PROBLEMAS DE HOMOTECIAS Y SEMEJANZAS EN EL ESPACIO

Mediante marcadores puede escoger el tipo de problema

82. Sea T una transformación afín definida por sus ecuaciones:

$$x' = -2 + 2x$$
$$y' = 2 + 2y$$
$$z' = -2 + 2z$$

a) Clasificar T y hallar sus elementos característicos.

b) Hallar los vértices y el área del triangulo transformado del triángulo de vértices: A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(2, 1, 2).

Solución

83. Demostrar que la composición de una homotecia y una traslación es una homotecia.

Solución

84. Clasificar y hallar los elementos característicos de la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = -3 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}z \\ y' = -2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = -1 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z \end{cases}$$

Solución

85. Encontrar dos homotecias cuya composición sea una traslación.

Solución

86. Clasificar la siguiente transformación del espacio obteniendo sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

87. Hallar las ecuaciones de las homotecias que transforman, el pentágono regular P de centro O(-1, -1, -1) y lado 2 en el pentágono regular P' de centro O'(3, 3, 3) y lado 6.

Solución

88. Estudiar si la siguiente ecuación corresponde a una semejanza del espacio. En caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

89. Clasificar la transformación resultante de aplicar la semejanza del problema 85 por la semejanza del problema 87.

Solución

90. Hallar la ecuación matricial, de la transformación resultante de componer, el giro de ángulo π y eje la recta (x,y,z)=(0,0,1)+t(0,1,1), seguido de la homotecia de centro C(0,0,1) y razón k=5.

Hallar los elementos característicos de la transformación producto. ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

91. Hallar las ecuaciones que definen la transformación resultante, de componer, una homotecia de centro $C(-1, 0, 1)$ y razón $k = -5$ seguida de una rotación de ángulo $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ respecto del eje $e \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$.

Hallar los elementos característicos de la transformación producto. ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

92. Estudiar y hallar los elementos característicos de la transformación producto $S_\pi \circ H_{C,K}$, siendo, la ecuación del plano de simetría $\pi \equiv y - 1 = 0$, el centro $C(0, 1, 0)$ y la razón de la homotecia $k = -3$ ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

93. Hallar el centro de la homotecia producto de dos homotecias, cuando dicho producto no es una traslación. Demostrar que los tres centros están alineados.

Solución

94. Hallar las ecuaciones de una semejanza inversa, de razón $k = 4$, de centro el punto $C(1, 1, 1)$, de ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y cuyo eje de semejanza es la recta $e \equiv (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 1, 0)$.

Solución

95. Estudiar la transformación geométrica T, tal que los puntos A = (0, -1.5, 0.13), B = (0.5, -0.3, -1.3), C = (-0.3, 0.7, 0.9) y D = (0, 0.9, 0.15) se transforman en A’ = (-6, 7.5, 3.35), B’ = (-8.5, 1.5, 10.5), C’ = (-4.5, -3.5, -0.5), y D’ = (-6, -4.5, 3.25) respectivamente.

Solución

82. Sea T una transformación afín definida por sus ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= -2 + 2x \\ y' &= 2 + 2y \\ z' &= -2 + 2z \end{aligned}$$

a) Clasificar T y hallar sus elementos característicos.

b) Hallar los vértices y el área del triangulo transformado del triángulo de vértices: A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(2, 1, 2).

Solución

a)

1. **Determinar la matriz N =** $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline T(O) & M \end{array}\right)$**.**

Si al sistema de ecuaciones que define T le añadimos la ecuación trivial 1=1, este sistema en forma matricial se puede expresar

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow N\overline{X} = \overline{X}'$$

2. **Si $M = k \cdot I_3$** , con $k \neq 0, 1$, es decir, si M es una matriz escalar, la transformación es una homotecia afín de razón k.

La matriz M de la transformación ortogonal que define T puede escribirse de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

así pues, se trata de una **homotecia**.

Cálculo de los elementos característicos de la homotecia:

- **Razón de la homotecia:** es el número real k tal que $M = k \cdot I_3$.
- **Centro de homotecia:** es el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\ \overline{X} = 0$.

Es la solución del sistema:

$$(N-I)\overline{X}=0 \;\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases}.$$

Por tanto, T es una **homotecia directa** de **centro O(2, -2, 2) y razón 2.**

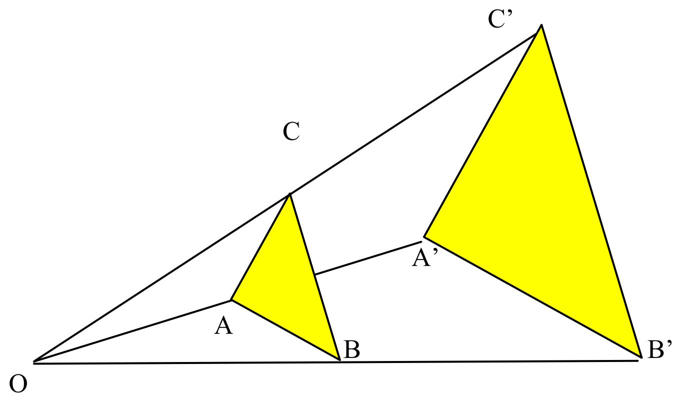
b) Los vértices A’ B’ C’ transformados de A, B y C son:

$$A'=NA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B'=NB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$C'=NC=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; A'(2,\ 2,\ \text{-}2),\ B'(2,\ 6,\ \text{-}2),\ C'(2,\ 4,\ 2).$$



Homotecia de centro O y razón 2

El área de un triángulo cualquiera ABC, se obtiene fácilmente con la fórmula

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|(4,0,0)\right|=2\ u^2,\ \ y\ \ S_{A'B'C'}=2^2S_{ABC}=2^2\cdot 2=8\ u^2$$

Inicio

83. Demostrar que la composición de una homotecia y una traslación es una homotecia.

Solución

Las matrices de las homotecias y de las traslaciones de orden 3 son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & k & 0 & 0 \\ b & 0 & k & 0 \\ c & 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ respectivamente}$$

La matriz del producto será, según el orden de composición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & k & 0 & 0 \\ b & 0 & k & 0 \\ c & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a+ka' & k & 0 & 0 \\ b+kb' & 0 & k & 0 \\ c+kc' & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

es una homotecia de razón k y de centro $C = \left(\frac{a+ka'}{1-k}, \frac{b+kb'}{1-k}, \frac{c+kc'}{1-k} \right)$

o bien:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & k & 0 & 0 \\ b & 0 & k & 0 \\ c & 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a'+a & k & 0 & 0 \\ b'+b & 0 & k & 0 \\ c'+c & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

es una homotecia de razón k y de centro $C = \left(\frac{a+a'}{1-k}, \frac{b+b'}{1-k}, \frac{c+c'}{1-k} \right)$

Vemos pues que la composición (en cualquier orden) es una homotecia de igual razón que la homotecia de partida, pero la composición no es conmutativa por tener distinto centro cada una de las homotecias resultantes, ya que, el trasformado del origen es distinto en cada caso.

Inicio

84. Clasificar y hallar los elementos característicos de la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = -3 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}z \\ y' = -2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = -1 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z \end{cases}$$

Solución

1. **Determinar la matriz N =** $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline T(O) & M \end{array}\right)$**.**

La matriz de la transformación geométrica es:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ -2 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

2. Si $M \cdot M^t = p \cdot I_n$, es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es $k = \sqrt{p}$ y la matriz $Q = \frac{1}{k} \cdot M$ es la matriz ortogonal asociada al movimiento.

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

por tanto, observamos que T no es un movimiento ($M \cdot M^t \neq I$).

Si $|M| = |kQ| > 0$, la semejanza es directa

$$|M| = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow k = \sqrt[3]{8} = 2$$

y por tanto, la transformación T es una **semejanza directa de razón k=2** y Q es la matriz de un giro.

Si hacemos $k = \sqrt{4} = 2$, la matriz M se puede expresar de la forma $M = k\,Q$.

$$M = kQ \Rightarrow Q = \frac{1}{k}M \;\Rightarrow\; Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza directa:

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^3 = \det(M)$, es decir, $k = \sqrt{|p|}$ tal que $M \cdot M^t = p \cdot I_3$.

Ya calculada **k=2.**

- **Centro de la semejanza:** el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\ \overline{X} = 0$.

Por ser el centro C un punto invariante de la semejanza, C es la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{4}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases};$$

luego, $C\left(3, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ **es el centro de semejanza.**

- **Eje de la semejanza:** el eje e pasa por el centro de la semejanza C y su vector director se obtiene resolviendo el sistema $Q\,X = X \iff (Q - I)\,X = 0$

El vector $\vec{e}$ del eje de semejanza, es una solución particular no nula, del sistema de ecuaciones lineales $(Q - I)X = 0$, es decir:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

este sistema de ecuaciones tiene por solución general, $x = 2z, \ \ y = z$, siendo $(2, \ 1, \ 1)$ una solución particular de dicho sistema.

Así pues, $(x,y,z) = \left(3, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) + (2, \ 1, \ 1)t$, es una ecuación del eje de semejanza.

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza Q=Traza}\left(\frac{1}{k}M\right) = \text{Traza}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \text{-sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

El ángulo α de la semejanza ha de verificar:

$$1 + 2\cos\alpha = \text{traza}(Q) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -1 \ \Rightarrow \ 1 + 2\cos\alpha = -1 \ \text{ y por tanto, } \ \alpha = \pi .$$

Inicio

85. Encontrar dos homotecias cuya composición sea una traslación.

Solución

Consideremos las matrices de dos homotecias:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & k & 0 & 0 \\ b & 0 & k & 0 \\ c & 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & k' & 0 & 0 \\ b' & 0 & k' & 0 \\ c' & 0 & 0 & k' \end{pmatrix}$$

la matriz de su composición será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & k & 0 & 0 \\ b & 0 & k & 0 \\ c & 0 & 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & k' & 0 & 0 \\ b' & 0 & k' & 0 \\ c' & 0 & 0 & k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a + ka' & kk' & 0 & 0 \\ b + kb' & 0 & kk' & 0 \\ c + kc' & 0 & 0 & kk' \end{pmatrix}$$

que corresponde a la matriz de una traslación de vector $(a+ka',\ b+kb',\ c+kc')$ si y sólo si $kk'=1$, luego debemos componer homotecias cuyas razones cumplan que k=1/k'.

Inicio

86. Clasificar la siguiente transformación del espacio obteniendo sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \\ \mathbf{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

Solución

Si $M\cdot M^t = p\cdot I_n$, es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es $k=\sqrt{p}$ y la matriz $Q=\frac{1}{k}\cdot M$ es la matriz ortogonal asociada al movimiento.

$$M\cdot M^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I$$

Si $|M| = |kQ| < 0$, la semejanza es inversa

Por ser, $|M| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -27 < 0$ y $Q = \frac{1}{\sqrt[3]{-27}}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ una matriz ortogonal, se trata de una **semejanza inversa de razón** $k=\left|\sqrt[3]{-27}\right|=3$.

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza inversa:

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^3 = -\det(M)$, es decir, $k=\sqrt{|p|}$ tal que $M\cdot M^t = p\cdot I_3$.

Ya calculada **k=3.**

- **Centro de semejanza:** es el punto doble obtenido al resolver $(N-I)\,\overline{X} = 0$.

El centro de esta semejanza es su único punto doble y por lo tanto, la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&-2&-2\\1&-2&2&-1\\3&-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-2&-2&-2\\1&-2&1&-1\\3&-2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-2x-2y-2z=0\\1-2x+y-z=0\\3-2x-y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=0\\z=-1\end{array}\right..$$

Luego el punto $C(1,\ 0,-1)$ es el **centro de semejanza.**

Por tratarse de una semejanza inversa de centro C y razón k=3, puede descomponerse en el producto de un giro, cuyo eje pasa por C, y una homotecia inversa de centro C y razón -3.

- **Eje de la semejanza:** el eje e pasa por el centro de la semejanza C y su vector director se obtiene resolviendo el sistema Q X = X $\Leftrightarrow$ (Q – I) X = 0

En este caso, $Q=\frac{1}{-k}M$, para que efectivamente Q corresponda a un giro.

Por lo tanto, el eje de giro es la recta que pasa por el punto $C(1,\ 0,-1)$ y tiene como vector dirección un vector invariante por Q.

Resolviendo el sistema:

$$(Q-I)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

se obtiene la solución general $\left\{\begin{array}{l}x=2z\\y=z\end{array}\right.$, y una solución particular $\vec{e}=(2,\,1,\,1)$.

Luego una ecuación del eje de semejanza es:

$$x=1+2t\,,\ y=t\,,\ z=-1+t\,.$$

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza } Q=\text{Traza}\left(\frac{1}{-k}M\right)=\text{Traza}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\text{sen}\,\alpha\\0&\text{sen}\,\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$$

El ángulo α de la semejanza ha de verificar:

$$1+2\cos\alpha = \text{traza}(Q) = \frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3} = -1 \Rightarrow \cos\alpha = -1 \text{ y por tanto, } \alpha = \pi.$$

Inicio

87. Hallar las ecuaciones de las homotecias que transforman, el pentágono regular P de centro O(-1, -1, -1) y lado 2 en el pentágono regular P' de centro O'(3, 3, 3) y lado 6.

Solución

Existe una homotecia directa y una homotecia inversa que transforma el pentágono P en el pentágono de centro P'.

Si el pentágono P, se transforma por una homotecia en el pentágono P', el centro $O(-1,-1,-1)$, se transforma en el centro $O'(3, 3, 3)$ y el lado $\ell = 2$ en el lado $\ell' = 6$. Por lo tanto, las razones de las posibles homotecias son $k = \pm\frac{\ell'}{\ell} = \pm 3$.

Si $k = 3$ se trata de una homotecia directa y si $k = -3$ de una homotecia inversa.

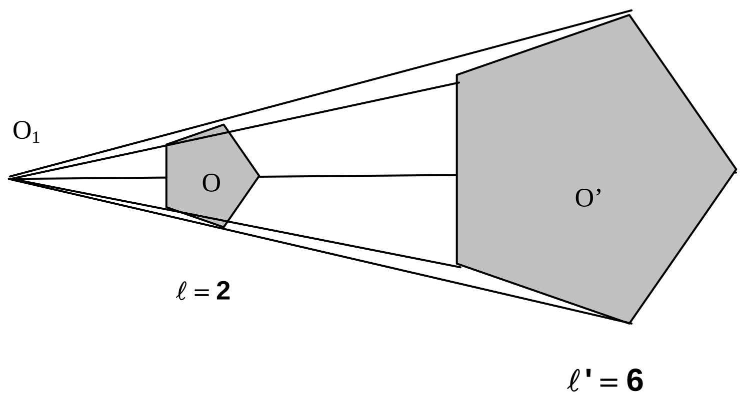
La ecuación general de las homotecias es:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&k&0&0\\b&0&k&0\\c&0&0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\(1-k)a&k&0&0\\(1-k)b&0&k&0\\(1-k)c&0&0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Cálculo de la homotecia directa, sustituimos $k = 3$ y las coordenadas de O y O'

$$\begin{pmatrix}1\\3\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2a&3&0&0\\-2b&0&3&0\\-2c&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \text{ resolviendo el sistema } \begin{cases}3=-2a-3\\3=-2b-3\\3=-2c-3\end{cases} \text{ nos queda} \Rightarrow (a,\ b,\ c) = (-3,\ -3\ -3)$$

luego, la homotecia de razón 3 y centro O_1(-3, -3, -3) transforma el pentágono P en el pentágono P'.

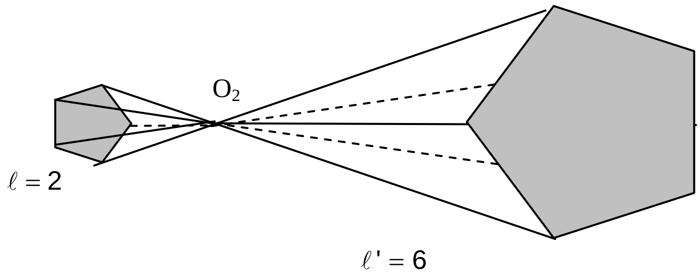


Homotecia de centro O_1 y razón k=3

Cálculo de la homotecia inversa $k=-3$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\4a&-3&0&0\\4b&0&-3&0\\4c&0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow (a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$$

luego, la homotecia de razón -3 y centro $O_2(0,\ 0,\ 0)$ transforma el pentágono P en el pentágono P'.



Inicio

Homotecia de centro O_2 y razón k= - 3

88. Estudiar si la siguiente ecuación corresponde a una semejanza del espacio. En caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\1&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\1&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Solución

Si $M\cdot M^t = p\cdot I_n$, es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es $k=\sqrt{p}$ y la matriz $Q=\frac{1}{k}M$ es la matriz ortogonal asociada al movimiento.

$$M\cdot M^t=\begin{pmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&0&0\\0&\frac{1}{9}&0\\0&0&\frac{1}{9}\end{pmatrix}=\frac{1}{9}I$$

Si $|M|=|kQ|>0$, la semejanza es directa

$|M|=\begin{vmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\neq\pm1$ no es un movimiento, tampoco una homotecia, ya que la matriz no es escalar, la ecuación del enunciado corresponde a la ecuación de una **semejanza directa de razón** $k=\left|\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right|=\frac{1}{3}$.

Calculamos la matriz $Q=\frac{1}{k}M=\frac{1}{\sqrt[3]{|M|}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}}\begin{pmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza directa:

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^3=\det(M)$, es decir, $k=\sqrt{p}$ tal que $M\cdot M^t=p\cdot I_3$.

Ya calculada **k=1/3.**

- **Centro de semejanza:** es el punto doble obtenido al resolver $(N-I)\overline{X}=0$.

El centro de esta semejanza es el único punto doble:

$$\overline{X}=N\overline{X}\Leftrightarrow(N-I)\overline{X}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\1&-\frac{2}{9}&-\frac{8}{9}&\frac{2}{9}\\1&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&-\frac{7}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases}0-\frac{7}{9}x+\frac{2}{9}y+\frac{1}{9}z=0\\1-\frac{2}{9}x-\frac{8}{9}y+\frac{2}{9}z=0\\1+\frac{1}{9}x-\frac{2}{9}y-\frac{7}{9}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{5}{4}\\z=1\end{cases}$

$$C\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\ 1\right).$$

- **Eje de la semejanza:** el eje e pasa por el centro de la semejanza C y su vector director se obtiene resolviendo el sistema Q X = X $\Leftrightarrow$ (Q – I) X = 0

La matriz ortogonal del giro que compone esta semejanza es la matriz $Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, obtenida anteriormente.

El eje de giro es la recta que pasa por C y tiene como vector dirección, un vector invariante por Q.

$$(Q-I)X=0\ \Rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=z\\ y=0\end{cases}$$

y una solución particular del sistema anterior es, $\vec{u}=(1,\,0,\,1)$.

Así pues, la ecuación del eje de giro en forma paramétricas es:

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\\ y=\frac{5}{4}\\ z=1+t\end{cases}$$

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza Q=Traza}\left(\frac{1}{k}M\right)=\text{Traza}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \text{-sen }\alpha\\ 0 & \text{sen }\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=1+2\cos\alpha$$

El ángulo α de la semejanza es solución de la ecuación:

$$1+2\cos\alpha=\text{traza}(Q)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\ \Rightarrow\ 1+2\cos\alpha=\frac{5}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{3}\ \text{ y por tanto, }\ \alpha=\pm\arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Inicio

89. Clasificar la transformación resultante de aplicar la semejanza del problema 85 por la semejanza del problema 87.

Solución

Sea T la semejanza del problema 85 de ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sea T’ la semejanza del problema 87 de ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La ecuación de la transformación producto $S = T' \circ T$ será:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y m ultiplicando las m atrices anterior es obtenem os la ecuació n m atricial del producto de las semejanzas dadas

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{-8}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{16}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{13}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Clasificación de transformación producto $S = T' \circ T$.

Por ser $|M| = \begin{vmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \end{vmatrix} = -1$, y M una matriz ortogonal, se trata de una simetría especular, deslizante o rotacional.

Estudiar el tipo de movimiento:

Estudiemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\overline{X} = N\overline{X} \Leftrightarrow (N-I)\overline{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{-8}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{16}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{13}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Por ser $\text{rg}(N-I) = \text{rg}(M-I) = 3$ se trata de un sistema compatible determinado y $S = T' \circ T$ es una **simetría rotacional.**

Inicio

90. Hallar la ecuación matricial, de la transformación resultante de componer, el giro de ángulo π y eje la recta (x,y,z)=(0,0,1)+t(0,1,1), seguido de la homotecia de centro C(0,0,1) y razón k=5.

Hallar los elementos característicos de la transformación producto. ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

Se trata de obtener las ecuaciones de la transformación $T = H_{C,k} \circ G_{r,\alpha}$.

La ecuación del $G_{r,\alpha}$ se obtuvo en el problema 67.

$$G_{r,\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La ecuación de la homotecia $H_{C(0,0,1),k=5}$ es:

$$H_{C(0,0,1),k=5} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix}.$$

Ambas ecuaciones pueden escribirse de la forma:

$$G_{r,\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$H_{C,K} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y la ecuación de la composición en el orden dado será:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

multiplicando las matrices de orden 4 anteriores, se obtiene la ecuación matricial de la transformación T

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ o bien, } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En este caso el **producto es conmutativo**, por ser el centro de la homotecia un punto del eje de giro.

T es la composición de una homotecia directa y un giro, además, el centro de la homotecia es un punto del eje de giro, por tanto, T es una semejanza directa, de razón 5, de centro $C(0, 0, 1)$ y cuyo eje y ángulo coincide con el eje de giro.

Inicio

91. Hallar las ecuaciones que definen la transformación resultante, de componer, una homotecia de centro $C(-1,0,1)$ y razón $k=-5$ seguida de una rotación de ángulo $\alpha=-\frac{\pi}{2}$ respecto del eje $e\equiv\begin{cases}x=0\\y=t\\z=2\end{cases}$.

Hallar los elementos característicos de la transformación producto. ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

Se trata de obtener las ecuaciones de la transformación $T=G_{e,\alpha}\circ H_{C,k}$.

La ecuación del $G_{e,\alpha}$ se obtuvo en el problema 73.

$$G_{e,\alpha}\longrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

La ecuación de la homotecia $H_{C(-1,0,1),k=-5}$ es:

$$H_{C(-1,0,1),k=-5}\longrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\y-0\\z-1\end{pmatrix}.$$

Ambas ecuaciones pueden escribirse de la forma

$$G_{r,\alpha}\longrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&0&0&1\\0&0&1&0\\2&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$H_{C,K}\longrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-6&-5&0&0\\0&0&-5&0\\4&0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

La ecuación de la composición en el orden dado será:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&0&0&1\\0&0&1&0\\2&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-6&-5&0&0\\0&0&-5&0\\4&0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

si multiplicamos las matrices anteriores se obtiene la ecuación matricial de la transformación T

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&0&0&-5\\0&0&-5&0\\8&5&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix},\text{ o bien, }\begin{cases}x'=2-5z\\y'=-5y\\z'=8+5x\end{cases}.$$

En este caso el producto no es conmutativo, ya que, el centro de la homotecia no es un punto del eje de giro.

T es la composición de una homotecia inversa y un giro, además, el centro de homotecia no es un punto del eje de giro, por tanto, T es una **semejanza inversa, de razón 5 y ángulo** $-\frac{\pi}{2}$**.**

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza inversa:

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que k^3 = - det(M), es decir, $k=\sqrt{|p|}$ tal que $M\cdot M^t=p\cdot I_3$.

Ya dada **k=5.**

- **Centro de semejanza:** es el punto doble obtenido al resolver (N – I) $\overline{X}$ = 0.

El centro de semejanza es el único punto doble, se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}x=2-5z\\y=-5y\\z=8+5x\end{cases}$$

por tanto, $C\left(-\frac{19}{13},\ 0,\ \frac{9}{13}\right)$.

- **Eje de la semejanza:** el eje e pasa por el centro de la semejanza C y su vector director se obtiene resolviendo el sistema Q X = X $\Leftrightarrow$ (Q – I) X = 0

En este caso, $Q=\frac{1}{-k}M$, para que efectivamente Q corresponda a un giro.

$$(Q-I)X=0\ \text{ siendo }\ Q=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}0&0&-5\\0&-5&0\\5&0&0\end{pmatrix}\ \text{ es:}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow (x,y,z)=(0,\ t,\ 0),$$

Luego una ecuación del eje de semejanza es $\begin{cases} x = -\dfrac{19}{13} \\ y = 0 + t \\ z = \dfrac{9}{13} \end{cases}$.

Inicio

92. Estudiar y hallar los elementos característicos de la transformación producto $S_\pi \circ H_{C,K}$, siendo, la ecuación del plano de simetría $\pi \equiv y - 1 = 0$, el centro $C(0, 1, 0)$ y la razón de la homotecia $k = -3$ ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

La ecuación de la homotecia $H_{C(0,1,0),k=-3}$ es:

$$H_{C(0,1,0),k=-3} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación del S_π se obtuvo en el problema 72.

$$S_\pi \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Se trata de obtener las ecuaciones de la transformación $T = S_\pi \circ H_{C,k}$.

Las ecuaciones de la homotecia y simetría, se pueden escribirse de la forma

$$H_{C,K} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$S_\pi \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y la ecuación de la composición en el orden dado será:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-3&0&0\\4&0&-3&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

multiplicando las matrices anteriores se obtiene la ecuación matricial de la transformación T

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-3&0&0\\-2&0&3&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix},\text{ o bien, }\begin{cases}x'=-3x\\y'=-2+3y\\z'=-3z\end{cases}.$$

En este caso el producto es conmutativo, ya que, el centro de la homotecia es un punto del plano de simetría.

T es la composición de una homotecia inversa y una simetría especular, por tanto, T es una **semejanza directa**, de razón 3, y centro $C(0,\ 1,\ 0)$.

- **Eje de la semejanza:** el eje e pasa por el centro de la semejanza C y su vector director se obtiene resolviendo el sistema $Q\,X = X \iff (Q-I)\,X = 0$

$$(Q-I)X=0 \text{ siendo } Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}.$$

La solución de $(Q-I)X=0$ es:

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow (x,y,z)=(0,\ t,0)$$

por tanto, una ecuación del eje de semejanza será

$$\begin{cases}x=0\\y=1+t\\z=0\end{cases}.$$

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza } Q=\text{Traza}\left(\frac{1}{k}M\right)=\text{Traza}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&\text{-sen }\alpha\\0&\text{sen }\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}=1+2\cos\alpha$$

Por ser la traza de la matriz Q (matriz del giro) un invariante

$-1+1-1=1+2\cos\alpha \Rightarrow \alpha = \arccos(-1)=180^\circ$, por tanto, $\alpha = 180^\circ$ es el ángulo de semejanza.

Inicio

93. Hallar el centro de la homotecia producto de dos homotecias, cuando dicho producto no es una traslación. Demostrar que los tres centros están alineados.

Solución

Sean T_0, T_1 dos homotecias de centros $C_0(a_0,b_0,c_0)$, $C_1(a_1,b_1,c_1)$ y razones k_0, k_1, respectivamente.

Las ecuaciones de estas homotecias son:

$$T_0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 \\ 0 & k_0 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a_0 \\ y-b_0 \\ z-c_0 \end{pmatrix}$$

y

$$T_1 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-b_1 \\ z-c_1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de estas homotecias son:

$$T_0 \quad \rightarrow \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0(1-k) & k_0 & 0 & 0 \\ b_0(1-k) & 0 & k_0 & 0 \\ c_0(1-k) & 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix}$$

$$T_1 \quad \rightarrow \quad N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1(1-k_1) & k_1 & 0 & 0 \\ b_1(1-k_1) & 0 & k_1 & 0 \\ c_1(1-k_1) & 0 & 0 & k_1 \end{pmatrix}$$

La composición $T = T_0 \circ T_1$ tendrá por matriz:

$$N = N_0 N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0(1-k_0)+k_0(1-k_1)a_1 & K_0k_1 & 0 & 0 \\ b_0(1-k_0)+k_0(1-k_1)b_1 & 0 & K_0k_1 & 0 \\ c_0(1-k_0)+k_0(1-k_1)c_1 & 0 & 0 & K_0k_1 \end{pmatrix}$$

Además $k = k_0 k_1 \neq 1$ para que T no sea una traslación. El centro de T es la solución del sistema $(N - I)\overline{X} = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} a_0(1-k_0)+k(1-k_1)a_1 + (k_0k_1-1)\,x = 0 \\ b_0(1-k_0)+k(1-k_1)b_1 + (k_0k_1-1)\,y = 0 \\ c_0(1-k_0)+k(1-k_1)c_1 + (k_0k_1-1)\,z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$C(x,y,z) = \left(\frac{a_0(1-k_0)+k_0(1-k_1)a_1}{1-k_0k_1}, \frac{b_0(1-k_0)+k_0(1-k_1)b_1}{1-k_0k_1}, \frac{c_0(1-k_0)+k_0(1-k_1)c_1}{1-k_0k_1}\right) =$$
$$= \frac{1-k_0}{1-k_0k_1}(a_0,b_0,c_0) + \frac{k_0(1-k_1)}{1-k_0k_1}(a_1,b_1,c_1)$$

por tanto:

$$C = \frac{1-k_0}{1-k_0k_1}C_0 + \frac{k_0(1-k_1)}{1-k_0k_1}C_1$$

Ahora debemos imponer la condición para que C, C_0 y C_1 estén alineados, es decir, para que los vectores $\overrightarrow{C_0C_1}$ y $\overrightarrow{C_0C}$ sean proporcionales. Lo más fácil es verificar que el producto vectorial de los vectores es el vector nulo.

$$\overrightarrow{C_0C_1} = (a_1 - a_0,\ b_1 - b_0,\ c_1 - c_0)$$

$$\overrightarrow{C_0C} = \left(\frac{(a_1-a_0)k_0(1-k_1)}{1-k_0k_1}, \frac{(b_1-b_0)k_0(1-k_1)}{1-k_0k_1}, \frac{(c_1-c_0)k_0(1-k_1)}{1-k_0k_1}\right) =$$

$$= \frac{k_0(1-k_1)}{1-k_0k_1}(a_1 - a_0,\ b_1 - b_0,\ c_1 - c_0)$$

la igualdad anterior nos permite concluir que los centros C, C_0 y C_1 están alineados.

La ecuación anterior es una interpolación lineal de los centros de las homotecias de partida, pues
$$\frac{1-k_0}{1-k_0k_1} + \frac{k_0(1-k_1)}{1-k_0k_1} = 1 .$$
Vemos así que el centro de T está alineado con los de T_0 y T_1.

Inicio

94. Hallar las ecuaciones de una semejanza inversa, de razón $k=4$, de centro el punto $C(1, 1, 1)$, de ángulo $\alpha=\frac{\pi}{2}$ y cuyo eje de semejanza es la recta $e\equiv(x,y,z)=(1, 1, 1)+t(1, 1, 0)$.

Solución

Una semejanza inversa es la composición de un giro y una homotecia inversa, así,

$$S(C,k,e,\alpha)=H(C,K)\circ G(e,\alpha) \text{ con } C\in e.$$

La ecuación matrici al del giro de eje $e\equiv(x,y,z)=(1, 1, 1)+t(1, 1, 0)$ y ángulo $\alpha=\frac{\pi}{2}$ fue obtenida en el problema 78 es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La ecuación de la homotecia, en forma matricial, de centro C y razón $k=-4$ es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La composición $T=T_0\circ T_1$ tendrá por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5-2\sqrt{2} & -2 & -2 & 2\sqrt{2} \\ 5+2\sqrt{2} & -2 & -2 & -2\sqrt{2} \\ 1 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Inicio

95. Estudiar la transformación geométrica T, tal que los puntos A = (0, -1.5, 0.13), B = (0.5, -0.3, -1.3), C = (-0.3, 0.7, 0.9) y D = (0, 0.9, 0.15) se transforman en A' = (-6, 7.5, 3.35), B' = (-8.5, 1.5, 10.5), C' = (-4.5, -3.5, -0.5), y D' = (-6, -4.5, 3.25) respectivamente.

Solución

Se cumple que: T(A)=A', T(B)=B', T(C)=C' y T(D)=D' y en forma matricial, escribiendo conjuntamente $N\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ para los cuatro puntos:

$$N\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0.5&-0.3&0\\-1.5&-0.3&0.7&0.9\\0.13&-1.3&0.9&0.15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-6&-8.5&-4.5&-6\\7.5&1.5&-3.5&-4.5\\3.35&10.5&-0.5&3.25\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-6&-8.5&-4.5&-6\\7.5&1.5&-3.5&-4.5\\3.35&10.5&-0.5&3.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0.5&-0.3&0\\-1.5&-0.3&0.7&0.9\\0.13&-1.3&0.9&0.15\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-6&-5&0&0\\0&0&-5&0\\4&0&0&-5\end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la transformación geométrica T, son:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-6&-5&0&0\\0&0&-5&0\\4&0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

La matriz asociada es $M=\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$ = -5 I.

Luego se trata de una **homotecia** inversa del espacio E_3.

Cálculo de los elementos característicos de la homotecia:

- **Razón de la homotecia:** es el número real k tal que $M = k\cdot I_3$.

La razón es $k=\sqrt[3]{-125}$ = **-5.**

- **Centro de homotecia:** es el punto doble obtenido al resolver (N – I) $\overline{X}$ = 0.

Es la solución del sistema:

$$(N-I)\overline{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Inicio