



ESPACIO VECTORIAL

1.- Introducción

2.- Espacio Vectorial

3.- Subespacios vectoriales

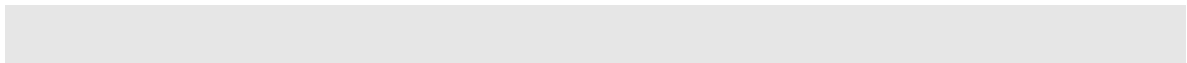
4.- Generación de Subespacios vectoriales

5.- Dependencia e independencia lineal

6.- Espacios vectoriales de tipo finito

7.- Cambio de base en un espacio vectorial

8.- Intersección y suma de subespacios vectoriales



ESPACIO VECTORIAL

1. Introducción

En general, el álgebra trata de números, matrices, vectores, aplicaciones y de operaciones entre los elementos de dichos conjuntos.

Las matemáticas según una concepción primitiva, son la ciencia del número y de la cantidad. El punto de vista clásico distinguía las distintas ramas de las matemáticas según la naturaleza de los objetos que estudiaban: la aritmética es la ciencia de los números; la geometría estudiaba los objetos en el espacio; el análisis estudiaba las funciones, etc. Sin embargo, cada vez con mayor frecuencia, técnicas y resultados de una parte de las matemáticas se mostraban útiles en otra rama.

Un conjunto es una colección de entidades; los números forman un conjunto que pertenece a una categoría bien definida el cuerpo de los números reales y en el reino animal un caballo es un elemento del conjunto de animales mamíferos. Ahora bien, un conjunto de ladrillos no constituye una casa; es necesario dotar a estos conjuntos de una estructura definida mediante diferentes reglas o axiomas; así obtenemos las estructuras de grupo, cuerpo, espacio vectorial. Estas categorías se encuentran en todas las ramas de la matemática, en la física y en otras ciencias.

No son decisivos los objetos con los que se opera sino las relaciones entre ellos. Así surgen las primeras estructuras algebraicas (grupos, anillos, cuerpos, etc.), que permiten agrupar a conjuntos de elementos de naturaleza muy distinta, pero que tienen relaciones y propiedades comunes.

Aquí vemos la estructura de espacio vectorial que es la propia de los vectores y es aplicable a las matrices, a los polinomios y a las funciones y que permite identificar matrices como vectores y resolver múltiples problemas geométricos. Constituye una base sólida para el desarrollo de los temas de geometría. Tanto es así que se describe el álgebra como la geometría que se escribe y a la geometría como el álgebra que se dibuja.

2. Espacio Vectorial

Definición:

Sea V un conjunto donde hemos definido una ley u operación interna, que designaremos por “+” $V \xrightarrow{+} V$. Sea \mathbf{K} un cuerpo (conmutativo) y sea, por último, una operación externa que designaremos por “.” $\mathbf{K} \times V \xrightarrow{\cdot} V$.

Diremos que $(V, +, \cdot)$ tiene estructura de **espacio vectorial sobre el cuerpo K** , o simplemente que $(V, +, \cdot)$ es un **K -espacio vectorial** cuando se verifiquen las condiciones siguientes:

[A1] **Asociativa:** $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$.

[A2] **Existencia de elemento neutro:** Existe un elemento que designaremos $\vec{0} \in V$ que verifica que $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

[A3] **Existencia de elemento simétrico:** Para cualquier $\vec{a} \in V$ existe un único elemento de V , que designaremos por $-\vec{a}$ tal que $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

[A4] **Conmutativa:** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b} \in V$.

Observemos que $(V, +)$ debe ser, por tanto, un **grupo conmutativo**.

[A5] $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ para cualquier $\lambda \in K$ y cualesquiera $\vec{a}, \vec{b} \in V$.

[A6] $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in K$ y cualquier $\vec{a} \in V$.

[A7] $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in K$ y cualquier $\vec{a} \in V$.

[A8] El elemento unidad del cuerpo K , que designaremos por 1, verifica $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

Usualmente a los elementos del espacio vectorial V los denominaremos **vectores**, aunque no lo sean en el sentido físico, y a los elementos del cuerpo K **escalares**.

Algunos ejemplos de espacios vectoriales

- En el tema de Sistemas, matrices y determinantes hemos estudiado que $(M_{m \times n}(K), +, \cdot)$ es un **K -espacio vectorial**, siendo “+” y “ \cdot ” la suma y producto por escalares usuales entre matrices.
- \mathbf{R}^n , $n \in \mathbf{N}$, es un espacio vectorial, siendo “+” y “ \cdot ” la suma y producto por escalares usuales entre n -uplas. (En particular, el cuerpo \mathbf{R} , el plano \mathbf{R}^2 , el espacio \mathbf{R}^3 son espacios vectoriales).
- El conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n en una variable indeterminada x es un espacio vectorial.
- Es fácil comprobar, y lo proponemos como ejercicio, que si en el conjunto de las funciones reales de variable real que designaremos por $F(\mathbf{R})$, definimos las operaciones:
 - ☞ Suma de funciones: $f+g$ es la función que verifica $(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$.
 - ☞ Producto por un número real λ : λf es la función que verifica $(\lambda f)(x)=\lambda f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$.Entonces $(F(\mathbf{R}), +, \cdot)$ es un **\mathbf{R} -espacio vectorial**

Propiedades de los espacios vectoriales:

1. $0\vec{a} = \vec{0}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

Demostración

Podemos escribir $0\vec{a} = (0 + 0)\vec{a} = 0\vec{a} + 0\vec{a} \Rightarrow \boxed{0\vec{a} = \vec{0}}$.

2. $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ para cualquier $\lambda \in \mathbf{K}$.

Demostración

Podemos escribir $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0} \Rightarrow \boxed{\lambda\vec{0} = \vec{0}}$.

3. $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$, o bien, $\vec{a} = \vec{0}$.

Demostración

Supongamos, en primer lugar, que $\lambda \neq 0$, entonces existe su inverso $\frac{1}{\lambda}$, multiplicando la expresión dada por dicho inverso se obtiene $\frac{1}{\lambda}\lambda\vec{a} = \frac{1}{\lambda}\vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{0}}$

Supongamos ahora que $\vec{a} \neq \vec{0}$. *Por reducción al absurdo*, si también fuera $\lambda \neq 0$,

entonces, igual que antes, existe $\frac{1}{\lambda}$ y multiplicando la expresión dada por dicho inverso

se obtiene $\frac{1}{\lambda}\lambda\vec{a} = \frac{1}{\lambda}\vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ *¡contra la hipótesis de partida!*

4. $(-\lambda)\vec{a} = -\lambda\vec{a}$ para cualquier $\lambda \in \mathbf{K}$ y para cualquier $\vec{a} \in V$.

Demostración

$\vec{0} = 0\vec{a} = (\lambda + (-\lambda))\vec{a} = \lambda\vec{a} + (-\lambda)\vec{a} \Rightarrow (-\lambda)\vec{a} = -\lambda\vec{a}$

5. $\lambda(-\vec{a}) = -\lambda\vec{a}$ para cualquier $\lambda \in \mathbf{K}$ y para cualquier $\vec{a} \in V$.

Demostración

$\vec{0} = \lambda\vec{0} = \lambda(\vec{a} + (-\vec{a})) = \lambda\vec{a} + \lambda(-\vec{a}) \Rightarrow \lambda(-\vec{a}) = -\lambda\vec{a}$

6. $\lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}$ para cualquier $\lambda \in \mathbf{K}$ y para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b} \in V$.

Demostración

$\lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + (-\vec{b})) = \lambda\vec{a} + \lambda(-\vec{b}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}$

7. $(\lambda - \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ y para cualquier $\vec{a} \in V$.

Demostración

$(\lambda - \mu)\vec{a} = (\lambda + (-\mu\vec{a})) = \lambda\vec{a} + (-\mu\vec{a}) = \lambda\vec{a} - \mu\vec{a}$

8. Si $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a}$, siendo $\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu$.

Demostración

Sea $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a}$, sumando el opuesto de $\mu \vec{a}$, que es $-\mu \vec{a}$, a ambos miembros se obtiene $\lambda \vec{a} - \mu \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda - \mu) \vec{a} = \vec{0}$, luego aplicando la propiedad 3 podemos afirmar que si $\vec{a} \neq \vec{0}$, entonces ha de ser $(\lambda - \mu) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \mu}$

9. Si $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{b}$, siendo $\lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$.

Demostración

Sea $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{b}$, sumando el opuesto de $\lambda \vec{b}$, que es $-\lambda \vec{b}$, a ambos miembros se obtiene $\lambda \vec{a} - \lambda \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$, luego aplicando la propiedad 3 podemos afirmar que si $\lambda \neq 0$, entonces ha de ser $(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{b}}$

3. Subespacios vectoriales

Definición:

Sea $(V, +, \cdot)$ un \mathbf{K} -espacio vectorial y F una parte no vacía de V , diremos que F es un *subespacio vectorial* de V si y solo si $(F, +, \cdot)$ es un \mathbf{K} -espacio vectorial

Teorema: Caracterización de los subespacios vectoriales

Sea F una parte no vacía del \mathbf{K} -espacio vectorial V . F es un subespacio vectorial de V , con las operaciones $+$ y \cdot inducidas por V , si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:

i) Para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b} \in F$ su suma $\vec{a} + \vec{b} \in F$. Es decir, la operación interna en V es una operación cerrada en F .

ii) Para cualesquiera $\lambda \in \mathbf{K}$, $\vec{a} \in F$ el producto $\lambda \vec{a} \in F$. Es decir, la operación externa en V es una operación cerrada en F .

Demostración

Si $(F, +, \cdot)$ es \mathbf{K} -espacio vectorial se cumplen por definición de \mathbf{K} -espacio vectorial las dos condiciones.

Recíprocamente suponiendo que se verifican las dos condiciones hemos de comprobar que se verifican los ocho axiomas de espacio vectorial. Ahora bien la operación interna $+$ en F es:

[A1]: Asociativa por ser $+$ asociativa en V .

[A2]: El elemento neutro $\vec{0} \in F$, basta tomar $\lambda = 0$ en la condición ii).

[A3]: El elemento opuesto de cualquier vector $\vec{x} \in F$ es el vector $-\vec{x} \in F$ pues basta tomar $\lambda = -1$ en la condición ii).

[A4]: Conmutativa por ser $+$ conmutativa en V .

Luego $(F, +, \cdot)$ es un grupo conmutativo. Los otros 4 axiomas se verifican de manera inmediata por ser F una parte de V , y V un \mathbf{K} -espacio vectorial.



Observación

- Las 2 condiciones anteriores equivalen a la siguiente:

Sea F una parte no vacía del \mathbf{K} -espacio vectorial V . F es un subespacio vectorial de V con las operaciones $+$ y \cdot inducidas por V si y solo si se verifica:

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \in F \text{ para cualesquiera escalares } \lambda, \mu \in \mathbf{K} \text{ y cualesquiera vectores } \vec{a}, \vec{b} \in F.$$

☞ Los conjuntos $\{\vec{0}\}$ y V cumplen siempre las condiciones de subespacio vectorial del \mathbf{K} -espacio vectorial V y les denominaremos **subespacios impropios** de V .

Algunos ejemplos de subespacios vectoriales

- El conjunto de n -uplas de \mathbf{R}^n que constituye la solución del sistema homogéneo definido por toda ecuación matricial de la forma $AX=O$, donde $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$, es un subespacio del \mathbf{R} -espacio vectorial \mathbf{R}^n .

La comprobación es inmediata si consideramos dos soluciones S_1 y S_2 del sistema homogéneo $AX=0$, es decir, $AS_1=AS_2=0$. Entonces

$$A(\lambda S_1 + \mu S_2) = A(\lambda S_1) + A(\mu S_2) = A\lambda S_1 + A\mu S_2 = \lambda(AS_1) + \mu(AS_2) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

- El subconjunto $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$ es un subespacio vectorial del \mathbf{R} -espacio vectorial \mathbf{R}^3 . La comprobación se propone como ejercicio.
- Sin embargo, $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ no es un subespacio vectorial del espacio vectorial \mathbf{R}^3 , puesto que \mathbf{R}^2 no es un subconjunto de \mathbf{R}^3 .
- ¿Es $H = \{(x, 3) \mid x \in \mathbf{R}\}$ un subespacio vectorial del espacio vectorial \mathbf{R}^2 ?

No puesto que no contiene al elemento neutro de la suma, vector nulo $\vec{0} = (0, 0) \notin H$.

4. Generación de Subespacios vectoriales:

A partir de ahora cuando escribamos V nos estaremos refiriendo al \mathbf{K} -espacio vectorial V .

Nos planteamos el problema de poder construir subespacios vectoriales de un espacio vectorial dado V a partir de un vector o varios vectores estableciendo las condiciones necesarias y las relaciones existentes entre dichos vectores.

Definición:

Sean $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ vectores de V . Llamaremos **combinación lineal** de los vectores $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ a todo vector $\vec{v} \in V$ de la forma $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$, siendo $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

Proposición

Sean $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ vectores de V . El conjunto formado por todas las combinaciones lineales posibles de los elementos $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ constituye un subespacio vectorial del espacio vectorial V .

En efecto: si observamos la caracterización de los subespacios vectoriales obliga a que cualquier combinación lineal de elementos del subespacio sea del subespacio y en este conjunto los elementos son combinaciones lineales de los vectores $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

A dicho subespacio se le denota:

$$\begin{aligned} C(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) &= L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \rangle \\ &= \{ \vec{v} \in V / \vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n, \lambda_i \in K, i = 1, \dots, n \} \end{aligned}$$

En cuyo caso diremos que $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ es un *sistema generador* del subespacio vectorial $\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \rangle$. Es interesante observar como, por ejemplo, los tres colores primarios (rojo, amarillo y azul) permiten, mediante combinación de ellos, obtener los restantes colores.

Ejemplos:

- El vector $(2,7,5) \in \mathbf{R}^3$ verifica $(2,7,5) = 2(1,2,1) + 3(0,1,1)$.

Luego es combinación lineal de los vectores $(1,2,1), (0,1,1) \in \mathbf{R}^3$

- ¿Puede expresarse el vector $(1,4,-2) \in \mathbf{R}^3$ como combinación lineal de los vectores $(1,1,1)$ y $(1,0,2) \in \mathbf{R}^3$?

Se nos pide estudiar si existe solución para la ecuación vectorial:

$$\lambda(1,1,1) + \mu(1,0,2) = (1,4,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda = 4 \\ \lambda + 2\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + \mu = 1 \\ \lambda = 4 \\ \lambda + 2\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -3 \\ \lambda = 4 \\ 4 + 2(-3) = -2 \end{cases}$$

Vemos que, en este caso, el sistema tiene *solución única* $\lambda=4$ y $\mu=-3$, luego podemos expresar: $(1,4,-2) = 4(1,1,1) - 3(1,0,2)$

- ¿Puede expresarse el vector $(5,4) \in \mathbf{R}^2$ como combinación lineal de los vectores $(2,1)$, $(1,0)$ y $(1,2) \in \mathbf{R}^2$?

Se nos pide estudiar si existe solución para la ecuación vectorial:

$$\begin{aligned} & \lambda(2,1) + \mu(1,0) + \gamma(1,2) = (5,4) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2\lambda + \mu + \gamma = 5 \\ \lambda + 2\gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 5 - 2\lambda - \gamma \\ \lambda = 4 - 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 5 - 2(4 - 2\gamma) - \gamma \\ \lambda = 4 - 2\gamma \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mu = -3 + 3\gamma \\ \lambda = 4 - 2\gamma \end{cases} \end{aligned}$$

Vemos que, en esta ocasión, el sistema también tiene solución pero *no es única*. En efecto:

Si tomamos $\gamma = 2 \Rightarrow \begin{cases} \mu = 3 \\ \lambda = 0 \end{cases}$, luego podemos expresar:

$$(5,4) = 0(2,1) + 3(1,0) + 2(1,2)$$

Pero si tomamos $\gamma = 3 \Rightarrow \begin{cases} \mu = 6 \\ \lambda = -2 \end{cases}$, luego también podemos expresar:

$$(5,4) = -2(2,1) + 6(1,0) + 3(1,2)$$

Tenemos, por tanto, tantas combinaciones lineales de los vectores dados que proporcionan $(5,4)$ como números reales ($\gamma \in \mathbf{R}$).

- ¿Puede expresarse el vector $(1,0,3) \in \mathbf{R}^3$ como combinación lineal de los vectores $(1,1,0)$ y $(1,0,1) \in \mathbf{R}^3$?

Se nos pide estudiar si existe solución para la ecuación vectorial:

$$\lambda(1,1,0) + \mu(1,0,1) = (1,0,3) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 3 = 1 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{!! 3 = 1!!} \\ \lambda = 0 \\ \mu = 3 \end{cases}$$

Vemos que, en este caso, el sistema *no tiene solución*, luego el vector $(1,0,3)$ *no es* combinación lineal de los vectores $(1,1,0)$ y $(1,0,1)$.

- Se considera el espacio vectorial $P(x)$ de los polinomios de una variable de grado menor o igual a n , con coeficientes reales. ¿Se puede expresar el polinomio $5x^2 - 7x$ como combinación lineal de los polinomios $1+x^2$, $1-x$, $2+x$?

Planteamos la ecuación vectorial $5x^2 - 7x = \lambda(1+x^2) + \mu(1-x) + \gamma(2+x)$ y resulta $5x^2 - 7x = \lambda x^2 + (-\mu + \gamma)x + \lambda + \mu + 2\gamma$ igualando coeficientes:

$$\left. \begin{array}{l} 5 = \lambda \\ -7 = -\mu + \gamma \\ 0 = \lambda + \mu + 2\gamma \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = 5 \\ \mu = 3 \\ \gamma = -4 \end{array} . \text{ Existe solución, la respuesta es sí, se puede expresar como}$$

combinación lineal.

- Expresar $\vec{v} = (1, -1, x)$ como perteneciente al subespacio vectorial $L(\{\vec{a}, \vec{b}\})$ siendo $\vec{a} = (1, 0, 2)$ y $\vec{b} = (1, 1, 3)$.

Expresamos $\vec{v} = (1, -1, x)$ como combinación lineal de los vectores \vec{a} y \vec{b}

$$\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \lambda(1, 0, 2) + \mu(1, 1, 3) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 = \lambda + \mu \\ -1 = \mu \\ x = 2\lambda + 3\mu \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

Por tanto, $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

5. Dependencia e independencia lineal.

Definición:

Sean $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ vectores de V . Diremos que los vectores $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ son **linealmente dependientes**, cuando existan los elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ no todos nulos, tales que $\vec{0} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$. También se dice que constituyen un sistema **ligado**.

Ejemplo:

- El sistema de vectores $\{(2, -4), (-3, 6)\}$ es ligado

Puesto que $\vec{0} = \lambda_1(2, -4) + \lambda_2(-3, 6)$ admite otras soluciones además de la trivial, en particular $\vec{0} = (0, 0) = 3(2, -4) + 2(-3, 6)$.

Definición:

Sean $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ vectores de V . Diremos que los vectores $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $\vec{0} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ se deduce obligatoriamente que $\lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$. También se dice que constituyen un sistema **libre**.

Ejemplo:

- El sistema de vectores $\{(1,0), (1,-1)\}$ es libre.

Puesto que $\vec{0} = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(1,-1)$ en solo admite la solución trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Proposición:

Los vectores $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ son linealmente dependientes si y solo si uno de ellos es combinación lineal de los restantes.

Demostración:

Consideremos que existe un vector que es combinación lineal de los restantes. Puede ser el primero sin perder generalidad,

$$\exists \vec{a}_1 \text{ tal que } \vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n, \text{ siendo } \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = -\vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

obteniendo una combinación lineal de los vectores igualada al vector nulo con al menos un escalar, el primero -1, distinto de cero y por tanto los vectores $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ son linealmente dependientes.

Ahora supongamos que los vectores son linealmente dependientes luego, existe al menos un escalar distinto de cero tal que $\vec{0} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$,

supongamos que es $\lambda_1 \neq 0$ se puede multiplicar por el inverso de λ_1 la ecuación vectorial

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

resultando

$$\vec{0} = \lambda_1^{-1} \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_1^{-1} \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_1^{-1} \lambda_n \vec{a}_n$$

y despejando

$$\vec{a}_1 = -\lambda_1^{-1} \lambda_2 \vec{a}_2 - \dots - \lambda_1^{-1} \lambda_n \vec{a}_n$$

se cumple que el vector \vec{a}_1 es combinación lineal de los restantes $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

¿El vector nulo que clase de sistema es?

Si consideramos un sistema formado por un vector $\{\vec{a}\}$ es evidente que forma un sistema libre, pero el sistema $\{\vec{0}\}$ es tal que, $\lambda \vec{0} = \vec{0}$ se cumple para cualquier valor de λ , $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ luego es ligado. Todo subespacio vectorial es lógicamente un sistema ligado.

Ahora, si consideramos un sistema formado por dos vectores $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ es fácil observar si son linealmente dependientes o independientes, puesto que si uno debe ser combinación

lineal del otro (en caso de ser el sistema ligado) necesariamente deben ser proporcionales; geoméricamente significa que los vectores son de la misma dirección.

Ejemplo:

- El sistema de vectores $\{(2, -4), (-3, 6)\}$ es ligado,

$$\text{puesto que } (2, -4) = -\frac{2}{3}(-3, 6)$$

Ejemplo:

- El sistema de vectores $\{(1, 0), (1, -1)\}$ es libre,

$$\text{puesto que } (1, 0) \neq \lambda(1, -1), \forall \lambda$$

Proposición:

Sea $H = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ un sistema libre entonces todo subconjunto de H es libre.

Demostración:

Por ser libre H no hay ningún vector que sea combinación lineal de los restantes y cualquier subconjunto de H cumple la misma condición.

Proposición:

Sea $H = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ un sistema ligado entonces todo conjunto que contenga a H es ligado.

Demostración:

Por ser ligado H existe, al menos; un vector combinación lineal de los restantes y cualquier conjunto que contenga a H , mantiene la combinación lineal, en efecto,

si H es tal que $\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ con $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\} \supset H$

se tiene que $\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n + 0\vec{b}_1 + \dots + 0\vec{b}_m$.

Proposición:

Cualquier sistema de vectores que contenga al vector nulo es ligado.

Demostración:

Por la proposición anterior y teniendo en cuenta que el vector nulo constituye un sistema ligado.

Ejemplos:

- Estudiar la dependencia lineal de los siguientes vectores de espacio vectorial \mathbf{R}^3
 $\vec{v}_1 = (1, 0, 1); \vec{v}_2 = (0, 2, 2); \vec{v}_3 = (3, 7, 1)$.

Vamos a ver si la ecuación vectorial tiene soluciones distintas de la trivial:

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 \Rightarrow (0, 0, 0) = \lambda_1 (1, 0, 1) + \lambda_2 (0, 2, 2) + \lambda_3 (3, 7, 1) \quad \text{la ecuación es}$$
$$\text{equivalente al sistema homogéneo } \left. \begin{array}{l} \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{que es}$$

compatible determinado puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es tres, el sistema sólo admite la solución trivial y los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son linealmente independientes.

- Estudiar la dependencia lineal de los siguientes vectores de espacio vectorial \mathbf{R}^3
 $\vec{u}_1 = (2, 3, 1); \vec{u}_2 = (1, 0, 1); \vec{u}_3 = (0, 3, -1)$.

Vamos a ver si la ecuación vectorial tiene soluciones distintas de la trivial:

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 \Rightarrow (0, 0, 0) = \lambda_1 (2, 3, 1) + \lambda_2 (1, 0, 1) + \lambda_3 (0, 3, -1) \quad \text{la ecuación es}$$
$$\text{equivalente al sistema homogéneo}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es compatible indeterminado puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es dos menor que el número de incógnitas, el sistema admite soluciones distintas de la trivial; existen dos vectores linealmente independientes y el otro es combinación lineal de ellos ($\vec{u}_1 = 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$). Por tanto, el sistema es ligado.

Definición:

El *rango* de un sistema de vectores es igual al número máximo de vectores linealmente independientes que contiene.

Ejemplos:

En los ejemplos anteriores el rango de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es tres y son los tres vectores linealmente independientes y el rango de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es dos, siendo dos el mayor número de vectores linealmente independientes.

6. Espacios vectoriales de tipo finito

Definición:

Sea $H = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ un subconjunto de V . Diremos que H es un *sistema generador* de V si para todo vector $\vec{v} \in V$ existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tal que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$.

Ejemplo:

- El sistema $H = \{(1,0), (1,1), (0,1)\}$ es generador del espacio vectorial \mathbb{R}^2 .

En efecto: cualquier vector de \mathbb{R}^2 se puede escribir $\vec{x} = (x_1, x_2) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(1,1) + \lambda_3(0,1)$ puesto que una solución puede ser $\lambda_1 = x_1 - x_2; \lambda_2 = x_2; \lambda_3 = 0$.

Definición:

Una *base* de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que sea sistema generador y libre.

Ejemplos:

- El sistema $B = \{(1,0), (1,1)\}$ es una base del espacio vectorial \mathbb{R}^2 .

En efecto: B es libre pues son dos vectores linealmente independientes, al no ser proporcionales y cualquier vector de \mathbb{R}^2 es combinación lineal de los vectores de B , $\vec{x} = (x_1, x_2) = \lambda(1,0) + \mu(1,1)$ puesto que $\lambda = x_1 - x_2; \mu = x_2$.

También se puede comprobar usando el rango: $r \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ luego B es libre y

$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{pmatrix} = 2$ significa que el vector $\vec{x} = (x_1, x_2)$ es combinación lineal de los vectores de B .

- Los vectores $\{\vec{v}_1 = (1,0,1); \vec{v}_2 = (0,2,2); \vec{v}_3 = (3,7,1); \vec{v}_4 = (0,1,0)\}$ de espacio vectorial \mathbb{R}^3 son linealmente dependientes, luego no puede formar una base de \mathbb{R}^3 .

Los vectores $\{\vec{v}_1 = (1,0,1); \vec{v}_2 = (0,2,2)\}$ de espacio vectorial \mathbb{R}^3 son linealmente independientes, pero cualquier vector de \mathbb{R}^3 es combinación lineal de los vectores de B si

se cumple $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = \lambda(1,0,1) + \mu(0,2,2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 2\mu \\ x_3 = \lambda + 2\mu \end{cases}$ puesto que

$\lambda = x_1; \mu / 2 = x_2$ resulta la condición $x_3 = x_1 + x_2$ que imposibilita a B como sistema generador de \mathbb{R}^3 luego no puede formar una base de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo:

- Estudiar si $B = \{(1,1,1), (1,2,3), (1,0,-1)\}$ es base de \mathbb{R}^3 .

Estudiamos $r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < n^\circ$ de vectores de B,

luego B no es libre y, por tanto no puede ser base de \mathbb{R}^3 .

Proposición:

La expresión de cualquier vector de V respecto a una base de V es única.

Demostración:

Sea $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base del espacio vectorial V. Por ser B base es libre y sistema generador, por tanto, $\forall \vec{v} \in V$ existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tales que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$. Ahora si los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, no son únicos existirán otros $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ tales que $\vec{v} = \mu_1 \vec{e}_1 + \dots + \mu_n \vec{e}_n$ restando las dos expresiones del vector \vec{v} queda $\vec{v} - \vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n - \mu_1 \vec{e}_1 - \dots - \mu_n \vec{e}_n \quad \vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1) \vec{e}_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \vec{e}_n$. Utilizando que los vectores de B son linealmente independientes resulta: $0 = \lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_n - \mu_n \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1; \dots; \lambda_n = \mu_n$.

Definición:

Los escalares $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tales que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$ son las **coordenadas del vector \vec{v} respecto de la base $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$** del espacio vectorial V.

En consecuencia, fijada una base cualquiera $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ de V podemos establecer la siguiente aplicación:

$$V \longrightarrow K^n$$

$$\vec{x} \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ tal que } \vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

Esta aplicación es obviamente **biyectiva** y además verifica:

$$\vec{0} \longrightarrow (0,0,\dots,0)$$

$$\vec{x} + \vec{y} \longrightarrow (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots, \lambda_n + \mu_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

$$\alpha \vec{x} \longrightarrow (\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \dots, \alpha\lambda_n) = \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

siendo $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ y $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ las coordenadas respectivas de \vec{x} e \vec{y} respecto de B. Diremos que los \mathbf{K} -espacios vectoriales V y \mathbf{K}^n son *isomorfos*.

Ejemplo:

Sabiendo que $B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ es una base de \mathbf{R}^3 , hallar las coordenadas del vector $(3,1,0)$ respecto de B.

Buscamos los tres escalares que son la *solución única* de la ecuación vectorial:

$$(3,1,0) = x(1,1,1) + y(0,1,1) + z(0,0,1)$$

La anterior ecuación define el sistema
$$\begin{cases} 3 = x \\ 1 = x + y \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 - x = 1 - 3 = -2 \\ z = -x - y = -3 + 2 = -1 \end{cases} .$$

Luego **(3,-2,-1)** son las coordenadas del vector **(3,1,0)** respecto de B, es decir:

$$(3,1,0) = 3(1,1,1) - 2(0,1,1) - 1(0,0,1)$$

Observación: Para identificar al vector \vec{v} podemos utilizar la expresión analítica $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$, o sus coordenadas $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ respecto de la base B, pudiendo escribir

dichas coordenadas mediante la matriz columna $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Por ejemplo: si escribimos $(1,0,0)$

respecto de la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ del espacio vectorial \mathbf{R}^3 estamos indicando al vector \vec{e}_1 , puesto que: $\vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = (1,0,0)$, siendo los restantes vectores: $\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = (0,1,0)$ y $\vec{e}_3 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 = (0,0,1)$. En general $(1,0,\dots,0)$ indica al primer vector de la base; $(0,1,0,\dots,0)$ indica al segundo vector de la base y así sucesivamente hasta el último vector $(0,\dots,0,1)$ del espacio vectorial V.

Definición:

Llamaremos *base canónica*, B_c , a la base:

$$B_c = \{e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,0,1)\}$$
 del espacio vectorial V.

Definición:

Los vectores $(\lambda_1 \vec{e}_1, \dots, \lambda_n \vec{e}_n)$ tales que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$ son las *componentes del vector \vec{v} respecto de la base* $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ del espacio vectorial V.

Proposición:

Todo espacio vectorial V distinto del $\{\vec{0}\}$ tiene al menos una base.

Demostración:

Por ser V un espacio vectorial de tipo finito, admite un sistema finito de generadores $G = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$.

Si G es libre, ya es base de V . Si $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ no es libre, existe algún vector \vec{a}_i que es combinación lineal de los restantes, supongamos que es \vec{a}_n ,

El sistema $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}\}$ sigue siendo generador de V . si también es libre, ya es base. En caso contrario, reiteramos el proceso, que si no es libre resulta ligado y uno de los vectores, por ejemplo, \vec{a}_{n-1} es combinación lineal de los restantes; el proceso es finito por ser G finito hasta obtener un sistema y generador libre y por consiguiente base o únicamente queda $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ y necesariamente base de V (V distinto del $\{\vec{0}\}$).

Corolario

Todo sistema generador contiene una base.

Proposición:

Si V es un espacio vectorial generado por n vectores, entonces cualquier sistema libre de V tiene como mucho n vectores.

Demostración:

Sea $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ un sistema generador del espacio vectorial V . Si $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s\}$ es un sistema libre de V . El conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_1\}$ es ligado (ya que $\vec{b}_1 \in V$ y $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ es sistema generador de V) y la combinación lineal $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n + \mu_1 \vec{b}_1 = \vec{0}$ da lugar a la existencia de algún $\lambda_i \neq 0$ (no puede ser $\mu_1 \vec{b}_1 = \vec{0}$ con $\mu_1 \neq 0$), por consiguiente, podemos quitar un vector \vec{a}_i (por ejemplo \vec{a}_1) y queda $\{\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_1\}$ como sistema generador del espacio vectorial V . Repitiendo el proceso resulta $\{\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ que es ligado, obteniéndose el sistema generador $\{\vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

Así sucesivamente, llegaríamos a:

- Si $n < s \Rightarrow \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n, \vec{b}_{n+1}, \dots, \vec{b}_s\}$ libre y $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ sería un sistema generador lo cual es absurdo.

- Si $n=s \Rightarrow \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ es libre y sistema generador, por tanto base de V .
- Si $s < n \Rightarrow \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s, \vec{a}_{s+1}, \dots, \vec{a}_n\}$ sistema generador del espacio vectorial V .

Solamente es posible que $s \leq n$, es decir todo sistema libre tiene como mucho n vectores linealmente independientes.

Teorema de la base

Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

Demostración:

Sean $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ dos bases de un mismo espacio vectorial V .

Por ser B y B' bases son sistemas libres y sistemas generadores de V , aplicando la proposición anterior:

B es sistema generador y B' es sistema libre $\Rightarrow m \leq n$.

B' es sistema generador y B es sistema libre $\Rightarrow n \leq m$.

Como $m \leq n$ y $n \leq m \Rightarrow n = m$.

Definición:

El número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial se denomina **dimensión** del espacio vectorial. Escribiremos $\dim(V)$.

Si B es una base de V , se tiene que $\dim(V) = \text{cardinal de } B$.

Ejemplos:

En los espacios vectoriales \mathbf{R} , \mathbf{R}^2 , $\mathbf{R}^3, \dots, \mathbf{R}^n$, $P_n(x)$ y $M_{m \times n}$ las dimensiones son: 1, 2, 3, ..., n , $n+1$, $m \cdot n$ respectivamente.

La dimensión del subespacio impropio $\{\vec{0}\}$, por convenio, es cero y es el único espacio vectorial que no tiene base. Si F es un subespacio vectorial del espacio vectorial V , entonces se cumple que:

$$\dim(F) \leq \dim(V).$$

Proposición:

Sea H un sistema de vectores del espacio vectorial V , se cumple que $r(H) = \dim\langle H \rangle$.

Teorema

Si V un espacio vectorial de dimensión n y B conjunto de n vectores de V , entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. B es una base de V .
2. B es un sistema generador de V .
3. B es un sistema libre.

Demostración:

Por definición de base si B es una base de V es un sistema generador de V .

Cuando B es sistema generador de V : $r(B)=\dim\langle B\rangle=\dim(V)=n$ y por tanto B es libre.

Sea $B=\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ un sistema libre de n vectores del espacio vectorial V , falta demostrar que B es un sistema generador de V .

Sea $\vec{x} \in V$ entonces $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{x}\}$ es ligado por ser $n+1$ el número máximo de vectores linealmente independientes y por tanto $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n + \lambda \vec{x} = \vec{0}$ con algún $\lambda_i \neq 0$; no puede ser $\lambda = 0$ puesto que sino B no sería libre y por tanto $\lambda \neq 0$ con lo cual $-\lambda^{-1} \lambda_1 \vec{a}_1 - \dots - \lambda^{-1} \lambda_n \vec{a}_n = \vec{x}$ siendo B un sistema generador de V y al ser un sistema libre resulta una base de V .

Teorema de la base incompleta

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s\}$ con $s < n$ un sistema libre. Siempre pueden encontrarse $n-s$ vectores de V , $\{\vec{a}_{s+1}, \dots, \vec{a}_n\}$ tales que el conjunto $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s, \vec{a}_{s+1}, \dots, \vec{a}_n\}$ sea una base de V .

Demostración:

Sea $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s\}$ un sistema libre de V , luego existirá al menos un elemento \vec{a}_{s+1} de V tal que $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s, \vec{a}_{s+1}\}$ es un sistema libre (si no fuera así sería $s=n$).

Si $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s, \vec{a}_{s+1}\}$ es un sistema libre de V , luego existirá al menos un elemento \vec{a}_{s+2} de V tal que $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s, \vec{a}_{s+1}, \vec{a}_{s+2}\}$ es un sistema libre (si no fuera así $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s, \vec{a}_{s+1}\}$ es una base y $s+1=n$).

Es evidente que el proceso anterior se acaba después de $n-s$ veces, siendo $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s, \vec{a}_{s+1}, \dots, \vec{a}_n\}$ una base de V .

Corolario (prolongación de la base)

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea F un subespacio vectorial de V siendo $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s\}$ una base de F , se puede encontrar una base de V que contiene a los vectores $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s\}$.

Proposición:

El conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas de m ecuaciones y n incógnitas es un subespacio vectorial del espacio vectorial K^n , siendo la dimensión n menos el rango de la matriz de los coeficientes.

Demostración:

Sea el sistema homogéneo
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = 0. \text{ Si } r(A)=r$$

queda
$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{array} \right\} \text{ quedando } r \text{ ecuaciones y } r \text{ incógnitas}$$

linealmente independientes y por tanto $n-r$ parámetros que indican la dimensión del subespacio vectorial.

Ecuaciones de un subespacio vectorial

Un subespacio vectorial F de un espacio vectorial V queda identificado conocida una base de F o unas ecuaciones paramétricas o por sus ecuaciones cartesianas. Siendo posible pasar de unas ecuaciones a otras, obtener una base y determinar su dimensión.

Ejercicio:

Sea el subespacio vectorial F generado por los siguientes vectores de espacio vectorial R^3 : $\vec{u}_1 = (2, 3, 1); \vec{u}_2 = (1, 0, 1); \vec{u}_3 = (0, 3, -1)$. Se pide:

- a) Dimensión y una base F .
- b) Unas ecuaciones paramétricas de F .
- c) Ecuaciones cartesianas o implícitas de F .
- d) A partir de las ecuaciones cartesianas otras ecuaciones paramétricas distintas del apartado anterior.
- e) ¿El vector $(1, 0, 0)$ pertenece o no a F ?
- f) Una base del espacio vectorial R^3 que contenga a los vectores de una base de F

Solución:

a) Se tiene que $H = \{\bar{u}_1; \bar{u}_2; \bar{u}_3\}$ es ligado y por tanto $F = \langle H \rangle = \langle \bar{u}_2; \bar{u}_3 \rangle$. Tenemos que $\{\bar{u}_2; \bar{u}_3\}$ es una base del espacio vectorial F y su dimensión es 2, el cardinal de cualquier base.

b) Veamos, unas ecuaciones paramétricas de V . Como $\forall \bar{x} \in F \subset V$ se tiene que

$$\bar{x} = \lambda \bar{u}_2 + \mu \bar{u}_3 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 3, -1) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = 3\mu \\ x_3 = \lambda - \mu \end{array} \right\}, \quad \text{o bien,}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial } F, \text{ pues dando}$$

valores a los parámetros λ, μ se obtiene las coordenadas de los vectores de F , siendo la dimensión de F el número de parámetros linealmente independientes que tienen sus ecuaciones paramétricas.

c) Eliminando los parámetros obtenemos las ecuaciones cartesianas o implícitas de F .

$$r(H) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{y por el teorema de Rouche-Fröbenius} \quad r \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 3 \\ x_3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{luego } \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 3 \\ x_3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \text{ es la } \textbf{ecuación cartesiana o implícita} \text{ que}$$

identifica a F ; las coordenadas de cualquier vector de F cumplen la ecuación anterior. Podemos observar que la $\dim F = \dim V -$ número de ecuaciones linealmente independientes. Cuando $F=V$ no hay ecuaciones cartesianas.

d) Se puede pasar de las ecuaciones cartesianas a las ecuaciones paramétricas, simplemente resolviendo el sistema de ecuaciones. En nuestro caso, con una sola ecuación $-3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$ se despeja una incógnita $x_2 = 3x_1 - 3x_3$ quedando en función de las

$$\text{otras dos } \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 3\alpha - 3\beta \\ x_3 = \beta \end{cases} \text{ otras ecuaciones paramétricas de } F.$$

e) Las ecuaciones permiten saber que vectores son del subespacio vectorial F . Sustituyendo las coordenadas en las ecuaciones $-3 \cdot 1 + 0 + 3 \cdot 0 = 0$, evidentemente no se cumple, por tanto la respuesta es que $(1, 0, 0) \notin F$.

Escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



Si llamamos $\vec{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, abreviadamente la

ecuación matricial anterior se escribe $\vec{X}' = P\vec{X}$, donde P es la matriz que define el cambio de la base B a la base B' . Diremos que P es la matriz de paso de B a B' .

Observaciones:

1. P tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B'
2. $\text{rango}(P) = n$, pues sus columnas son las coordenadas de los vectores de la base B , luego P es una matriz regular (invertible) y por tanto $|P| \neq 0$.
3. Si P es la matriz de paso de B a B' , entonces P^{-1} es la matriz de paso de B' a B .

Ejemplo:

Sea $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ una base de \mathbf{R}^3 , hallar las ecuaciones de cambio de la base B a la base canónica $B_C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y viceversa.

- a) Designemos por (x,y,z) y (x_c,y_c,z_c) las coordenadas, respectivas, de un vector cualquiera de \mathbf{R}^3 respecto de B y B_C . Como las coordenadas de los vectores de la base B vienen en función de los vectores de la base canónica B_C , escribiremos directamente la **ecuación matricial del cambio de la base B a la base canónica B_C** :

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \vec{X}_C = P\vec{X}$$

La matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base canónica B_C .

b) La ecuación matricial del cambio de la base canónica B_C a la base B se obtiene

$$\text{despejando en la ecuación anterior: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \quad \vec{X} = P^{-1} \vec{X}_c$$

La matriz $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B_C respecto de la base B .

Ejemplo:

Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B' = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3\}$ dos bases de \mathbf{R}^3 , siendo:

$$\vec{u}_1 = (2, 1, 0), \vec{u}_2 = (-1, 0, 1), \vec{u}_3 = (0, 1, -2); \vec{u}'_1 = (0, 1, 1), \vec{u}'_2 = (1, 0, 0), \vec{u}'_3 = (2, 0, 1)$$

Se piden las ecuaciones de cambio de la base B a la base B' y viceversa.

Realizaremos el ejercicio por dos procedimientos diferentes:

Solución:

1^{er} Procedimiento

Dado que los vectores de las bases B y B' están en función de la base canónica B_C , podemos escribir directamente las ecuaciones matriciales de cambio de la base B a la base B_C , y de la base B' a la base B_C .

Designemos por (x, y, z) , (x', y', z') y (x_c, y_c, z_c) las coordenadas, respectivas, de un vector cualquiera de \mathbf{R}^3 respecto de B , B' y B_C . Así tenemos:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación matricial del cambio de } B \text{ en } B_C$$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación matricial del cambio de } B' \text{ en } B_C$$

$$\text{Igualando ambas expresiones: } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Despejando sucesivamente se obtienen las ecuaciones pedidas:

a) **Ecuación matricial del cambio de B en B'**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b) **La ecuación matricial del cambio de B' en B**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

2º Procedimiento

a) Para hallar la **ecuación matricial del cambio de base de B en B'** obtenemos, previamente, las coordenadas de los vectores de la base B en función de los vectores de la base B'.

$$(2,1,0) = \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,0) + \delta(2,0,1) \Rightarrow \begin{cases} 2 = \mu + 2\delta \\ 1 = \lambda \\ 0 = \lambda + \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 2 - 2\delta = 4 \\ \lambda = 1 \\ \delta = -\lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_1 = (1,4,-1)_B$$

$$(-1,0,1) = \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,0) + \delta(2,0,1) \Rightarrow \begin{cases} -1 = \mu + 2\delta \\ 0 = \lambda \\ 1 = \lambda + \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -1 - 2\delta = -3 \\ \lambda = 0 \\ \delta = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_2 = (0,-3,1)_B$$

$$(0,1,-2) = \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,0) + \delta(2,0,1) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \mu + 2\delta \\ 1 = \lambda \\ -2 = \lambda + \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -2\delta = 6 \\ \lambda = 1 \\ \delta = -2 - \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_3 = (1,6,-3)_B$$

Luego
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b) La **ecuación matricial del cambio de B' en B** se obtiene despejando en la anterior:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

8. Intersección y suma de subespacios vectoriales

Teorema

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V , entonces $E_1 \cap E_2$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial V .

Demostración:

$E_1 \cap E_2 = \{ \vec{x} \in V / \vec{x} \in E_1 \text{ y } \vec{x} \in E_2 \}$. Sabiendo que E_1 y E_2 son subespacios vectoriales y se cumplen la caracterización de subespacios. Primeramente $E_1 \cap E_2 \subset V$ y luego:

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{a}, \vec{b} \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \vec{a}, \vec{b} \in E_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \in E_1 \\ \text{y} \\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in E_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \in E_2 \end{array} \right\}_{E_i \text{ subesp.}}$$

$$\Rightarrow \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \in E_1 \cap E_2.$$

Por tanto, la intersección de subespacios es otro subespacio, sin embargo la unión $E_1 \cup E_2 = \{ \vec{x} \in V / \vec{x} \in E_1 \text{ o } \vec{x} \in E_2 \}$ no es un subespacio vectorial del espacio vectorial V .

Contraejemplo:

Sean $E_1 = \langle \vec{x} \rangle$ y $E_2 = \langle \vec{y} \rangle$ entonces $\vec{x} + \vec{y} \notin E_1 \cup E_2$ ya que $\vec{x} + \vec{y} \notin E_1$ y $\vec{x} + \vec{y} \notin E_2$. Obsérvese que los subespacios son proporcionales a un vector y la suma no es proporcional a ninguno de los dos. La unión no es un subespacio vectorial, pero todo sistema de vectores genera un subespacio vectorial que contiene a todas las combinaciones lineales posibles de vectores del sistema.

Definición:

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V . Llamaremos *suma* de E_1 y E_2 al subespacio vectorial generado por $E_1 \cup E_2$.

$$E_1 + E_2 = \langle E_1 \cup E_2 \rangle$$

Proposición:

Se cumple que $E_1 + E_2 = \langle E_1 \cup E_2 \rangle = \{ \vec{x} \in V / \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 \in E_1 \text{ y } \vec{x}_2 \in E_2 \}$.

Demostración:

En efecto:

Si $E_1 = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r \rangle$ y $E_2 = \langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s \rangle$ entonces $\langle E_1 \cup E_2 \rangle = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s \rangle$.

$$\forall \vec{x} \in \langle E_1 \cup E_2 \rangle \Rightarrow \vec{x} = \underbrace{\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_r \vec{a}_r}_{\vec{x}_1} + \underbrace{\mu_1 \vec{b}_1 + \dots + \mu_s \vec{b}_s}_{\vec{x}_2} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \text{ con } \vec{x}_1 \in E_1 \text{ y } \vec{x}_2 \in E_2$$

luego $\langle E_1 \cup E_2 \rangle \subset \{ \vec{x} \in V / \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 \in E_1 \text{ y } \vec{x}_2 \in E_2 \}$ y obviamente $\langle E_1 \cup E_2 \rangle \supset \{ \vec{x} \in V / \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 \in E_1 \text{ y } \vec{x}_2 \in E_2 \}$ cumpliéndose la igualdad.

Definición:

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V . **Llamaremos suma directa** de E_1 y E_2 a la suma cuando $E_1 \cap E_2 = \{ \vec{0} \}$ y se escribe $E_1 \oplus E_2$.

Proposición:

La suma de dos subespacios $E_1 + E_2$ es suma directa si y sólo si existen dos únicos vectores $\vec{x}_1 \in E_1$ y $\vec{x}_2 \in E_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Demostración:

Sabemos que $E_1 + E_2 = \langle E_1 \cup E_2 \rangle = \{ \vec{x} \in V / \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 \in E_1 \text{ y } \vec{x}_2 \in E_2 \}$, luego $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 \in E_1 \text{ y } \vec{x}_2 \in E_2$.

Si además existieran $\vec{y}_1 \in E_1, \vec{y}_2 \in E_2$ tales que $\vec{x} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$,

$$\text{entonces } \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \Rightarrow \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{y}_1 - \vec{y}_2 = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\vec{x}_1 - \vec{y}_1}_{\in E_1} = \underbrace{\vec{y}_2 - \vec{x}_2}_{\in E_2}$$

se tiene que $\vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{y}_2 - \vec{x}_2 \in E_1 \cap E_2$

$$\text{y como } E_1 \cap E_2 = \{ \vec{0} \} \text{ resulta } \begin{cases} \vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{y}_1 \\ \vec{x}_2 - \vec{y}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_2 = \vec{y}_2 \end{cases}$$

Recíprocamente, veremos que $E_1 \cap E_2 = \{ \vec{0} \}$, si $\exists \vec{x} \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow \vec{x} \in E_1 \text{ y } \vec{x} \in E_2$

siendo $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x}$ dos formas de descomposición del vector, salvo que $\vec{x} = \vec{0}$.

Definición:

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V . Si se cumple $E_1 \oplus E_2 = V$, diremos que E_1 y E_2 son **subespacios suplementarios**, en cuyo caso se verifican las dos condiciones siguientes: $E_1 + E_2 = V$ y $E_1 \cap E_2 = \{ \vec{0} \}$.

Cuando E_1 y E_2 son subespacios suplementarios y es $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ se dice que \vec{x}_1 es la **proyección** de \vec{x} sobre E_1 y \vec{x}_2 es la **proyección** de \vec{x} sobre E_2

Ejemplo:

El plano vectorial \mathbb{R}^2 puede escribirse como suma directa de dos rectas vectoriales (subespacios de dimensión uno) no coincidentes.

Ejemplo:

El espacio vectorial \mathbb{R}^3 puede escribirse como suma directa de una recta vectoriales (subespacio vectorial de dimensión uno) y un plano vectorial (subespacio vectorial de dimensión 2) cuyo único vector común sea el vector nulo.

Teorema

Sean B_1 y B_2 dos bases de los subespacios vectoriales E_1 y E_2 , respectivamente, del espacio vectorial V . La suma $E_1 + E_2$ es directa si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:

- i) $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.
- ii) $B_1 \cup B_2$ es un sistema libre de V .

Siendo $B_1 \cup B_2$ una base de $E_1 \oplus E_2$.

Demostración

\Rightarrow) Supongamos que $E_1 \oplus E_2$, es decir, $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$. Veamos que i) $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Si $\vec{x} \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{x} \in B_1 \subset E_1 \\ \vec{x} \in B_2 \subset E_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} \in E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ absurdo, ya que el vector nulo no puede pertenecer a ninguna base.

Ahora, la segunda condición ii) $B_1 \cup B_2$ es un sistema libre de V .

Sean $B_1 = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$ y $B_2 = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s\}$ la ecuación vectorial $\underbrace{\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_r \vec{a}_r}_{\in E_1} + \underbrace{\mu_1 \vec{b}_1 + \dots + \mu_s \vec{b}_s}_{\in E_2} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_r \vec{a}_r}_{\in E_1} = -\underbrace{\mu_1 \vec{b}_1 - \dots - \mu_s \vec{b}_s}_{\in E_2}$ y como antes

$$E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_r \vec{a}_r = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0 \\ -\mu_1 \vec{b}_1 - \dots - \mu_s \vec{b}_s = \vec{0} \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_s = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$B_1 \cup B_2 = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s\}$ es libre.

\Leftarrow) Si se cumplen las dos condiciones i) y ii) entonces $\vec{x} \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{x} \in E_1 \Rightarrow \vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_r \vec{a}_r \\ \vec{x} \in E_2 \Rightarrow \vec{x} = \mu_1 \vec{b}_1 + \dots + \mu_s \vec{b}_s \end{cases} \Rightarrow \vec{x} - \vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_r \vec{a}_r - \mu_1 \vec{b}_1 - \dots - \mu_s \vec{b}_s = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Luego $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$, es decir $E_1 + E_2$ es suma directa.

Proposición:

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V . Se cumple que:

$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2)$$

Demostración:

Sea $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ una base de $E_1 \cap E_2$; completamos la base hasta obtener una base $B_1 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_r\}$ de E_1 , y otra $B_2 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{b}_{k+1}, \dots, \vec{b}_s\}$ de E_2 . Ahora $B_1 \cup B_2 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_r, \vec{b}_{k+1}, \dots, \vec{b}_s\}$ es tal que $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_k \vec{e}_k + \lambda_{k+1} \vec{a}_{k+1} + \dots + \lambda_r \vec{a}_r + \mu_{k+1} \vec{b}_{k+1} + \dots + \mu_s \vec{b}_s = \vec{0}$
 $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_k \vec{e}_k + \lambda_{k+1} \vec{a}_{k+1} + \dots + \lambda_r \vec{a}_r = -\mu_{k+1} \vec{b}_{k+1} - \dots - \mu_s \vec{b}_s$, resulta $-\mu_{k+1} \vec{b}_{k+1} - \dots - \mu_s \vec{b}_s$ un vector de $E_1 \cap E_2$ cuya base es $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$, por tanto $\mu_{k+1} = \dots = \mu_s = 0$ quedando $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_k \vec{e}_k + \lambda_{k+1} \vec{a}_{k+1} + \dots + \lambda_r \vec{a}_r = \vec{0}$ siendo $B_1 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_r\}$ base de E_1 , y por consiguiente, $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_r = 0$. Queda demostrado que $B_1 \cup B_2 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_r, \vec{b}_{k+1}, \dots, \vec{b}_s\}$ es una base de $E_1 + E_2$ con la siguiente dimensión.

$$\dim(E_1 + E_2) = r + s - k = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$$

$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2)$$

Corolario:

Si $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$

Teorema

Todo subespacio vectorial F de un espacio vectorial V de dimensión n admite, al menos un subespacio suplementario F' de V . Además si $\dim(F)=p$, entonces $\dim(F')=n-p$.

Definición:

Se dice que un subespacio vectorial H del espacio vectorial V es un *hiperplano* si y solo si $\dim(H)=\dim(V)-1$.

En consecuencia, todo subespacio vectorial suplementario de un hiperplano tiene dimensión uno.

Ejemplo:

El plano vectorial R^2 el hiperplano será cualquier recta vectorial.

Ejemplo:

El espacio vectorial \mathbb{R}^3 el hiperplano será cualquier plano vectorial.

Ejemplo:

Sean los subespacios vectorial $F = \langle (1,0,1), (1,0,-1), (2,0,0) \rangle$ y $G = \langle (2,3,1), (1,0,1), (0,3,-1), (3,6,1) \rangle$ del espacio vectorial \mathbb{R}^3 . Se pide: bases, ecuaciones paramétricas y ecuaciones cartesianas de los subespacios $F+G$ y $F \cap G$.

Solución:

Determinemos los subespacios F y G : el $r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ y una base

$B_F = \{(1,0,1), (2,0,0)\}$ dando lugar a las ecuaciones paramétricas $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y

eliminando los parámetros $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 2 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$.

El $r \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ y una base $B_G = \{(1,0,1), (0,3,-1)\}$ dando lugar a las

ecuaciones paramétricas $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y eliminando los parámetros

$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 3 \\ x_3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$.

Para obtener el subespacio intersección $F \cap G$ sólo necesitamos juntar las ecuaciones cartesianas de ambos subespacios

$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \lambda \end{cases}$ con una posible base $B_{F \cap G} = \{(1,0,1)\}$ y

$\dim(F \cap G) = 1$.

En el caso del subespacio suma $F+G$ juntamos los vectores de las bases y quitamos los vectores que sean linealmente dependientes: $B_F \cup B_G = \{(1,0,1), (2,0,0), (0,3,-1)\}$ y el

rango $r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$ resultando $\dim(F+G)=3$ y, por tanto, $F+G=\mathbb{R}^3$ con las ecuaciones

paramétricas $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ o más sencillamente $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_3 \end{cases}$, pero,

evidentemente no tiene ecuaciones cartesianas, ya que es el espacio vectorial \mathbb{R}^3 .

