PROBLEMAS DE MOVIMIENTOS EN EL ESPACIO

42. Clasificar la transformación del espacio dada por la ecuación matricial, obteniendo sus elementos característicos.

Mediante marcadores puede escoger el tipo de problema.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

43. Obtener la ecuación matricial de la traslación del espacio de vector $\vec{v} = (1,0,0)$.

Solución

44. Demostrar que el producto de dos traslaciones en el espacio es conmutativo.

Solución

45. Clasificar la siguiente transformación del espacio obteniendo sus elementos característicos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

46. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

Solución

47. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11}\\ \frac{-2}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{9}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11}\\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Solución

48. En el espacio euclídeo se busca obtener la ecuación matricial correspondiente al giro de ángulo α :

a) alrededor del eje X.
b) alrededor del eje Y.
c) alrededor del eje Z.

Solución

49. Se pide obtener los elementos característicos de la transformación geométrica correspondiente a los siguientes productos de dos giros:

a) Giro de 30º alrededor del eje X y giro de 60º alrededor del eje Y.

b) Giro de 60º alrededor del eje Y y giro de 30º alrededor del eje X.

Solución

50. Se pide obtener los elementos característicos de la transformación geométrica correspondiente a los siguientes productos de dos giros:

a) giro de 30º alrededor del eje X y giro de 60º alrededor del eje $e\equiv\begin{cases}y=1\\z=1\end{cases}$

b) giro de 60º alrededor del eje $e\equiv\begin{cases}y=1\\z=1\end{cases}$ **y giro de 30º alrededor del eje X**

Solución

51. Se pide obtener la ecuación matricial del giro del espacio de 240º alrededor del eje: $e\equiv\begin{cases}x=1-\lambda\\y=-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$

Solución

52. Se pide obtener la ecuación matricial del giro del espacio de 301º 15’ alrededor del eje: $e\equiv\begin{cases}3x-4y+2=0\\z=2\end{cases}$

Solución

53. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos

Solución

54. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -132 & -23 & -24 & -36 \\ -44 & -24 & 41 & -12 \\ -66 & -36 & -12 & 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos.

Solución

55. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{20}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos

Solución

56. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano z = 0

Solución

57. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano
x - 2y = 7

Solución

58. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano $40x - 60y - 40\sqrt{3}z = 1$

Solución

59. Obtener la ecuación matricial del producto de las simetrías especulares de planos x = 0 y z = 0. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elementos característicos.

Solución

60. Obtener la ecuación matricial del producto de las simetrías especulares de planos 3 y - 4 z + 6 = 0 y 3 y – 4 z – 4 = 0. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elementos característicos.

Solución

61. Obtener la ecuación matricial del producto de la simetría especular de plano 3 x - 4 z + 5 = 0 por la traslación de vector $\vec{t} = (15, 0, -20)$. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elementos característicos.

Solución

62. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial y calcular los elementos principales:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

Solución

63. Dada la transformación geométrica del espacio euclídeo E_3:

$\overline{X'} = N\,\overline{X}$, siendo $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **clasificarla y hallar sus elementos característicos.**

Solución

64. Dada la transformación geométrica de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Clasificarla.

b) Hallar sus elementos característicos.

Solución

65. Clasificar la siguiente transformación geométrica y obtener sus elementos característicos:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X$$

Solución

66. Sea T la transformación geométrica de R^3 de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Obtener los valores de k para los cuales T es un movimiento

b) Clasificar T para aquellos valores de k para los que sea un movimiento

Solución

67. Hallar las ecuaciones de la composición del giro de ángulo π con respecto a la recta r: (0,0,1) + t (0,1,1) con la traslación de vector (1,1,0) y determinar de qué tipo de movimiento se trata.

Solución

68. ¿Qué condición se debe cumplir para que el producto de una rotación y una traslación del espacio R^3 sea otra rotación y no un movimiento helicoidal?

Solución

69. Sean las simetrías especulares S_1, S_2, S_3, S_4 de planos:

π_1: x-y+z=0, π_2: x-y+z-3=0, π_3:-2x-y+z=0, π_4: 2y+z=0 respectivamente.

Clasificar las trasformaciones:

a) $S_1 o S_2 o S_3$

b) $S_1 o S_2 o S_3 o S_4$

Solución

70. Identificar la transformación T, tal que los puntos A=(1,2,3), B=(1,1,1), C=(-1,2,3) y D=(1,0,2) se transforman en A'=(2,-3,0), B'=(1,-1,0), C'=(2,-3,2), y D'=(0,-2,0) respectivamente.

Solución

71. Hallar las ecuaciones de la simetría deslizante de plano $\pi \equiv x+y+z=1$ y vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ de E_3:

a) Escoger una base ortonormal B del espacio vectorial V_3 adecuada.

b) Escribir la matriz M_B asociada al movimiento respecto de la base B.

c) Hallar la matriz M_{Bc} asociada al movimiento respecto de la base canónica.

d) Escribir las ecuaciones del movimiento respecto de la base canónica.

Solución

72. Estudiar el movimiento resultante de aplicar la simetría respecto del plano $\pi \equiv y-1=0$ y la traslación tal que: T(O)=(1,0,1). ¿Es conmutativo este producto?

Solución

73. Escribir las ecuaciones del movimiento resultante de aplicar la rotación respecto del eje $e \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=2 \end{cases}$ y de ángulo $\alpha=-90^\circ$ y la traslación de vector (1,0,1).

Solución

74. Determinar la transformación que resulta de aplicar el movimiento helicoidal T_2 y a continuación la simetría deslizante T_1:

$$T_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \; T_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

75. Sea la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x-2y+2z)+1 \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+y+2z)+1 \\ z' = \frac{1}{3}(2x+2y+z)+2 \end{cases}$$

a) Demostrar que T no tiene puntos dobles.

b) Demostrar que T es el producto de una simetría S respecto de un plano π por una traslación de vector $\vec{u}$ paralelo al plano π.

c) Hallar la ecuación de π y el vector $\vec{u}$.

Solución

76. ¿Qué condición se debe cumplir para que el producto de una simetría especular y una traslación del espacio R^3 sea otra simetría especular y no una simetría deslizante?

Solución

77. Hallar las ecuaciones del movimiento helicoidal de eje $e \equiv \begin{cases} \text{pasa por } A(1,1,1) \\ \text{vector } (0,1,0) \end{cases}$ y ángulo $\alpha = -45^\circ$ y vector $\vec{u} = (1,1,1)$ de E_3.

i) Escoger una base ortonormal B del espacio vectorial V_3 adecuada.

ii) Escribir la matriz M_B asociada al movimiento respecto de la base B.

iii) Hallar la matriz M_{Bc} asociada al movimiento respecto de la base canónica.

iv) Escribir las ecuaciones del movimiento respecto de la base canónica.

Solución

78. Encontrar las ecuaciones del producto de una rotación de amplitud $\frac{\pi}{2}$ con respecto a la recta que tiene como vector director a $\vec{v} = (1,1,0)$ y pasa por el punto (1,1,1) con la traslación de vector $\vec{u} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$

Solución

79. Una superficie en R^3 tiene de ecuación

$$2x^2 + \sqrt{2}x + 2y^2 + \sqrt{2}y + 2z^2 - 2z = 1 .$$

Determinar la ecuación de esta superficie, respecto del nuevo sistema de referencia: $R' = \left\{ A = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right); \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \right\}$ e indicar el tipo de transformación realizada.

Solución

80. Sea la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{13}}{26}y + \frac{\sqrt{13}}{13}z \\ y' = -\frac{3\sqrt{13}}{26}x + \frac{8-9\sqrt{3}}{26}y + \frac{-6-3\sqrt{3}}{13}z \\ z' = -\frac{\sqrt{13}}{13}x + \frac{-6-3\sqrt{3}}{13}y + \frac{9-2\sqrt{3}}{13}z + 1 \end{cases}$$

a) Demostrar que T no tiene puntos dobles.

b) Demostrar que T es el producto de una rotación G respecto de un eje e de amplitud α por una traslación de vector $\vec{u}$ paralelo al eje e.

c) Hallar la ecuación de e, el ángulo α y el vector $\vec{u}$.

Solución

81. Una curva en R^3 tiene de ecuación $4x^2-4xy+8xz-11x+y^2-4yz+10y+4z^2-2z+7$. Determinar la ecuación de esta superficie, respecto del nuevo sistema de referencia:

$$R' = \left\{ A = (1,0,0);\ \vec{u} = \left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right),\ \vec{v} = \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\ \vec{w} = \left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) \right\}$$

e indicar el tipo de transformación realizada.

Solución

42. Clasificar la transformación del espacio dada por la ecuación matricial, obteniendo sus elementos característicos.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

Según el procedimiento descrito, en este problema se aprecia inmediatamente que la matriz M es la identidad, que, naturalmente es ortogonal y cuyo determinante es 1. Se trata de un **movimiento directo**, sin puntos invariantes puesto que:

$$\text{rg}(M-I) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

mientras que

$$\text{rg}(N-I) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

es decir, es una **traslación**.

Elementos característicos:

El vector de la traslación es el vector $\overrightarrow{OO'}$ y dado que en la primera columna de la ecuación matricial tenemos el transformado del origen $T(O) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, el vector de la traslación es: $\vec{v} = (1,2,3)$.

Otras formas de expresar las ecuaciones de esta transformación son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{o también:} \quad \begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y+2 \\ z' = z+3 \end{cases}$$

Inicio

43. Obtener la ecuación matricial de la traslación del espacio de vector $\vec{v}=(1,0,0)$.

Solución

La ecuación general de una traslación es $X'=T(A)+M\overrightarrow{XA}$ siendo A un punto cualquiera del espacio y M la matriz identidad. En concreto, si se toma como punto A el origen del sistema de referencia, cuyo transformado es $T(O)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ se tiene que la ecuación pedida es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

que se puede expresar también mediante las ecuaciones

$$\begin{cases}x'=x+1\\ y'=y\\ z'=z\end{cases}$$

se trata, como puede verse, de una traslación de una unidad en dirección del eje X

Inicio

44. Demostrar que el producto de dos traslaciones en el espacio es conmutativo.

Solución

La ecuación matricial de una traslación $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ es de la forma

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\v_x&1&0&0\\v_y&0&1&0\\v_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Si se tiene otra traslación $T_{\vec{w}}$ de vector $\vec{w}=(w_x,w_y,w_z)$ su ecuación matricial será

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\w_x&1&0&0\\w_y&0&1&0\\w_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Se aplican sucesivamente ambas transformaciones primero $T_{\vec{v}}$ y luego $T_{\vec{w}}$

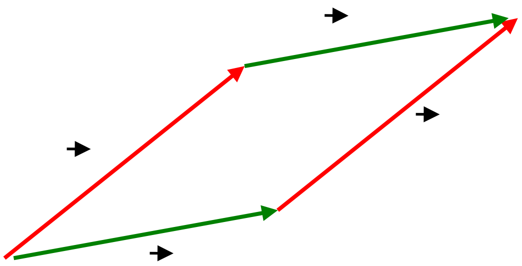
$$\begin{pmatrix}1\\x''\\y''\\z''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\w_x&1&0&0\\w_y&0&1&0\\w_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\w_x&1&0&0\\w_y&0&1&0\\w_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\v_x&1&0&0\\v_y&0&1&0\\v_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\w_x+v_x&1&0&0\\w_x+v_y&0&1&0\\w_x+v_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Si se aplican en el orden inverso, primero $T_{\vec{w}}$ y al resultado, $T_{\vec{v}}$

$$\begin{pmatrix}1\\x''\\y''\\z''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\v_x&1&0&0\\v_y&0&1&0\\v_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\v_x&1&0&0\\v_y&0&1&0\\v_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\w_x&1&0&0\\w_y&0&1&0\\w_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\v_x+w_x&1&0&0\\v_x+w_y&0&1&0\\v_x+w_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

siendo la transformación resultante igual en ambos casos.

Gráficamente puede verse en el siguiente dibujo, en el que se ha representado un punto cualquiera del espacio P y su transformado por el producto de ambas traslaciones P''.



Inicio

45. Clasificar la siguiente transformación del espacio obteniendo sus elementoss característicos

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Solución

La matriz M de la transformación vectorial asociada es $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: $M\,M^t = I$.

Se calcula $M.M^t = I$ lo cual indica que por ser M ortogonal, la transformación dada es un movimiento.

2. **Calcular el determinante de M**.

$|M| = 1$ por lo que se trata de un movimiento directo en el espacio.

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

Cálculo de los puntos invariantes por la transformación.

Estos puntos se obtienen de la ecuación matricial $N\overline{X}=\overline{X}\Rightarrow(N-I)\overline{X}=0$

$$(N-I)\overline{X}=\begin{pmatrix}1-1&0&0&0\\0&1-1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}-1&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Se calcula el rango de N-I (matriz ampliada del sistema)

$$\mathrm{rg}(N-I)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=2 \text{ puesto que } \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=1\neq 0$$

La matriz de coeficientes es

$$\mathrm{rg}(M-I)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=2$$

Como rg(N-I) = rg(N-I) = 2 el sistema es compatible indeterminado, por lo que se trata de una **rotación**.

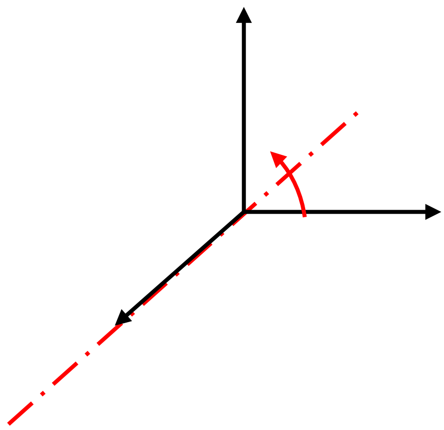
Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

- **Eje de giro:** El conjunto de puntos invariantes forma una recta (el eje de giro). El eje de giro se obtiene de resolver el sistema $N\overline{X}=\overline{X}\Rightarrow(N-I)\overline{X}=0$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

ecuaciones del eje X, por tanto se trata de un giro alrededor del eje X del sistema de referencia.



NOTA:
Obsérvese que la matriz M, matriz de la transformación vectorial asociada al giro tiene en su primera columna el vector (1,0,0).

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \boxed{0} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dado que en la primera columna de la matriz M aparece el vector transformado del primer vector del sistema de referencia (el vector del eje X), se observa que este vector es un vector invariante. Como conclusión, de la observación de la matriz M se podía saber que se trata bien de un giro bien de un movimiento helicoidal, donde el eje es paralelo al eje X.

Cálculo del ángulo:

Para calcular el ángulo, se toma un vector perpendicular al eje. Como en este caso el eje de giro es el eje X, se puede tomar el vector del eje Y, $\vec{j} = (0,1,0)$ se calcula su transformado por la transformación vectorial de matriz M

$$\vec{j}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora se calcula el ángulo que forman $\vec{j}$ y $\vec{j}'$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{j}\bullet\vec{j}'}{|\vec{j}||\vec{j}'|} = \frac{\frac{1}{2}}{1\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \alpha = \pm 60º$$

para ver el signo del giro se calcula el producto vectorial $\vec{j} \wedge \vec{j}'$ si el producto vectorial tiene el sentido del vector director del eje, $\vec{i} = (1,0,0)$ el ángulo es el positivo y en caso contrario, el negativo.

$$\vec{j} \wedge \vec{j}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}$$

por lo que el ángulo de giro es $\alpha = 60º$

Inicio

46. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

Solución

Se comienza estudiando la matriz M de la transformación vectorial.

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: $M\,M^t = I$.

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por ser M ortogonal, se trata de un movimiento.

2. **Calcular el determinante de M**.

$$|M| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 1$$

es un movimiento directo.

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

Se estudian ahora los puntos invariantes.

Para ello, primero se ordena la ecuación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

para calcular los puntos invariantes se impone que X’ = X

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se calcula el determinante de la matriz de coeficientes obteniéndose |M-I|=0 se calculan los menores de orden dos, obteniéndose para el primero de ellos.

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0$$

por tanto, rg (M-I)=2

Ahora se calcula el rango de la matriz ampliada del sistema, $\mathrm{rg}\left(I-M\middle|O'\right)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$ se calculan los menores de 3x3, combinando con la última columna:

$$\begin{vmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0$$ pues la última columna es -1 por la 1ª

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{-1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0$$ por igual motivo que el menor anterior

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0$$, calculado

Obteniéndose, por tanto, rg (N-I) = $\mathrm{rg}\left(I - M \middle| O'\right)$ =2, el sistema es compatible indeterminado, luego la transformación dada es un **giro**.

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

El eje de giro es la solución del sistema que da los puntos invariantes:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

las dos primeras ecuaciones son independientes, como se comprobó al calcular el menor (3,3) de M-I, quedando

$$\begin{cases} -2x + (1+\sqrt{3})y + (1-\sqrt{3})z + (-1+\sqrt{3}) = 0 \\ (1-\sqrt{3})x - 2y + (1+\sqrt{3})z + (-1-\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema queda:

$$e \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$$, ecuaciones del eje de giro

expresando esta recta en forma paramétrica, con parámetro λ queda:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

recta que pasa por el punto (0,0,1) y cuyo vector director es $\vec{v} = \mathbf{(1,1,1)}$

Cálculo del ángulo:

Se toma un vector perpendicular al vector director de la recta. Se elige, por ejemplo, $\vec{w} = (1, 0, -1)$

Se calcula el transformado de este vector por la transformación vectorial de matriz M:

$$\vec{w}' = M\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

se calcula ahora el ángulo formado por $\vec{w}$ y $\vec{w}'$ a partir de su producto escalar

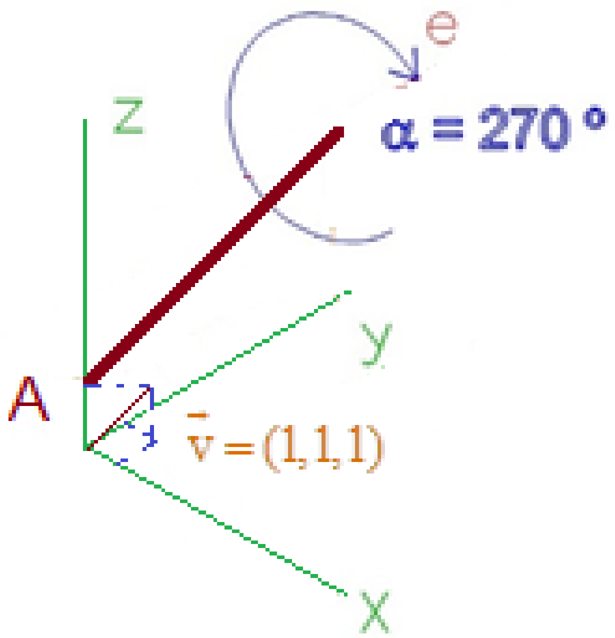
$$\cos\alpha = \frac{\vec{w}\cdot\vec{w}'}{|\vec{w}||\vec{w}'|} = \frac{(1,0,-1)(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}} = 0$$

de donde se obtiene que $\alpha = \pm 90^{\circ}$

Para ver el sentido del giro se calcula el producto vectorial de $\vec{w}$ y $\vec{w'}$ y se ve si tiene igual sentido que $\vec{v}=(1,1,1)$ o el contrario.

$$\vec{w}\wedge\vec{w'}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{j}-\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

como el vector obtenido tiene signo contrario a $\vec{v}$, el ángulo de giro es α = - 90º (α = 270º)



Inicio

47. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{9}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

1. Comprobar que M es una matriz ortogonal, es decir: $M\,M^t = I$.

Si se denomina $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{9}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$ y

$M = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{11}-3 & 1-3\sqrt{11} \\ \sqrt{11}-3 & 9 & -\sqrt{11}-3 \\ 1+3\sqrt{11} & \sqrt{11}-3 & 1 \end{pmatrix}$ se comienza estudiando la matriz M. Dado que $M.M^t = I$

2. Calcular el determinante de M.

$|M| = \left| \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{11}-3 & 1-3\sqrt{11} \\ \sqrt{11}-3 & 9 & -\sqrt{11}-3 \\ 1+3\sqrt{11} & \sqrt{11}-3 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$ se trata de un movimiento directo.

3. Estudiar el tipo de movimiento:

Se estudian ahora los puntos invariantes de la transformación, que los da la ecuación $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N - I)\overline{X} = 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11}-1 & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{9}{11}-1 & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{10}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{10}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$ para calcular el rango de la matriz N-I, se puede apreciar que la primera y la tercera columna son iguales, por tanto, se calcula el determinante que se obtiene eliminando la primera fila y la primera columna. Este menor dará el rango de N-I, pero también el de M-I de manera que se puede asegurar que rango(N-I) = rango (M-I), es decir, que el sistema es compatible.

Como $|M-I| = \begin{vmatrix} -\frac{10}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{10}{11} \end{vmatrix} = 0$ y, sin embargo, tomando el primer menor,

$\begin{vmatrix} -\frac{10}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{2}{11} \end{vmatrix} = \frac{2}{11} \neq 0 \Rightarrow$ rango(N-I) = rango (M-I) = 2 $\Rightarrow$ se trata de una **rotación**.

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

El eje de rotación es la solución del sistema.

$$\begin{cases} \frac{-\sqrt{11}-3}{11}-\frac{10}{11}x-\frac{\sqrt{11}+3}{11}y+\frac{1-3\sqrt{11}}{11}z=0 \\ -\frac{2}{11}+\frac{\sqrt{11}-3}{11}x-\frac{2}{11}y-\frac{\sqrt{11}+3}{11}z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{11}-3-10x-\left(\sqrt{11}+3\right)y+\left(1-3\sqrt{11}\right)z=0 \\ -2+\left(\sqrt{11}-3\right)x-2y-\left(\sqrt{11}+3\right)z=0 \end{cases}$$

Esta es la ecuación de la recta en el espacio. Para pasarla a paramétricas, se hace despejando x en la primera ecuación $x=-\frac{\sqrt{11}+3}{10}y+\frac{1-3\sqrt{11}}{10}z-\frac{\sqrt{11}+3}{10}$ sustituyendo en la segunda y despejando y en función de z queda $y=-3z-1$ y colocados en la ecuación en x queda x = z. Con lo cual, utilizando z como parámetro de la recta y llamándolo t queda

$$\text{eje} \equiv \begin{cases} x=t \\ y=-1-3t \\ z=t \end{cases}$$

Cálculo del ángulo:

Para calcular el ángulo de giro, se elige un vector perpendicular al eje y se ve en qué vector se transforma mediante la matriz M. Un vector paralelo al eje es (1,-3,1) por lo que uno perpendicular a éste puede ser $\vec{v}=(-1,0,1)$ su transformado es:

$$\vec{v}\,'=M\vec{v}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{11}-3 & 1-3\sqrt{11}\\ \sqrt{11}-3 & 9 & -\sqrt{11}-3\\ 1+3\sqrt{11} & \sqrt{11}-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\,'=\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$$

el ángulo formado por ambos vectores viene de $\cos\alpha=\dfrac{\vec{v}.\vec{v}\,'}{\left|\vec{v}\right|.\left|\vec{v}\,'\right|}=\dfrac{0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=0 \Rightarrow$ $\alpha = \pm 90$º, para ver cuál es el signo correcto, se calcula el producto vectorial

$$\vec{v}\wedge\vec{v}\,'=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}}\end{vmatrix}=\frac{2}{\sqrt{11}}\vec{i}-\frac{6}{\sqrt{11}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{11}}\vec{k}$$

dado que este vector es paralelo al eje de giro, el ángulo es $\alpha = 90$º.

Inicio

48. En el espacio euclídeo se busca obtener la ecuación matricial correspondiente al giro de ángulo α :

a) alrededor del eje X.
b) alrededor del eje Y.
c) alrededor del eje Z.

Solución

La ecuación de un giro en el espacio viene dada por X’ = A + M (X-A) siendo A un punto del eje de giro, por tanto, un punto invariante de la transformación.
Como es conocido, la ecuación del giro vectorial en una base ortonormal, B, en la que el primer vector tiene la dirección del eje de giro es:

$$M_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha\\ 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$ siendo α el ángulo del giro.

a) alrededor del eje X

Esta es la matriz de la transformación vectorial en una base cuyo primer vector es el eje X, $\vec{u}=(1,0,0)$ y los otros dos vectores tales que formen con él una referencia ortonormal. Por tanto, en este caso, se pueden tomar $\vec{v}=(0,1,0)$ y $\vec{w}=(0,0,1)$. Es decir, la propia base canónica del espacio.

Por tanto, tomando un punto cualquiera del eje como punto invariante para la ecuación, por ejemplo A = (0,0,0) quedando:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} \text{ o, simplemente } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y también puede expresarse en la forma $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ o,

en forma de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\alpha - z\operatorname{sen}\alpha \\ z' = y\operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$

b) alrededor del eje Y

En este caso, el vector del eje de giro es $\vec{v} = (0,1,0)$ pudiendo tomar, para completar una base ortonormal, los vectores $\vec{u} = (0,0,1)$ y $\vec{w} = (1,0,0)$, comprobándose que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Se esta base la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

Entonces, la matriz del cambio de base a la base canónica es:

$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matriz que tiene en columnas los vectores de la base B respecto de la canónica. La matriz del giro en la base canónica será, por tanto,

$M_c = PM_BP^{-1}$ por lo que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

y, tomando nuevamente el origen como punto invariante queda la ecuación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ o también } \begin{cases} x' = x\cos\alpha + z\operatorname{sen}\alpha \\ y' = y \\ z' = -x\operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$

c) alrededor del eje Z

En este caso, el vector del eje de giro es $\vec{v} = (0,0,1)$ pudiendo tomar, para completar una base ortonormal, los vectores $\vec{u} = (1,0,0)$ y $\vec{w} = (0,1,0)$, comprobándose que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Por el mismo razonamiento anterior, la matriz de cambio de base es:

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \text{ y } M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1} \text{ quedando}$$

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow M=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha&0\\\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

y la ecuación matricial de la transformación, tomando otra vez el origen como punto invariante por pertenecer al eje:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha&0\\\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{o también} \quad \begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha\\y'=x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha\\z'=z\end{cases}$$

Inicio

49. Se pide obtener los elementos característicos de la transformación geométrica correspondiente a los siguientes productos de dos giros:

a) Giro de 30º alrededor del eje X y giro de 60º alrededor del eje Y.

b) Giro de 60º alrededor del eje Y y giro de 30º alrededor del eje X.

Solución

a) En el problema anterior se obtuvieron las ecuaciones correspondientes a los giros alrededor de los ejes coordenados.

Si se llama $G_{(X,30^o)}$ al primero de los giros, su ecuación matricial es

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos 30^o&-\operatorname{sen}30^o\\0&0&\operatorname{sen}30^o&\cos 30^o\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Si se llama $G_{(y,60^o)}$ al segundo de los giros, su ecuación matricial es

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos 60^o&0&\operatorname{sen}60^o\\0&0&1&0\\0&-\operatorname{sen}60^o&0&\cos 60^o\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

El giro buscado tiene como ecuación, aplicando el giro alrededor del eje X, y al resultado, el giro alrededor del eje Y.

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&1&0\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\text{ quedando }\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Si se llama $N=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$ y M a la matriz de la transformación vectorial asociada

$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$ se comprueba que $MM^t= I$ y que $|M|=1$ por lo que se trata de un movimiento directo.

Estudiar el tipo de movimiento:

Se calculan ahora los puntos invariantes de la ecuación matricial

$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{\sqrt{3}-2}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}-4}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ para estudiar el sistema se calcula $|M-I|=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&\frac{\sqrt{3}-2}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}-4}{4}\end{vmatrix}=0$ como el primer menor de 2x2 es distinto de cero, se tiene que rango(N-I) = rango(M-I) = 2 por tanto, hay una recta de puntos invariantes y el movimiento resultante de la composición de ambos giros **es un giro.**

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

El eje de giro se obtiene de resolver el sistema que da los puntos invariantes. Tomando las dos primeras ecuaciones (visto que son independientes) queda

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+\frac{3}{4}z=0 \\ \frac{\sqrt{3}-2}{2}y-\frac{1}{2}z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad e\equiv\begin{cases} x=-\sqrt{3}z \\ y=-(\sqrt{3}+2)z \end{cases}$$

es la ecuación del eje. El vector director del eje puede ser $\vec{u}=(\sqrt{3},\sqrt{3}+2,-1)$ y un punto del eje es el origen de coordenadas (lo cual es lógico pues el origen es la intersección de los ejes de los giros iniciales, por tanto, punto invariante de cada uno de los giros).

Cálculo del ángulo:

Se obtiene un vector perpendicular al eje, por ejemplo, $\vec{v}=(1,0,\sqrt{3})$ y se calcula el transformado de $\vec{v}$ por la transformación vectorial asociada $\vec{v}'=M\,\vec{v}\;\Leftrightarrow$

$$\vec{v}'=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}+2}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}'}{|\vec{v}||\vec{v}'|}=\frac{\left(1,0,\sqrt{3}\right)\left(\frac{3\sqrt{3}+2}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\cdot 2}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-1}{4}=\frac{3\sqrt{3}-2}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha=\pm\, 66^\circ\, 27'\, 06''$$

$$\vec{v}\wedge\vec{v}'=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}=\frac{3}{2}\vec{i}+\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)\vec{j}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$$

como este vector es paralelo a $\vec{u}=(\sqrt{3},\sqrt{3}+2,-1)$ el ángulo es el positivo:

$$\boldsymbol{\alpha = 66^\circ\, 27'\, 06''}$$

b)

Ahora, $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{4}\\0&-\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$ también $MM^t= I$ y que $|M|=1$ por lo que se trata de un movimiento directo.

Estudiar el tipo de movimiento:

Se calculan ahora los puntos invariantes. $\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{4}\\0&-\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{\sqrt{3}-2}{2}&-\frac{1}{4}\\0&-\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}-4}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Rango (M-I) = 2 pues $|M-I|=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{\sqrt{3}-2}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}-4}{4}\end{vmatrix}=0$ siendo el primer menor distinto de cero por lo tanto, rango(M-I) = rango(N-I) = 2 $\Rightarrow$ se trata de **una rotación**

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

Para calcular el eje se resuelve el sistema $N\overline{X}=\overline{X}\Rightarrow(N-I)\overline{X}=0$. Para ello se toman las dos primeras ecuaciones resultantes de la ecuación matricial (pues el menor antes dicho es no nulo) quedando:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{\sqrt{3}-2}{2}y-\frac{1}{4}z=0 \end{cases}$$ quedando $e \equiv \begin{cases} x=\sqrt{3}z \\ y=\left(\sqrt{3}+2\right)z \end{cases}$ ecuación del eje de rotación.

Cálculo del ángulo:

Para calcular el ángulo se puede usar ahora la propiedad de que la traza de la matriz M no varía respecto de los cambios de base y vale traza(M) = 1+2 cosα

$$\text{traza}(M)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)-1\right]=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ α = ± 66º 27’ 06’’. Para calcular el signo, se toma un vector perpendicular al eje. Como el vector director del eje puede ser $\vec{u}=(\sqrt{3},\sqrt{3}+2,1)$ un vector perpendicular a éste es $\vec{v}=(-1,0,\sqrt{3})$ su transformado viene dado por:

$$\vec{v}'=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

siendo $\vec{v}\wedge\vec{v}'=\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}+\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3},2+\sqrt{3},1\right)$ vector paralelo al vector director del eje

$\Rightarrow$ **α = 66º 27’ 06’’**

NOTA *La conclusión que puede sacarse es que, en general, el producto de dos giros no es conmutativo*

50. Se pide obtener los elementos característicos de la transformación geométrica correspondiente a los siguientes productos de dos giros:

a) giro de 30º alrededor del eje X y giro de 60º alrededor del eje $e \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

b) giro de 60º alrededor del eje $e \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ **y giro de 30º alrededor del eje X**

Solución

En este caso se trata del producto de dos giros de ejes paralelos.

El primero de los giros es el del problema anterior y su ecuación es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 30^o & -\mathrm{sen} 30^o \\ 0 & 0 & \mathrm{sen} 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

El segundo tiene por ecuación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60^o & -\mathrm{sen} 60^o \\ 0 & \mathrm{sen} 60^o & \cos 60^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) El producto de ambos giros es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

para clasificar esta transformación, se comienza estudiando la matriz M, que es

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cumpliéndose que $MM^t = I$ y $|M| = 1 \Rightarrow$ movimiento directo.

Estudiar el tipo de movimiento:

Para obtener los elementos característicos se comienza estudiando los puntos invariantes, resultado de la ecuación matricial $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N-I)\overline{X} = 0$ que en este caso queda:

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -1\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 & -1\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Estudiando el sistema, se observa directamente que rango(M-I) = rango(N-I) = 2 por lo que se puede asegurar que se trata de un **giro**.

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

Para obtener el eje se resuelve el sistema, que es equivalente a:

$$e_1 \equiv \begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}}{2} - y - z = 0 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e_1 \equiv \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

este eje es paralelo a los ejes de los giros originales.

Cálculo del ángulo:

Para calcular el ángulo se usa esta vez la propiedad de la traza de la matriz M

Traza(M) = 1+2 cos(α) ⇔ 1 = 1 + 2 cos(α) ⇒ α = ± 90 º.

Para comprobar el signo, se toma un vector perpendicular al eje, por ejemplo, el $\vec{v} = (0,0,1)$ y se calcula su transformado $\vec{v}' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ comprobándose fácilmente que $\vec{v} \wedge \vec{v}' = (1,0,0)$

por lo que el ángulo de giro es α = 90 º.

b) El producto de ambos giros es:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} & 0 & 0 & -1\\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

La matriz M es la misma del apartado anterior, por lo que también se trata de **un giro**.

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

El eje de giro se obtiene igual que en el apartado anterior resolviendo el sistema $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N-I)\overline{X} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} & 0 & -1 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow e_2 \equiv \begin{cases} \frac{\sqrt{3}+1}{2} - y - z = 0 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e_2 \equiv \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Cálculo del ángulo:

El ángulo de giro es el mismo que en el apartado anterior puesto que la matriz M es la misma que en ese caso luego ángulo de giro es **α = 90º.**

La **conclusión** que puede sacarse es que el producto de dos giros cuyos ejes son paralelos es otro giro con un nuevo eje paralelo a ambos ejes y con un ángulo de giro igual a la suma de ambos ángulos de giro.

Inicio

51. Se pide obtener la ecuación matricial del giro del espacio de 240º alrededor del eje: $e \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Solución

Como se vio anteriormente, la ecuación de un giro en el espacio viene dada por X' = A + M (X-A) siendo A un punto del eje de giro, por tanto, un punto invariante de la transformación. Como un punto del eje puede ser A=(1,0,0), queda por obtener la matriz M.

En este caso, un vector unitario director del eje es $\vec{u} = \frac{(-1,-1,1)}{|(-1,-1,1)|}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Se elige una referencia ortonormal del espacio que tenga a este vector como primer vector de la base. Los otros dos vectores pueden ser $\vec{v} = \frac{(1,0,1)}{|(1,0,1)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ que es perpendicular a $\vec{u}$ y el vector $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

La ecuación del giro vectorial en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es:

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 240^o & -\operatorname{sen} 240^o \\ 0 & \operatorname{sen} 240^o & \cos 240^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ para pasar de esta matriz en la base B a la matriz en la base canónica se utiliza la matriz del cambio de base de la base B a la canónica del espacio

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$, matriz que tiene en columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la canónica.

$$M = PM_BP^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación pedida es, por tanto, $X' = A + M(X - A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ o también

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -z \\ z' = -x + 1 \end{cases}$$

Inicio

52. Se pide obtener la ecuación matricial del giro del espacio de 301º 15’ alrededor del eje: $e \equiv \begin{cases} 3x - 4y + 2 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

Solución

La ecuación de un giro en el espacio toma la forma X’ = A + M (X-A) siendo A un punto del eje de giro y M la matriz del giro vectorial en la referencia canónica del espacio.

La matriz M_B del giro vectorial es conocida cuando $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base ortonormal tal que $\vec{u}$ es de la dirección del eje de giro. Entonces, $M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

El primer paso será obtener el vector $\vec{u}$. De las ecuaciones implícitas del eje se puede pasar a las paramétricas, utilizando como parámetro la variable y.

$$e \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \\ z = 0 \end{cases} \text{ o llamando } \lambda \text{ al parámetro } e \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}.$$

De aquí se obtiene que el vector director de la recta es (4,3,0) y normalizado, $\vec{u} = \frac{(4,3,0)}{|(4,3,0)|} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$; un vector perpendicular a éste puede ser $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$, vector unitario que es, por tanto, $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$; siendo el tercer vector de B, $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (0,0,-1)$.

La matriz de cambio de base de la base B a la canónica es aquella que tiene por columnas los vectores de la base B es, por tanto, $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ cuya matriz inversa $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz $M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(301^o15') & -\mathrm{sen}(301^o15') \\ 0 & \mathrm{sen}(301^o15') & \cos(301^o15') \end{pmatrix} \Rightarrow M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}51877326 & 0{,}85491187 \\ 0 & -0{,}85491187 & 0{,}51877326 \end{pmatrix}$ ahora se aplica el cambio de base

$$M = PM_BP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}51877326 & 0{,}85491187 \\ 0 & -0{,}85491187 & 0{,}51877326 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8267583735 & 0{,}2309888352 & -0{,}5129471220 \\ 0{,}2309888352 & 0{,}6920148864 & 0{,}6839294959 \\ 0{,}5129471220 & -0{,}6839294959 & 0{,}5187732600 \end{pmatrix}$$

Para obtener la ecuación de la transformación, se elige un punto de la recta, por ejemplo, A = (2,3,2) quedando X’ = A + M (X - A) $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8267583735 & 0{,}2309888352 & -0{,}5129471220 \\ 0{,}2309888352 & 0{,}6920148864 & 0{,}6839294959 \\ 0{,}5129471220 & -0{,}6839294959 & 0{,}5187732600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix}$$

Inicio

53. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos

Solución

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; se comprueba que $MM^t = I$ y $|M| = -1 \Rightarrow$ movimiento inverso en el espacio.

Estudiar el tipo de movimiento:

La ecuación matricial puede expresarse como $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ llamando N a la matriz

$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ los elementos invariantes de la transformación se obtienen de la ecuación matricial $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N - I)\overline{X} = 0$ que, desarrollado queda un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas siendo M-I la matriz de coeficientes y N-I la ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}-1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

claramente se observa que rango (N-I) = rango (M-I), por lo que el sistema es compatible y que rango (M-I) = 1 con lo que es compatible indeterminado. Se trata, por tanto de una **simetría especular**.

Elemento característico: plano de simetría.

Cálculo del plano de simetría:

El plano de simetría, que es la solución del sistema se obtiene tomando la única ecuación $0-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z=0 \Leftrightarrow$ **x+y+z = 0**

Inicio

54. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -132 & -23 & -24 & -36 \\ -44 & -24 & 41 & -12 \\ -66 & -36 & -12 & 31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos.

Solución

Si se denomina $N=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -132 & -23 & -24 & -36 \\ -44 & -24 & 41 & -12 \\ -66 & -36 & -12 & 31 \end{pmatrix}$ y $M=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -23 & -24 & -36 \\ -24 & 41 & -12 \\ -36 & -12 & 31 \end{pmatrix}$.

Se calcula $M.M^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y |M| = -1. Se trata, por tanto, de un **movimiento inverso** del espacio.

Estudiar el tipo de movimiento:

Para calcular los puntos invariantes de la transformación se resuelve el sistema $N\overline{X}=\overline{X} \Rightarrow (N-I)\overline{X}=0$

$$\left(\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -132 & -23 & -24 & -36 \\ -44 & -24 & 41 & -12 \\ -66 & -36 & -12 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -132 & -72 & -24 & -36 \\ -44 & -24 & -8 & -12 \\ -66 & -36 & -12 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -132 & -72 & -24 & -36 \\ -44 & -24 & -8 & -12 \\ -66 & -36 & -12 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se trata de un sistema (no homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas). Como se aprecia, la segunda fila es igual a la tercera multiplicada por 3 y también es igual a la cuarta multiplicada por 2. Por tanto, sólo hay una ecuación linealmente independiente $\Rightarrow$ rango(N-I) = rango(M-I) = 1$\Rightarrow$ se trata de una **simetría especular**.

El plano de simetría es la solución del sistema y se puede obtener, por ejemplo, a partir de la tercera ecuación del sistema. $-44-24x-8y-12z=0 \Leftrightarrow$ **-6x-2y-3z=11.**

Inicio

55. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{20}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos

Solución

Comprobemos primero si se trata de un movimiento. La matriz M es

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

como $M.M^t=I$, se trata de un movimiento. Como $|M|=-1$ se trata de un movimiento inverso.

Estudiar el tipo de movimiento:

Se busca ahora el subespacio de puntos invariantes, que lo da la ecuación

$N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N - I)\overline{X} = 0$, que en este caso queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{20}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, como puede observarse, las segunda y cuarta fila son iguales y la tercera es dos veces la segunda por lo que rango(N-I) = rango(M-I) = 1 y el sistema es compatible indeterminado y se trata de una **simetría especular**, cuyo plano de simetría es la solución del sistema (tomando una cualquiera de las ecuaciones):

Elemento característico: plano de simetría.

Cálculo del plano de simetría:

El **plano de simetría**, que es la solución del sistema se obtiene tomando la única ecuación $-\frac{10}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \Leftrightarrow$ **x+2y+z+10 = 0**

Inicio

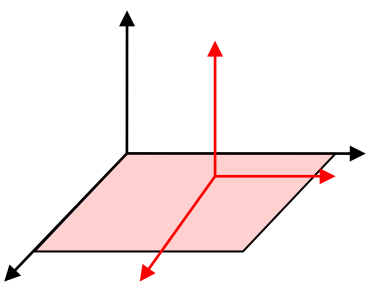
56. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano z = 0

Solución

La ecuación matricial de una simetría especular tiene como expresión X’ = A + M (X-A) siendo A un punto del plano de simetría, por tanto, un punto invariante de la transformación.

Como se sabe, eligiendo un sistema de referencia ortonormal del espacio en el cual los ejes coordenados cumplan que el primero es perpendicular al plano de simetría y los otros dos pertenecen a dicho plano, en este sistema, la ecuación matricial de la transformación es:

Una base adecuada para dicho sistema de referencia puede ser $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ siendo $\vec{u} = (0,0,1)$; $\vec{v} = (1,0,0)$ y $\vec{w} = (0,1,0)$, (comprobando que $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$)



En este sistema de referencia la matriz de la transformación ortogonal es

$$M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pues el primer vector de la base se transforma en su simétrico (primera columna) y los otros dos (segunda y tercera columna) permanecen invariantes por ser del plano de simetría.

La matriz del cambio de la base B a la base canónica es:

$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ matriz que tiene en columnas los vectores de la base B respecto de la canónica. La matriz del giro en la base canónica será, por tanto, $M_c=PM_BP^{-1}$ por lo que

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Obsérvese que, aunque se ha aplicado un método general, la matriz M se podía haber obtenido directamente pues M contiene en columnas los transformados de los vectores de la base canónica y, como se observa en el gráfico los vectores directores de los ejes X e Y son invariantes por ser del plano de simetría y el vector director del eje Z se transforma en su opuesto por ser perpendicular a dicho plano.

Para escribir la ecuación matricial se toma un punto del plano de simetría, el cual puede ser el origen O=(0,0,0) quedando

$$X'=A+M(X-A)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-0\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

o también puede expresarse como $\begin{cases}x'=x\\y'=y\\z'=-z\end{cases}$

Inicio

57. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano x - 2y = 7

Solución

La ecuación de la simetría especular en la base canónica del espacio es X' = A + M (X-A) siendo A un punto del plano de simetría.

Si se toma una referencia tal que el eje X sea perpendicular al plano de simetría se conoce la forma que toma la matriz de la transformación vectorial pues si se llama B a dicha base, entonces,

$$M_B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Se puede definir la base $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ tomando el primer vector unitario y perpendicular al plano, por ejemplo, $\vec{u}=\frac{(1,-2,0)}{|(1,-2,0)|}=\frac{(1,-2,0)}{\sqrt{5}}\Rightarrow \vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}},0\right)$

El segundo vector es un vector cualquiera perpendicular a éste, por ejemplo: $\vec{v}=(0,0,1)$ y el tercero es el producto vectorial de ambos $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}\Rightarrow\vec{w}=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)$ (comprobándose que $|\vec{w}|=1$).

La matriz de cambio de base de la base B a la canónica es aquella que tiene por columnas los vectores de la base B es, por tanto, $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y la matriz M en la base canónica,

$M_c=PM_BP^{-1}$

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow$$

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0\end{pmatrix}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\ \frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(se puede comprobar que se cumple que $M.M^t=I$ y $|M|=-1$ por ser la simetría especular un movimiento inverso del espacio y que la matriz M es simétrica)

Para completar la ecuación se elige un punto invariante, es decir, un punto cualquiera del plano de simetría, por ejemplo, el punto (7,0,0) quedando

$$X'=A+M(X-A)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\ \frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-7\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{14}{5}\\-\frac{28}{5}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\ \frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ \frac{14}{5}&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\ -\frac{28}{5}&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Inicio

58. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano $40x-60y-40\sqrt{3}z=1$

Solución

La ecuación de la simetría especular en la base canónica del espacio viene dada por X' = A + M (X-A) siendo A un punto del plano de simetría.

Tomando referencia afín cuyo eje X sea perpendicular al plano de simetría la matriz de la transformación en dicha base, es $M_B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Se puede definir la base $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ tomando el primer vector unitario y perpendicular al plano, por ejemplo, $\vec{u}=\dfrac{(40,-60,-40\sqrt{3})}{\left|(40,-60,-40\sqrt{3})\right|}=\dfrac{(40,-60,-40\sqrt{3})}{100}\Rightarrow\vec{u}=\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{3}{5},-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right)$

Tomando un vector cualquiera del plano de simetría (por tanto, perpendicular a $\vec{u}$):

$\vec{v}=\dfrac{\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},0\right)}{\left|\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},0\right)\right|}\Rightarrow\vec{v}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}},\dfrac{2}{\sqrt{13}},0\right)$ y el último, el producto vectorial de ambos

$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}\Rightarrow\vec{w}=\left(\dfrac{4\sqrt{39}}{65},-\dfrac{6\sqrt{39}}{65},\dfrac{\sqrt{13}}{5}\right)$ (comprobándose que $\left|\vec{w}\right|=1$). La matriz de cambio de base de la base B a la canónica es aquella que tiene por columnas los vectores de la base B es, por tanto,

$P=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{3}{\sqrt{13}}&\frac{4\sqrt{39}}{65}\\-\frac{3}{5}&\frac{2}{\sqrt{13}}&-\frac{6\sqrt{39}}{65}\\-\frac{2\sqrt{3}}{5}&0&\frac{\sqrt{13}}{5}\end{pmatrix}$ cuya matriz inversa es $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&-\frac{2\sqrt{3}}{5}\\\frac{3}{\sqrt{13}}&\frac{2}{\sqrt{13}}&0\\\frac{4\sqrt{39}}{65}&-\frac{6\sqrt{39}}{65}&\frac{\sqrt{13}}{5}\end{pmatrix}$, (obsérvese que $P^{-1}=P^t\Rightarrow$ P es ortogonal).

La matriz M en la base canónica, $M_c=PM_BP^{-1}\ \Rightarrow$

$$M=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{3}{\sqrt{13}}&\frac{4\sqrt{39}}{65}\\-\frac{3}{5}&\frac{2}{\sqrt{13}}&-\frac{6\sqrt{39}}{65}\\-\frac{2\sqrt{3}}{5}&0&\frac{\sqrt{13}}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&-\frac{2\sqrt{3}}{5}\\\frac{3}{\sqrt{13}}&\frac{2}{\sqrt{13}}&0\\\frac{4\sqrt{39}}{65}&-\frac{6\sqrt{39}}{65}&\frac{\sqrt{13}}{5}\end{pmatrix}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}\frac{17}{25}&\frac{12}{25}&\frac{8\sqrt{3}}{25}\\\frac{12}{25}&\frac{7}{25}&-\frac{12\sqrt{3}}{25}\\\frac{8\sqrt{3}}{25}&-\frac{12\sqrt{3}}{25}&\frac{1}{25}\end{pmatrix}$$ se

comprueba ahora que esta es la matriz de una simetría especular, pues se cumple que es simétrica y es ortogonal ($M.M^t=M^t.M=I$) y que $|M|=-1$

Para completar la ecuación matricial sólo queda elegir un punto perteneciente al plano de simetría, por ejemplo, el punto $A=\left(\frac{1}{40},0,0\right)$ quedando la ecuación matricial:

$$X'=A+M(X-A)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{40}\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{17}{25}&\frac{12}{25}&\frac{8\sqrt{3}}{25}\\\frac{12}{25}&\frac{7}{25}&-\frac{12\sqrt{3}}{25}\\\frac{8\sqrt{3}}{25}&-\frac{12\sqrt{3}}{25}&\frac{1}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-\frac{1}{40}\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{125}&\frac{17}{25}&\frac{12}{25}&\frac{8\sqrt{3}}{25}\\-\frac{3}{250}&\frac{12}{25}&\frac{7}{25}&-\frac{12\sqrt{3}}{25}\\-\frac{\sqrt{3}}{125}&\frac{8\sqrt{3}}{25}&-\frac{12\sqrt{3}}{25}&\frac{1}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Inicio

59. Obtener la ecuación matricial del producto de las simetrías especulares dee planos x = 0 y z = 0. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elementos característicos.

Solución

La simetría de plano z = 0 tiene como ecuación $S_2\equiv\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ como se vio en un problema anterior.

La simetría de plano x = 0 tiene como ecuación $S_1\equiv\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ en la que el vector del eje X, perpendicular al plano de simetría se transforma en su inverso y los otros dos vectores de la referencia canónica permanecen constantes.

Antes de seguir con el problema se razonará del siguiente modo. Si S_1 es una transformación inversa (simetría), la matriz de la transformación asociada cumplirá que $|M_1| = -1$ y dado que S_2 es también inversa, su correspondiente matriz M_2 cumplirá también que $|M_2| = -1$. El producto de ambas transformaciones tendrá como matriz $M_1.M_2$. Si ambas matrices son ortogonales su producto $M_1.\ M_2$ cumplirá que $(M_1.\ M_2)(\ M_1.\ M_2)^t= M_1.\ M_2.\ M_2^t.\ M_1^t = M_1.I.\ M_1^t = M_1.\ M_1^t = I$, por lo que el producto de dos transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal. El determinante será $|M_1.M_2|=|M_1|.|M_2| = (-1).(-1) = 1$ por las propiedades de los determinantes. Por lo tanto, se trata de una transformación directa. En general, el producto de un número par de transformaciones inversas es una transformación directa. Siguiendo el razonamiento, si una de las simetrías deja invariante un plano, y la segunda deja invariante otro plano. Si ambos planos tienen intersección, quedará una recta invariante y el movimiento (directo y con una recta invariante) será una rotación.

Si ambos planos son paralelos, no habrá elementos invariantes y el movimiento será una traslación como se verá más adelante.

Se procede ahora con el ejercicio en la forma general.
Las transformaciones pueden escribirse también como:

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } S_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matriz N del movimiento es $N = N_1 \,.\, N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Estudiar el tipo de movimiento:

Se calculan los puntos invariantes a partir del sistema $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N - I)\overline{X} = 0$.

$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ estudiando el sistema se observa que rango (M-I) = rango (N-I) = 2 por lo que se trata de un **giro**.

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

El eje se obtiene como solución del sistema y es $e \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ es decir, el eje Y (evidentemente, la intersección de los planos de simetría).

Cálculo del ángulo:

Para calcular el ángulo de la rotación, se elige un vector perpendicular al eje de giro, por ejemplo, $\vec{v} = (1, 0, 0)$ y se calcula su transformado $\vec{v}\,' = M\vec{v} \Rightarrow \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puesto que se obtiene que $\vec{v}\,' = -\vec{v}$, el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{v}\,'$ es claramente **α= 180º**

NOTA:
El producto de dos simetrías especulares cualesquiera del espacio no es conmutativo, aunque en este caso concreto si lo es.

Inicio

60. Obtener la ecuación matricial del producto de las simetrías especulares de planos 3y - 4 z + 6 = 0 y 3 y – 4 z – 4 = 0. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elementos característicos.

Solución

Como es conocido, la ecuación matricial de una simetría especular viene dada por X'=A+M(X-A) siendo A un punto cualquiera del plano de simetría y M la matriz de la transformación vectorial asociada.

Si se llama S_1 a la primera simetría y S_2 a la segunda, y las matrices de las transformaciones vectoriales respectivas son M_1 y M_2, el producto de ambas transformaciones tendrá como matriz $M_1.M_2$ cuyo determinante vale $|M_1.M_2|=1$ por lo que se trata de un movimiento directo.
Para obtener la ecuación de S_1, se busca un vector normal al plano de simetría. Tomando los coeficientes del plano se obtiene el vector (0, 3, -4), del que se obtiene el vector unitario

$$\vec{u} = \frac{(0,3,-4)}{|(0,3,-4)|} = \frac{(0,3,-4)}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow \vec{u} = \left(0,\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$$

Como se puede comprobar, el segundo plano es paralelo al primero, por lo que tienen el mismo vector normal.
Dado que S_1 deja invariantes los puntos del primer plano y S_2 deja invariantes los puntos del segundo y dado que los dos planos no tienen intersección, la transformación resultante no tendrá puntos invariantes.

Se puede calcular ahora la ecuación matricial de S_1:
Un vector perpendicular a $\vec{u}$ puede ser el vector unitario $\vec{v} = \left(0,\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ y el tercer vector, producto vectorial de ambos es $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{w} = (1,0,0)$

En la base $B = \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$, la matriz de la transformación S_1 es $M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

El cambio de base de la base B a la canónica viene dado por $X_C=PX_B$ siendo P la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B.

$$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\ \frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\ -\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\end{pmatrix}$$ .y la matriz M en la base canónica, $M_c=PM_BP^{-1}\ \Rightarrow$

$$M=\begin{pmatrix}0&0&1\\ \frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\ -\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\ \frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\ -\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}$$

Tomando un punto cualquiera que cumpla la ecuación del plano, por ejemplo, $A_1=(0,-2,0)$, se puede escribir la ecuación matricial de la simetría S_1:

$$X'=A_1+M(X-A_1)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y+2\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{36}{25}\\\frac{48}{25}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$S_1\equiv\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{36}{25}&0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\\frac{48}{25}&0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

(Obsérvese que el punto $O'=\begin{pmatrix}0\\-\frac{36}{25}\\\frac{48}{25}\end{pmatrix}$ es el simétrico del origen por S_1)

Realizando los mismos pasos para la simetría S_2 se llegará a la misma matriz de la transformación vectorial puesto que los planos son paralelos, y se puede elegir la misma base B.

Igual que se hizo para la transformación anterior, se elige un punto del plano, en este caso, puede ser $A_2=(0,0,-1)$, quedando

$$X'=A_2+M(X-A_2)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z+1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{24}{25}\\-\frac{32}{25}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$S_2\equiv\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{24}{25}&0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\-\frac{32}{25}&0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Ahora, el producto de ambas transformaciones vendrá dado por el producto de sus matrices quedando la nueva transformación:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{36}{25}&0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\\frac{48}{25}&0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{24}{25}&0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\-\frac{32}{25}&0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{12}{5}&0&1&0\\\frac{16}{5}&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

La clasificación de esta transformación es inmediata pues dado que la matriz M de su transformación vectorial asociada es la identidad, se trata de una **traslación** de vector $\vec{t}=\left(0,-\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$.

Este vector es perpendicular a los dos planos de simetría y su módulo es $\left|\vec{t}\right|=4$ que es la distancia de la traslación. Se puede comprobar que la distancia entre ambos planos es 2.

NOTA:
El producto de dos simetrías especulares del espacio cuyos planos son paralelos es una traslación cuya distancia es el doble de la distancia entre ambos planos y cuya dirección es perpendicular a ellos. El sentido es el del primer plano de simetría al segundo plano.
El producto no es conmutativo pues el orden de las simetrías cambia el sentido de la traslación.

Inicio

61. Obtener la ecuación matricial del producto de la simetría especular de plano 3 x - 4 z + 5 = 0 por la traslación de vector $\vec{t}=(15,0,-20)$. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elementos característicos.

Solución

Antes que nada, conviene observar que un vector perpendicular al plano de simetría es $\vec{n}=(3,0,-4)$ por lo que el vector de la traslación es paralelo a él, por tanto, perpendicular al plano de simetría. La magnitud de la traslación es $\left|\vec{t}\right|=\left|(15,0,-20)\right|=25$

Se comienza obteniendo la ecuación matricial de la simetría. Se construye para ello una base B cuyo primer vector sea perpendicular al plano de simetría y los otros dos, perpendiculares entre sí, contenidos en dicho plano. Los tres formando una base ortonormal del espacio. Sea $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ tal que $\vec{u}=\frac{(3,0,-4)}{\left|(0,3,-4)\right|}=\frac{(3,0,-4)}{\sqrt{3^2+4^2}}\Rightarrow\vec{u}=\left(\frac{3}{5},0,-\frac{4}{5}\right)$ vector normal al plano y unitario, se puede tomar

$\vec{v}=\left(\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}\right)$ pues es perpendicular al anterior y también unitario; entonces,

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\end{vmatrix}=-\vec{j}=(0,-1,0).$$

El cambio de base de la base B a la canónica tiene como ecuación $M_c=PM_BP^{-1}$ siendo la matriz

$$P=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\end{pmatrix}$$ y la matriz M en la base canónica, $M=PM_BP^{-1}\Rightarrow$

$$M=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}\frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}$$

y tomando un punto cualquiera del plano de simetría, por ejemplo, el (-3,0,-1) se tiene la ecuación de la simetría

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+3\\ y\\ z+1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{6}{5} & \frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{8}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

La traslación de vector $\vec{v}=(15,0,\text{-}20)$ tiene por ecuación

$$\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 15 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -20 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

El producto de ambas transformaciones vendrá dado por:

$$\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{6}{5} & \frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{8}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 15 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -20 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{81}{5} & \frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{108}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Para clasificar esta nueva transformación se empieza estudiando su matriz M, pero como ésta es la misma que la de la simetría inicial se puede concluir que se trata de un movimiento inverso del espacio.

Estudiar el tipo de movimiento:

Para clasificarla se estudian sus puntos invariantes, solución del sistema: $N\overline{X}=\overline{X}\Rightarrow(N-I)\overline{X}=0$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{81}{5} & \frac{7}{25}-1 & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 0 & 1-1 & 0 \\ \frac{108}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{81}{5} & -\frac{18}{25} & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{108}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{32}{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

como se puede ver, la última fila es la primera multiplicada por $-\frac{4}{3}$ por lo que

$\text{rango}(M-I)=\text{rango}\begin{pmatrix} -\frac{18}{25} & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{24}{25} & 0 & -\frac{32}{25} \end{pmatrix}=1$ y $\text{rango}(N-I)=\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{81}{5} & -\frac{18}{25} & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{108}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{32}{25} \end{pmatrix}=1$ por ello se trata de un sistema compatible indeterminado, que tiene una sola ecuación independiente. Es, por tanto, una **simetría especular.**

Elemento característico: plano de simetría.

Cálculo del plano de simetría:

El plano de simetría se obtiene de resolver el sistema. Tomando, por ejemplo, la última ecuación:

$\frac{108}{5}+\frac{24}{25}x-\frac{32}{25}z=0\Rightarrow 540+24x-32z=0\Rightarrow 3x-4z+\frac{135}{2}=0$ como puede observarse es un plano paralelo al plano de la primera simetría. Se puede comprobar que la distancia entre ambos planos es 25, la misma magnitud que la traslación.

NOTA:
El producto de una simetría especular del espacio por una traslación de dirección perpendicular a dicho plano es una nueva simetría especular. El nuevo plano de simetría es paralelo al original y la distancia es la magnitud de la traslación, en el sentido del vector de traslación.

Inicio

62. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial y calcular los elementos principales:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

Solución

Podemos escribir la ecuación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde O’=(1,0,2) son las coordenadas del punto transformado del origen. Y la ecuación matricial es de la forma X’=O’+MX con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Clasificación:

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: M M^t = I.

MM^t=I, luego M es ortogonal, y por tanto nuestra transformación es un **movimiento.**

2. **Calcular el determinante de M**.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$, se trata de un **movimiento inverso.**

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

Puntos invariantes:
Del sistema X=O’+MX se pasa al siguiente (M-I)X=-O’, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

que por el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$rg(M-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

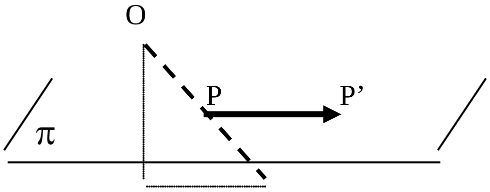
$$rg(M-I|O') = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) = 2$$

Sistema incompatible, no hay puntos invariantes es una **simetría deslizante.**

Elementos característicos: plano de simetría π y vector de traslación:

Cálculo del plano y el vector:

Producto de una simetría especular y una traslación de vector paralelo.



O'=T(O)

La simetría deslizante tiene por elementos el vector $\vec{u}=\overrightarrow{PP'}$ y el plano π paralelo y que contiene a P el punto medio del segmento OO'.

1º El punto medio entre el origen O y su transformado T(O)=O' pertenece al plano de simetría.

$P=\frac{1}{2}(O+O')=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$. Como el punto P es del plano de simetría, su transformado P' también lo será, y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es el vector de la traslación.

$P'=T(P)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2\\0\\1\end{pmatrix}$ resultando $\overrightarrow{PP'}=P'-P=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Vector de traslación **(1,0,0).**

2º Para calcular el plano de simetría, buscaremos los vectores invariantes por la transformación ortogonal asociada, es decir, el sistema homogéneo, X=MX que se pasa al siguiente (M-I)X=O, es decir,

$$\begin{pmatrix}1-1&0&0\\0&1-1&0\\0&0&-1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow z=0$$

que corresponde al plano vectorial que junto con cualquier punto invariante por la simetría, por ejemplo, P=(1/2,0,1) resulta **z-1=0** como plano de simetría. Siendo la simetría deslizante el producto de la **simetría especular de plano z=1 por la traslación de vector (1,0,0).**

Inicio

63. Dada la transformación geométrica del espacio euclídeo E_3:

$$\overline{X}' = N\,\overline{X}\text{, siendo } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, clasificarla y hallar sus elementos característicos.

Solución

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: $M\,M^t = I$.

De la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ consideramos la submatriz cuadrada $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ortogonal

2. **Calcular el determinante de M.**

Determinante de M igual a 1, así es un **movimiento directo.**

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

Puntos invariantes:

$N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N - I)\overline{X} = 0$ y el sistema incompatible $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, puesto que rango(N-I) es distinto del rango(M-I), indica un **movimiento helicoidal**.

Elementos característicos: eje de giro, ángulo de giro y vector de traslación:

El movimiento helicoidal se puede descomponer en el producto de una rotación y una traslación cuyo vector es paralelo a la dirección del eje.

Cálculo del eje del giro:

De la transformación ortogonal X = MX ⇔ (M – I) X = O que es un giro vectorial, obtenemos el eje de rotación como conjunto de vectores invariantes.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = -z\,.$$

La traslación de vector paralelo al eje será proporcional al (1,1,-1).

Cálculo del vector de la traslación:

Si aplicamos la traslación de vector (-t, -t, t) después del movimiento helicoidal resulta un giro. En efecto, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ y si queremos que sea una rotación el sistema de los puntos invariantes debe ser compatible para ello, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al rango de la matriz ampliada.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 1 & 1-t \\ 1 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 1-t \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}.$$

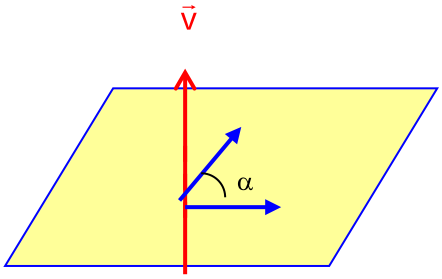
Por consiguiente, la **traslación** es de **vector (2/3,2/3,-2/3)** y el eje de rotación se obtiene de los puntos invariantes por el giro,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \frac{1}{3} \\ y + z = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Cálculo del ángulo:

La traza es invariante $1 + 2\cos\alpha = 0 + 0 + 0 \Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pm 120^{\circ}$ amplitud del giro o rotación.

Fijada una dirección del eje, por ejemplo, (1,1,-1) podemos determinar el ángulo adecuado (120º ó 240º) mediante el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PO}$ y $\overrightarrow{PO'}$, siendo P el punto de intersección del eje e con el plano perpendicular que pasa por O y O'=(1/3,1/3,2/3) el transformado por O mediante la rotación.



Eje: $\begin{cases} x - y = \frac{1}{3} \\ y + z = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = t \\ z = \frac{1}{3} - t \end{cases}$ intersección con el plano x+y-z=0 resulta t=0 y por consiguiente el punto P(1/3,0,1/3) que da lugar a los vectores $\overrightarrow{PO} = \left(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$ y $\overrightarrow{PO'} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Calculamos el producto escalar $\overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{PO'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}\right)$ cuyo sentido coincide con el del vector de traslación (2/3,2/3,-2/3), siendo el ángulo el menor (el positivo) **α=120º**, pues corresponde al camino más corto para que la orientación coincida.

Inicio

64. Dada la transformación geométrica de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Clasificarla.

b) Hallar sus elementos característicos.

Solución

a) Podemos escribir la ecuación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde O'=(-6,1,-7) son las coordenadas del punto transformado del origen. Y la ecuación matricial es de la forma X'=O'+MX con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Clasificación:

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: M M^t = I.

MM^t=I, luego M es ortogonal, y por tanto nuestra transformación es un **movimiento.**

2. **Calcular el determinante de M.**

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$, se trata de un **movimiento inverso.**

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

Puntos invariantes:

Del sistema $N\overline{X}=\overline{X}\Rightarrow(N-I)\overline{X}=0$, que por el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\mathrm{rg}(M-I)=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}=1$$

$$\mathrm{rg}(N-I)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-6&-1&0&-1\\1&0&0&0\\-7&-1&0&-1\end{pmatrix}=2$$

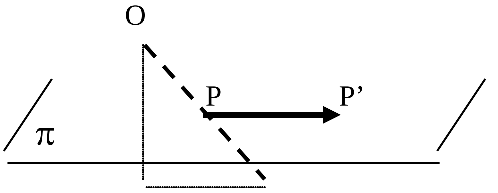
Sistema incompatible, no hay puntos invariantes es una **simetría deslizante.**

b) Cálculo de los elementos de la simetría deslizante:

Elementos característicos: plano de simetría π y vector de traslación:

Cálculo del plano y el vector:

Producto de una simetría especular y una traslación de vector paralelo.



La simetría deslizante tiene por elementos el vector $\vec{u}=\overrightarrow{PP'}$ y el plano π paralelo y que contiene a P el punto medio del segmento OO'.

O'=T(O)

1º El punto medio entre el origen O y su transformado T(O)=O' pertenece al plano de simetría.

$$P=\frac{1}{2}(O+O')=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\1\\-7\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-3\\\frac{1}{2}\\-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$$

. Como el punto P es del plano de simetría, su transformado P' también lo será, y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es el vector de la traslación.

$$P'=T(P)=\begin{pmatrix}-6\\1\\-7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\\frac{1}{2}\\-\frac{7}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/2\\3/2\\-4\end{pmatrix}$$ resultando $$\overrightarrow{PP'}=P'-P=\begin{pmatrix}1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}.$$

Vector de traslación **(1/2,1,-1/2).**

2º Para calcular el plano de simetría, buscaremos los vectores invariantes por la transformación ortogonal asociada, es decir, el sistema homogéneo, X=MX que se pasa al siguiente (M-I)X=O, es decir,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+z=0$$

que corresponde al plano vectorial que junto con cualquier punto invariante por la simetría, por ejemplo, P=(-3,1/2,-7/2) resulta **x+z+13/2=0** como plano de simetría.

Siendo la simetría deslizante el producto de la **simetría especular de plano x+z+13/2=0 por la traslación de vector (1/2,1,-1/2).**

Inicio

65. Clasificar la siguiente transformación geométrica y obtener sus elementoss característicos:

$$\mathbf{X'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Solución

$X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} X$, de aquí la matriz $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ es ortogonal y simétrica con determinante -1, corresponde a un movimiento inverso (**simetría**).

Estudiar el tipo de movimiento:

Puntos invariantes:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1-\frac{1}{3} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistema incompatible, $\mathrm{rg}(I-M) \neq \mathrm{rg}\left(I-M \middle| O'\right)$ entonces **simetría deslizante**, es decir, el producto de una simetría especular por una traslación de vector paralelo al plano de simetría.

Elementos característicos: plano de simetría π y vector de traslación:

Cálculo del plano y el vector:

Dado un punto cualquiera y su transformado; el punto medio del segmento que determinan pertenece al plano de simetría, por ejemplo, el punto O(0,0,0) y homólogo O'(1,1,0) nos indican un punto (O+O')/2=(1/2,1/2,0) que al aplicarle la simetría deslizante se transforma en el punto:

$$T\left(\frac{O+O'}{2}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ \frac{5}{6}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

formando el vector de traslación $\vec{v}=\overrightarrow{\frac{O+O'}{2}T\left(\frac{O+O'}{2}\right)}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

Vectores invariantes:

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}X\Rightarrow\begin{pmatrix}1-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 1-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1-\frac{1}{3}\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y+z=0$$, que con el punto

(O+O')/2=(1/2,1/2,0) da el plano de simetría **x+y+z=1**

Inicio

66. Sea T la transformación geométrica de R^3 de ecuación:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & k & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

a) Obtener los valores de k para los cuales T es un movimiento

b) Clasificar T para aquellos valores de k para los que sea un movimiento

Solución

a) Condición necesaria para que T sea un movimiento es que el determinante sea 1 ó -1,

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & k & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\pm1\Rightarrow\frac{k}{2}-\frac{3}{4}=\pm1\Rightarrow k=\begin{cases}\frac{7}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Además la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ debe ser ortogonal.

Si k=7/2, tenemos la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que no es ortogonal, puesto que $MM^t \neq I$.

Si k=-1/2, resulta la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que es ortogonal, pues se cumple que $MM^t = I$, y por consiguiente T es un movimiento.

T es un movimiento inverso para k=-1/2. Buscamos los puntos invariantes por T,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

sistema incompatible $rg(M - I) \neq rg\left(N - I\right)$. No hay puntos invariantes por T, luego es una **simetría deslizante.**

Inicio

67. Hallar las ecuaciones de la composición del giro de ángulo π con respecto a la recta r: (0,0,1) + t (0,1,1) con la traslación de vector (1,1,0) y determinar de qué tipo de movimiento se trata.

Solución

En el sistema de referencia $R' \equiv \{Q, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ definido por:

$$Q(0,0,1) \in r,\ \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) // r, \vec{u}_2 = (1,0,0) \perp \vec{u}_1, \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$$

la ecuación del giro, con el primer vector invariante es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\operatorname{sen}\pi \\ 0 & \operatorname{sen}\pi & \cos\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se pasa al sistema de referencia R definido por:

$$R \equiv \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ siendo } O(0,0,0),\ \vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

La matriz del cambio de base es

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ cuya inversa es } \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = BGB^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{en } R$$

La ecuación con el punto A (0,0,1) invariante será:

$$X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ahora se compone con la traslación T de vector (1,1,0) quedando

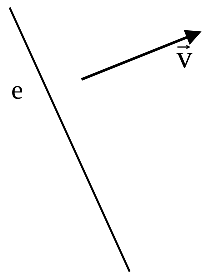
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se trata de un **movimiento helicoidal**

Inicio

68. ¿Qué condición se debe cumplir para que el producto de una rotación y una traslación del espacio R^3 sea otra rotación y no un movimiento helicoidal?

Solución



Dada la ecuación de la rotación $X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow X' = O' + MX$, sabemos que $X = O' + MX \Leftrightarrow (I - M)X = O'$ es un sistema compatible indeterminado cuya solución es el eje de rotación.
Si a continuación, aplicamos una traslación de vector $\vec{v} = (m, n, p)$, resulta el sistema $(I - M)X = O' + \vec{v}$ que debe cumplir $r(I - M) = r(I - M|O') = r(I - M|O' + \vec{v}) = 2$, por tanto, $r(I - M|\vec{v}) = 2$ y geométricamente los tres planos se cortan en una recta y el vector de traslación $\vec{v}$ será perpendicular al vector director del eje de rotación, puesto que todo determinante de orden tres de la matriz ampliada debe ser cero.

Inicio

69. Sean las simetrías especulares S_1, S_2, S_3, S_4 de planos:

π_1: x-y+z=0, π_2: x-y+z-3=0, π_3:-2x-y+z=0, π_4: 2y+z=0 respectivamente.

Clasificar las trasformaciones:

a) $S_1 o S_2 o S_3$

b) $S_1 o S_2 o S_3 o S_4$

Solución

a) Los puntos invariantes por cada simetría son los de los respectivos planos de simetría, luego los puntos invariantes mediante la transformación producto será la intersección de dichos planos:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema incompatible, no hay puntos invariantes y $S_1 o S_2 o S_3$ es el producto de un número impar de movimientos inversos que da un movimiento inverso sin puntos invariantes, resulta una **simetría deslizante.**

b) En este caso, $S_1 o S_2 o S_3 o S_4$ es un número par, por consiguiente un movimiento directo, sin puntos invariantes tenemos un **movimiento helicoidal.**

Inicio

70. Identificar la transformación T, tal que los puntos A=(1,2,3), B=(1,1,1), C=(-1,2,3),y D=(1,0,2) se transforman en A'=(2,-3,0), B'=(1,-1,0), C'=(2,-3,2), y D'=(0,-2,0) respectivamente..

Solución

Se cumple que: T(A)=A', T(B)=B', T(C)=C' y T(D)=D' y en forma matricial, escribiendo conjuntamente $T\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ para los cuatro puntos:

$$T\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&1\\2&1&2&0\\3&1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&2&0\\-3&-1&-3&-2\\0&0&2&0\end{pmatrix}\Rightarrow T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&2&0\\-3&-1&-3&-2\\0&0&2&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&1\\2&1&2&0\\3&1&3&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la transformación geométrica T, son:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Se tiene que $|T|=1$ y la matriz $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$ es ortogonal, T es un **movimiento directo**.

Estudiar el tipo de movimiento:

Los puntos invariantes o dobles se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}=2\neq 3=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&-1\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}$$

Sistema incompatible, no hay puntos invariantes y T es un **movimiento helicoidal.**

Inicio

71. Hallar las ecuaciones de la simetría deslizante de plano $\pi \equiv x+y+z=1$ y vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ de E_3:

a) Escoger una base ortonormal B del espacio vectorial V_3 adecuada.

b) Escribir la matriz M_B asociada al movimiento respecto de la base B.

c) Hallar la matriz M_{Bc} asociada al movimiento respecto de la base canónica.

d) Escribir las ecuaciones del movimiento respecto de la base canónica.

Solución

a) En el sistema de referencia $R' \equiv \{Q, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ definido por:

$$Q(0,0,1) \in \pi,\ \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \perp \pi, \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) \perp \vec{u}_1, \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,1)$$

siendo la base B ortonormal $\left\{\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1), \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,1)\right\}$

b) La ecuación de la simetría especular, con el primer vector ortogonal al plano es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c) Se pasa al sistema de referencia:

$$R \equiv \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ siendo } O(0,0,0), \vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

La matriz del cambio de base ortonormal es: $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_{Bc} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_B G M_B^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{en R}$$

d) La ecuación de la simetría especular con el punto A (0,0,1) invariante será:

$$X' = A + M_{Bc}\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A continuación aplicamos la traslación de vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Inicio

72. Estudiar el movimiento resultante de aplicar la simetría respecto del plano $\pi \equiv y-1=0$ y la traslación tal que: T(O)=(1,0,1). ¿Es conmutativo este producto?

Solución

Primeramente calculamos las ecuaciones de la simetría especular en el sistema de referencia $R' \equiv \{Q, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ definido por:

$$Q(0,1,0) \in \pi,\ \vec{u}_1 = (0,1,0) \perp \pi,\ \ \vec{u}_2 = (0,0,1) \perp \vec{u}_1,\ \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (1,0,0)$$

siendo la base B ortonormal $\{\vec{u}_1 = (0,1,0), \vec{u}_2 = (0,0,1), \vec{u}_3 = (1,0,0)\}$

La ecuación de la simetría especular, con el primer vector ortogonal al plano es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se pasa al sistema de referencia:

$$R \equiv \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ siendo } O(0,0,0),\ \vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

La matriz del cambio de base ortonormal es: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_{Bc}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_B G M_{B^{-1}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ en R}$$

La ecuación de la simetría especular con el punto A (0,1,0) invariante será:

$$X' = A + M_{Bc}\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A continuación aplicamos la traslación de vector $\vec{u} = \overrightarrow{OT(O)} = (1,0,1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Estudiar el tipo de movimiento:

Movimiento inverso, del que necesitamos buscar los puntos invariantes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = 1 \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

No tiene puntos invariantes, es una **simetría deslizante.**

Elementos característicos: plano de la simetría y vector de traslación:

Cálculo del vector:

Dado un punto cualquiera y su transformado; el punto medio del segmento que determinan pertenece al plano de simetría, por ejemplo, el punto O(0,0,0) y homólogo O'(1,2,1) nos permite obtener un punto (O+O')/2=(1/2,1,1/2) que al aplicarle la simetría deslizante se transforma en el punto:

$$T\left(\frac{O+O'}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

formando el vector de traslación $\vec{v} = \overrightarrow{\frac{O+O'}{2}T\left(\frac{O+O'}{2}\right)} = (1,0,1)$

Cálculo del plano:

Vectores invariantes:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y = 0,$$

que con el punto (O+O')/2=(1/2,1,1/2) da el plano de simetría y=1 y el vector (1,0,1) del enunciado. El plano de simetría es paralelo al vector de traslación, luego el producto es conmutativo.

Inicio

73. Escribir las ecuaciones del movimiento resultante de aplicar la rotación respecto del eje $e \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ y de ángulo $\alpha = -90^\circ$ y la traslación de vector (1,0,1).

Solución

Primeramente calculamos la ecuación de la rotación en el sistema de referencia $\equiv \{Q, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ definido por:

$$Q(0,0,2) \in r,\ \vec{u}_1 = (0,-1,0) // r,\ \vec{u}_2 = (1,0,0) \perp \vec{u}_1,\ \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (0,0,1)$$

la ecuación del giro, con el primer vector invariante es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se pasa al sistema de referencia R definido por:

$$R \equiv \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ siendo } O(0,0,0),\ \vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

La matriz del cambio de base es: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = BGB^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ en R}$$

La ecuación con el punto A (0,0,2) invariante será:

$$X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ahora se compone con la traslación T de vector (1,0,1) quedando

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En este caso, es una **rotación**, pues el vector de traslación (1,0,1) es perpendicular al eje de rotación. (Véase el ejercicio 68).

Inicio

74. Determinar la transformación que resulta de aplicar el movimiento helicoidal T_2 y a continuación la simetría deslizante T_1:

$$T_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad T_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

Previamente, colocamos el sistema de cada transformación con una matriz 4x4:

$$T_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Efectuamos el producto:

$$T_1 \circ T_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Estudiar el tipo de movimiento:

Resultando un movimiento inverso, por ser $|T_1 \circ T_2| = |T_1||T_2| = (-1)(+1) = -1$, veamos los puntos invariantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es: x=1/2, y=0, z=-3/2, lo que determina una **simetría rotacional**.

Inicio

75. Sea la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z) + 2 \end{cases}$$

a) Demostrar que T no tiene puntos dobles.

b) Demostrar que T es el producto de una simetría S respecto de un plano π por una traslación de vector $\vec{u}$ paralelo al plano π.

c) Hallar la ecuación de π y el vector $\vec{u}$.

Solución

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Puntos dobles: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

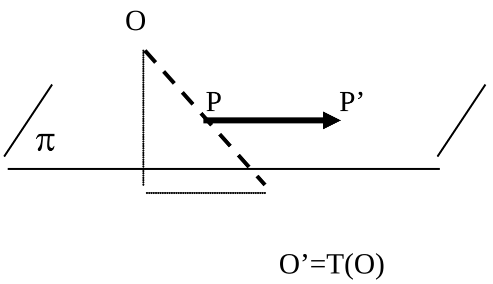
con $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 2 = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right)$ sistema incompatible.

b) La matriz $M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal, ya que $MM^t=I$ y con

$|M|=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=-1$ corresponde a un **movimiento inverso** si además por el apartado anterior no tiene puntos dobles es una **simetría deslizante**, es decir el producto de una simetría especular por una traslación de vector paralelo al plano de simetría.

c) No hay puntos invariantes por T, entonces buscamos vectores invariantes por la transformación ortogonal definida por M:

$$M\vec{v}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y-z=0$$



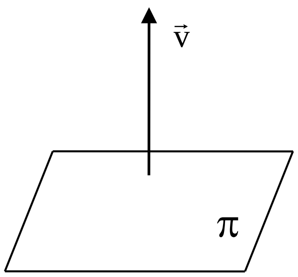
La simetría deslizante tiene por elementos el vector $\vec{u}=\overrightarrow{PP'}$ y el plano π paralelo y que contiene a P el punto medio del segmento OO'.

En nuestro caso O'=(1,1,2) y P=(O+O')/2=(1/2,1/2,1) debe pertenecer al plano π, luego x+y-z=1/2+1/2-1=0. Y por consiguiente, el vector buscado es el **(1,1,2)**, puesto que el origen O(0,0,0) está en el plano de simetría x+y-z=0.

Inicio

76. ¿Qué condición se debe cumplir para que el producto de una simetría especular y una traslación del espacio R^3 sea otra simetría especular y no una simetría deslizante?

Solución



Dada la ecuación de la simetría X’=MX, sabemos que $X = MX \Leftrightarrow (I-M)X = O$ es un sistema compatible indeterminado cuya solución es el plano de la simetría. Si a continuación, aplicamos una traslación de vector $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$, resulta el sistema $X' = O' + MX$ que corresponde al producto de una simetría por una traslación, para que sea efectivamente una simetría especular debe cumplir que $(I-M)X = O'$ que $r(I-M) = r(I-M|O') = 1$, por tanto, geométricamente los tres planos son coincidentes y el vector de traslación $\vec{v}$ será perpendicular al plano de simetría.

Inicio

77. Hallar las ecuaciones del movimiento helicoidal de eje $e \equiv \begin{cases} \text{pasa por } A(1,1,1) \\ \text{vector } (0,1,0) \end{cases}$ y ángulo $\alpha = -45^\circ$ y vector $\vec{u} = (1,1,1)$ de E_3.

i) Escoger una base ortonormal B del espacio vectorial V_3 adecuada.

ii) Escribir la matriz M_B asociada al movimiento respecto de la base B.

iii) Hallar la matriz M_{Bc} asociada al movimiento respecto de la base canónica.

iv) Escribir las ecuaciones del movimiento respecto de la base canónica.

Solución

i) En el sistema de referencia $R' \equiv \{A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ definido por:

$$A(1,1,1) \in e,\ \vec{u}_1 = (0,1,0) // e,\ \vec{u}_2 = (0,0,1) \perp \vec{u}_1,\ \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (1,0,0)$$

ii) La ecuación del giro, con el primer vector invariante es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & -\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

iii) Se pasa al sistema de referencia R definido por:

$$R \equiv \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ siendo } O(0,0,0),\ \vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

La matriz del cambio de base es $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = BGB^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{en } R$$

La ecuación con el punto A (1,1,1) invariante será:

$$X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

iv) Ahora se compone con la traslación T de vector (1,1,1) quedando

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Inicio

78. Encontrar las ecuaciones del producto de una rotación de amplitud $\frac{\pi}{2}$ con respecto a la recta que tiene como vector director a $\vec{v}=(1,1,0)$ y pasa por el punto (1,1,1) con la traslación de vector $\vec{u}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$

Solución

En el sistema de referencia $R'\equiv\{A,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ definido por:

$$A(1,1,1)\in e,\ \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\,//\,e,\ \vec{u}_2=(0,0,1)\perp\vec{u}_1,\ \vec{u}_3=\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

La ecuación del giro, con el primer vector invariante es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=G\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)&\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\0&-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)&\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Se pasa al sistema de referencia R definido por:

$$R\equiv\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\ \text{ siendo }\ O(0,0,0),\ \vec{e}_1=(1,0,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0),\ \vec{e}_3=(0,0,1)$$

La matriz del cambio de base es $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=BGB^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \text{ en } R$$

La ecuación con el punto A (1,1,1) invariante será:

$$X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ahora se compone con la traslación T de vector $\vec{u} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ quedando

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Inicio

79. Una superficie en $\mathbb{R}^3$ tiene de ecuación

$$\mathbf{2x^2 + \sqrt{2}x + 2y^2 + \sqrt{2}y + 2z^2 - 2z = 1}.$$

Determinar la ecuación de esta superficie, respecto del nuevo sistema de referencia: $R' = \left\{A = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right); \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right\}$ e indicar el tipo de transformación realizada.

Solución

Las ecuaciones del cambio de sistema de referencia son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Despejando y sustituyendo en la ecuación de la superficie, resulta: $x'^2+y'^2+z'^2=1$ una esfera de centro el nuevo origen y radio 1.

Todo cambio de sistema de referencia es una transformación afín que se puede descomponer en el producto de una traslación de ejes por un cambio de base $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ y

en este caso podemos observar que la matriz $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ es ortogonal, ya que $MM^t=I$,

luego se trata de un movimiento.

Estudiar el tipo de movimiento:

Buscamos puntos invariantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\text{rg}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 = \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ es un sistema incompatible con $|M| = 1$,

se trata de un **movimiento helicoidal**

Inicio

80. Sea la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{3\sqrt{13}}{26}y + \dfrac{\sqrt{13}}{13}z \\ y' = -\dfrac{3\sqrt{13}}{26}x + \dfrac{8-9\sqrt{3}}{26}y + \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13}z \\ z' = -\dfrac{\sqrt{13}}{13}x + \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13}y + \dfrac{9-2\sqrt{3}}{13}z + 1 \end{cases}$$

a) Demostrar que T no tiene puntos dobles.

b) Demostrar que T es el producto de una rotación G respecto de un eje e de amplitud α por una traslación de vector $\vec{u}$ paralelo al eje e.

c) Hallar la ecuación de e, el ángulo α y el vector $\vec{u}$.

Solución

a) Escribiremos el sistema en forma matricial de la forma X’=O’+MX:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{\sqrt{13}}{13} \\ -\dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{8-9\sqrt{3}}{26} & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\dfrac{\sqrt{13}}{13} & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \dfrac{9-2\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{con } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ M = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{\sqrt{13}}{13} \\ -\dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{8-9\sqrt{3}}{26} & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\dfrac{\sqrt{13}}{13} & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \dfrac{9-2\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix} \text{ y } O' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: $M M^t = I$.

2. **Calcular el determinante de M.**

Consideramos la matriz cuadrada M que es ortogonal, puesto que $MM^t=I$, con determinante 1, así es un **movimiento directo.**

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

El sistema $X = O' + MX \Leftrightarrow (M-I)X = -O' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1 & \dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{\sqrt{13}}{13} \\ -\dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{8-9\sqrt{3}}{26}-1 & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\dfrac{\sqrt{13}}{13} & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \dfrac{9-2\sqrt{3}}{13}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Con rango(M-I)=2 y rango(M-I/-O')=3 por el teorema de Rouché-Fröbenius es incompatible indica que T no tiene puntos dobles y es un **movimiento helicoidal**.

b) El movimiento helicoidal se puede descomponer en el producto de una rotación y una traslación cuyo vector es paralelo a la dirección del eje.

Elementos característicos: eje e, ángulo de giro α y vector de traslación:

Cálculo del eje del giro:

De la transformación ortogonal, X'=MX

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{8-9\sqrt{3}}{26} & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \frac{9-2\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que es un giro vectorial, obtenemos el eje de rotación como conjunto de vectores invariantes,

$$X = MX \Leftrightarrow (M-I)X = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{8-9\sqrt{3}}{26}-1 & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \frac{9-2\sqrt{3}}{13}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es la recta vectorial **x=0; y=2λ; z=-3λ**.

Cálculo del vector:

La traslación de vector paralelo al eje será proporcional al (0, 2, -3).

Si aplicamos la traslación de vector (0, -2t, 3t) después del movimiento helicoidal resulta un giro. En efecto, $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + MX + \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 1+3t \end{pmatrix} + MX$ y si queremos que sea una rotación el sistema, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 1+3t \end{pmatrix} + MX$, de los puntos invariantes debe ser compatible para ello, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al rango de la matriz ampliada. $r(M-I) = r(M-I|-O'+\vec{u}) = 2$.

$$rg\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{\sqrt{13}}{13} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{8-9\sqrt{3}}{26}-1 & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & 2t \\ -\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \frac{9-2\sqrt{3}}{13}-1 & -1-3t \end{array}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ 2t & \frac{8-9\sqrt{3}}{26}-1 & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -1-3t & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \frac{9-2\sqrt{3}}{13}-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{13}$$

Por consiguiente, la traslación es de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{13} \\ \frac{9}{13} \end{pmatrix}$ y el eje de rotación se obtiene de los puntos invariantes por el giro,

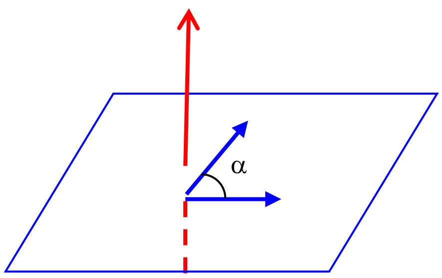
$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 1+3t \end{pmatrix} + MX = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{13} \\ \frac{4}{13} \end{pmatrix} + MX$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{8-9\sqrt{3}}{26}-1 & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \frac{9-2\sqrt{3}}{13}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{13} \\ -\frac{4}{13} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{13}}{13} - \frac{\sqrt{39}}{13} \\ 3y + 2z = 1 \end{cases}.$$

Cálculo del ángulo:

La traza es invariante $1 + 2\cos\alpha = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm 150^{\circ}$ amplitud del giro o rotación.

Fijada una dirección del eje, por ejemplo, (0, 2, -3) podemos determinar el ángulo adecuado (150º ó -150º) mediante el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PO}$ y $\overrightarrow{PO'}$, siendo P el punto de intersección del eje e con el plano perpendicular que pasa por O=(0,0,0) y O'=(0, 6/13, 4/13) el transformado por O mediante la rotación.



Eje: $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{13}}{13} - \frac{\sqrt{39}}{13} \\ 3y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{13}}{13} - \frac{\sqrt{39}}{13} \\ y = 2t \\ z = \frac{1}{2} - 3t \end{cases}$ intersección con el plano 2y-3z=0 resulta t=3/26 y por consiguiente el punto $P\left(\frac{2\sqrt{13}}{13} - \frac{\sqrt{39}}{13}, \frac{3}{13}, \frac{2}{13}\right)$ que da lugar a los vectores

$\overrightarrow{PO} = \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13} + \frac{\sqrt{39}}{13}, -\frac{3}{13}, -\frac{2}{13}\right)$ y $\overrightarrow{PO'} = \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13} + \frac{\sqrt{39}}{13}, \frac{3}{13}, \frac{2}{13}\right)$. Calculamos el producto escalar

$$\overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{PO'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{39}}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{39}}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{vmatrix} = \left(0, \frac{8\sqrt{13} - 4\sqrt{39}}{169}, \frac{6\sqrt{39} - 12\sqrt{13}}{169}\right)$$

cuyo sentido coincide con el del vector de traslación **(0,2,-3)**, siendo el ángulo el menor (el positivo), pues corresponde al camino más corto para que la orientación coincida.

Inicio

81. Una curva en R^3 tiene de ecuación $4x^2-4xy+8xz-11x+y^2-4yz+10y+4z^2-2z+7$. Determinar la ecuación de esta superficie, respecto del nuevo sistema de referencia:

$$R' = \left\{A = (1,0,0);\ \vec{u} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right),\ \vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right),\ \vec{w} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$$

e indicar el tipo de transformación realizada.

Solución

Las ecuaciones del cambio de sistema de referencia son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Despejando y sustituyendo en la ecuación de la curva, resulta: $x'=y'^2$ una parábola.

Todo cambio de sistema de referencia es una transformación afín que se puede descomponer en el producto de una traslación de ejes por un cambio de base $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ y en este caso podemos observar que la matriz $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ es ortogonal y simétrica, ya que $MM^t=I$, luego se trata de un movimiento.

Estudiar el tipo de movimiento:

Buscamos puntos invariantes:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un sistema incompatible con $|M| = -1$, se trata de una **simetría deslizante**.

Inicio