ortogonal g tal que $\boxed{f = h_k\circ g = g\circ h_k}$, siendo h_k la homotecia vectorial de razón k.

En efecto, por ser la semejanza una aplicación afín y biyectiva, su aplicación f asociada es lineal y biyectiva. Además el lema nos asegura que para cualquier punto C de E_n existen dos isometrías T y T' tales que $S_k = H_{(C,k)}\circ T = T'\circ H_{(C,k)}$, luego $f = h_k\circ g = g'\circ h_k$ donde g y g' son las transformaciones ortogonales asociadas a T y T' respectivamente. Por tanto:

$\begin{cases} g = h_k^{-1}\circ f = h_{\frac{1}{k}}\circ f \\ g' = f\circ h_k^{-1} = f\circ h_{\frac{1}{k}} \end{cases}$. Ahora bien, para cada vector $\vec{u}$ de V_n, se verifica:

$$\left\{\begin{array}{l} g(\vec{u}) = h_{\frac{1}{k}} \circ f(\vec{u}) = \frac{1}{k} f(\vec{u}) \\ g'(\vec{u}) = f \circ h_{\frac{1}{k}}(\vec{u}) = f\left(\frac{1}{k}\vec{u}\right) = \frac{1}{k} f(\vec{u}) \end{array}\right.$$, luego g=g'. Es decir, existe una única transformación ortogonal g tal que $\boxed{f = h_k \circ g = g \circ h_k}$

Consecuencia: Fijada la referencia ortonormal $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$, la matriz asociada a S_k, respecto de R, es el producto de las matrices asociadas a h_k y g, es decir, $M=(kI_n)Q=kQ$ donde k es la razón de la semejanza y Q es la matriz que define la transformación ortogonal g.

Su determinante $|M| = |kQ| = k^n |Q| = \pm k^n$.

5.5. Semejanzas directas e inversas

Sea una semejanza S_k de razón k y f su transformación lineal asociada. Se dice que S_k es una **semejanza directa** si y solo si la transformación ortogonal $g = h_{\frac{1}{k}} \circ f \in O^+(V_n) \Leftrightarrow |M| = |kQ| > 0$.

Análogamente diremos que S_k es una **semejanza inversa** si y solo si la transformación ortogonal $g = h_{\frac{1}{k}} \circ f \in O^-(V_n) \Leftrightarrow |M| = |kQ| < 0$.

5.6 Centro de una semejanza

Toda semejanza S_k de razón $k \neq 1$ tiene un único punto invariante que se denomina **centro de la semejanza**.

En efecto, consideramos dos puntos A, A' homólogos por S_k y distintos. Si M es la matriz asociada a la semejanza respecto de una referencia ortonormal R, entonces su ecuación es $X' = A' + M\overrightarrow{AX} = A' + kQ\overrightarrow{AX}$, con Q la matriz ortogonal que define un movimiento.

El conjunto de puntos invariantes es el conjunto solución del sistema definido por la ecuación $(I_n - kQ)X = B$ (*), donde $B=A'-(kQ)A$, pero $rg(I_n - kQ)=n$ ya que por ser Q ortogonal y $k \neq 1$ se tiene $|kQ\vec{u}| = |k||Q\vec{u}| = |k||\vec{u}| \neq |\vec{u}|$ $\forall \vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow kQ\vec{u} \neq \vec{u}$, $\forall \vec{u} \neq \vec{0}$ $\Leftrightarrow (I_n - kQ)\vec{u} \neq \vec{0}$ $\forall \vec{u} \neq \vec{0}$, luego $rg(I_n - kQ)=n$ y, por tanto, (*) define un sistema compatible determinado cuya solución son las coordenadas del centro de la semejanza dada.

Desde ahora designaremos $S_{(C,k)}$ a la **semejanza de centro C y razón k** $\neq 1$.

5.7. Descomposición canónica de una semejanza

Si $S_{(C,k)}$ es la semejanza de centro C y razón $k \neq 1$, entonces existe un único movimiento T tal que $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ T = T \circ H_{(C,k)}$, admitiendo T como punto invariante al punto C.

En efecto, por **(5.4.)** existe una única transformación ortogonal g tal que $f = h_k \circ g = g \circ h_k$ siendo f la transformación lineal asociada a la semejanza dada; además por el **Lema** (**5.1.**) existen dos únicos movimientos T y T' tales que $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ T = T' \circ H_{(C,k)}$. Tomando $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ T$ es obvio comprobar que C es invariante por T ($T = H^{-1}{}_{(C,k)} \circ S_{(C,k)}$), luego para cada $X \in E_n$:

$$S_{(C,k)}(X) = H_{(C,k)} \circ T(X) = C + h_k \circ g(\overrightarrow{CX}) = C + g \circ h_k(\overrightarrow{CX}) = T \circ H_{(C,k)}(X).$$

Por tanto, T=T' y $\boxed{S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ T = T \circ H_{(C,k)}}$.

Ecuación:

Fijada una referencia ortonormal R la semejanza $S_{(C,k)}$ tiene por ecuación $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde C es el centro de la semejanza, k su razón y M la matriz asociada al movimiento T definido en el teorema anterior.

5.8. Semejanzas del plano. Elementos que las determinan

Sea $S_{(C,k)}$ una semejanza de E_2 cuya razón $k \neq 1$ (si k=1 se trataría de un movimiento tema ya estudiado). Por **5.7.** sabemos que $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ T = T \circ H_{(C,k)}$ siendo T un movimiento que deja invariante al centro C de la semejanza. Tenemos que distinguir dos casos:

a) $S_{(C,k)}$ es una semejanza **directa**, entonces T es un movimiento directo luego se trata o bien de la identidad I_2, en cuyo caso $S_{(C,k)} = H_{(C,k)}$, o bien de una rotación de centro C en cuyo caso $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ G_{(C,\alpha)} = G_{(C,\alpha)} \circ H_{(C,k)}$.
Observemos que el segundo supuesto engloba al primero si $\alpha = 0°$.

Las semejanzas directas del plano afín quedan, por tanto, determinadas por el centro C, la razón k y el ángulo α de la rotación.

Su ecuación es $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\begin{cases} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(C,\alpha)} \end{cases}$

Respecto de la referencia canónica $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ la ecuación sería:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\operatorname{sen}\alpha \\ k\operatorname{sen}\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

Operando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ donde } \begin{cases} A = k\cos\alpha \\ B = k\operatorname{sen}\alpha \\ E = a - k(a\cos\alpha - b\operatorname{sen}\alpha) \\ F = b - k(a\operatorname{sen}\alpha + b\cos\alpha) \end{cases}.$$

También escribiremos la ecuación anterior de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & A & -B \\ F & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$ expresión muy cómoda de utilizar.

b) $S_{(C,k)}$ es una semejanza **inversa**, entonces T necesariamente es una simetría axial cuyo eje e pasa por C, luego $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ S_e = S_e \circ H_{(C,k)}$.

Las semejanzas inversas del plano afín quedan, por tanto, determinadas por el centro C, la razón k y el eje e de la simetría que recibe el nombre de eje de la semejanza.

Su ecuación es $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left\langle \begin{array}{l} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la simetría } S_e \end{array} \right.$

Respecto de la referencia canónica $R = \left\{O; \vec{i}, \vec{j}\right\}$ la ecuación sería:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & k\operatorname{sen}\alpha \\ k\operatorname{sen}\alpha & -k\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

Operando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{donde} \begin{cases} A = k\cos\alpha \\ B = k\operatorname{sen}\alpha \\ E' = a - k(a\cos\alpha + b\operatorname{sen}\alpha) \\ F' = b - k(a\operatorname{sen}\alpha - b\cos\alpha) \end{cases}.$$

O lo que es igual $$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E' & A & B \\ F' & B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

5.9. Semejanzas del espacio. Elementos que las determinan

Seguiremos un razonamiento análogo al desarrollado para el plano afín. Si $S_{(C,k)}$ una semejanza de E_3 cuya razón $k \neq 1$ (si k=1 se trataría de un movimiento tema ya tratado), por **5.7.** sabemos que $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ T = T \circ H_{(C,k)}$ siendo T un movimiento que deja invariante al centro C de la semejanza. Tenemos que distinguir dos casos:

a) $S_{(C,k)}$ es una semejanza **directa**, entonces T es un movimiento directo luego se trata, o bien de la identidad I_3, en cuyo caso $S_{(C,k)} = H_{(C,k)}$, o bien de una rotación alrededor de un eje e tal que $C \in e$, en cuyo caso $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ G_{(e,\alpha)} = G_{(e,\alpha)} \circ H_{(C,k)}$.

Observemos que el segundo supuesto engloba al primero si $\alpha = 0^{\circ}$.

Las semejanzas directas del espacio afín tridimensional quedan, por tanto, determinadas por el centro C, la razón k, el eje e y el ángulo α de la rotación.

$$\text{Su ecuación es } X' = C + kQ\overrightarrow{CX} \quad \text{donde} \left\langle \begin{array}{l} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(e,\alpha)} \end{array} \right.$$

b) $S_{(C,k)}$ es una semejanza **inversa**, entonces T es un movimiento inverso que deja invariante a C.

En este caso podemos consideramos la simetría central con centro C y por ser ésta involutiva, podemos escribir $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ S_C^2 \circ T = H_{(C,k)} \circ S_C \circ S_C \circ T$.
Como $S_C = H_{(C,-1)}$ y $H_{(C,k)} \circ S_C = H_{(C,k)} \circ H_{(C,-1)} = H_{(C,-k)}$;
$S_C \circ T$ es un movimiento directo que deja invariante a C, entonces: obviamente $S_C \circ T$ es, o bien la identidad I_3, en cuyo caso $S_{(C,k)} = H_{(C,-1)}$, o bien una rotación alrededor de un eje e tal que $C \in e$, en cuyo caso $S_{(C,k)} = H_{(C,-k)} \circ G_{(e,\alpha)} = G_{(e,\alpha)} \circ H_{(C,-k)}$

Observemos que el segundo supuesto engloba al primero si $\alpha = 0^{\circ}$.

Las semejanzas inversas del espacio afín tridimensional quedan, por tanto, determinadas por el centro C, la razón k, el eje e y el ángulo α de la rotación.

$$\text{Su ecuación es } X' = C - kQ\overrightarrow{CX} \quad \text{donde} \left\langle \begin{array}{l} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(e,\alpha)} \end{array} \right.$$