PROBLEMAS DE HOMOTECIAS Y SEMEJANZAS EN EL PLANO

Mediante marcadores puede escoger el tipo de problema.

21. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

22. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

Solución

23. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

24. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

25. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 15 & -6 & -8 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

26. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&0\\-3&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Solución

27.- Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\15&-6&-8\\-1&8&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Solución

28. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&3\\-1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Solución

29. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$$

Solución

30.-Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\15&-6&-8\\-1&8&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Solución

31. a) Hallar la ecuación de la homotecia directa de centro C(-1,-1) y razón $0<k<1$ que transforma la recta $r \equiv 3x + y = 4$ en la recta $r' \equiv 3x + y = 0$.

b) Razonar si hay, o no, una única homotecia de razón k=1/2 que transforma r en s.

Solución

32. Calcular los centros y las razones respectivas de la homotecia directa y de la homotecia inversa que transforman la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$.

Solución

33. Utilizando los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, hallar las tangentes comunes exteriores e interiores a las circunferencias dadas en dicho ejercicio.

Solución

34. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son homólogos por una homotecia inversa siendo A(0,-1), B(2,1), A'(-4,11) y B'(-10,5), se pide:

a) La ecuación de dicha homotecia.

b) La ecuación de la elipse homóloga a la de ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

Solución

35. Sea la homotecia H_1 de centro A(2,-2) y razón k=2/3 :

a) Hallar la ecuación de dicha homotecia y la de su recíproca $(H_1)^{-1}$.

b) Hallar el transformado P' del punto P(6,0) por H_1.

c) Hallar la ecuación de la homotecia de centro P' y razón r =3.

d) Estudiar si el producto de $H_{(P', r)} \circ H_{(A,k)}$ es una homotecia y en caso afirmativo calcular el centro y la razón.

Solución

36. El producto de dos homotecias no es siempre una homotecia. Para probarlo con un contraejemplo se propone el siguiente ejercicio:

a) Hallar la ecuación de homotecia de centro C(1,-1) y razón k = 3/5.

b) Hallar el transformado O' del origen por la homotecia anterior.

c) Hallar la ecuación de homotecia de centro O' y razón r = 5/3.

d) Hallar la ecuación del producto $H_{(O', r)} \circ H_{(C,k)}$

e) Estudiar qué tipo de transformación es la obtenida en el apartado anterior y dar sus elementos.

Solución

37. a) Hallar las coordenadas de los vértices del triángulo homólogo al de vértices A(0,0), B(2,0) C(3,2) por la semejanza resultante de aplicar un giro con centro B y ángulo de 135º con la homotecia de centro C y razón $k = 2\sqrt{2}$.

b) Hallar los elementos de la semejanza obtenida en a).

Solución

38. Dada la recta $m \equiv y = \frac{1}{2}x+1$ y el punto A(1,0), se pide:

a) Hallar la ecuación de la semejanza resultante de componer la simetría axial cuyo eje es la recta m con la homotecia de centro A y razón k = -5

b) Calcular los elementos de la semejanza anterior indicando si se trata de una semejanza directa o inversa.

Solución

39. Dadas las rectas $m \equiv y = (1/2)x-1$ y $m' \equiv y = 2x+2$ y el punto P(0,-1), se pide:

a) Hallar la ecuación de la semejanza resultante de componer la simetría axial que transforma la recta m en la recta m' con la homotecia de centro P y razón k = 2

b) Calcular los elementos de la semejanza anterior indicando si se trata de una semejanza directa o inversa.

Solución

40. a) Hallar la ecuación de la semejanza directa que transforma los puntos P(0,1) y Q(1,2) en P'(15,-2) y Q'(1,-4) respectivamente.

b) Hallar la descomposición canónica de dicha semejanza.

Solución

41. a) Hallar la ecuación de la semejanza inversa que transforma los puntos P(0,0) y Q(0, $\sqrt{3}$) en P'(2,- $\sqrt{3}$) y Q'(5,0) respectivamente.

b) Hallar la descomposición canónica de la semejanza obtenida en a).

Solución

21. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

Aplicamos el procedimiento para su clasificación. La matriz M asociada a una homotecia del plano euclídeo es escalar, es decir, de la forma:

$$M = kI_2 = k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \text{ con } k \in \mathbf{R}\text{-}\{0,1\}$$

pero en esta transformación la matriz M asociada es $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 2\, I_2$.

Luego la ecuación dada **no** corresponde a una homotecia del plano.

Inicio

22. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

Solución

Primer método:

Si se llama C al punto (2,2) se puede observar que la ecuación matricial dada es una ecuación vectorial de la forma $\overrightarrow{CX'} = 2\overrightarrow{CX}$ que corresponde a una **homotecia directa** de **centro C(2,2)** y razón **k=2**.

Segundo método:

Se desarrolla la ecuación dada para ver claramente cuáles son las matrices N y M asociadas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Aplicamos el procedimiento de la página 15. La matriz M asociada a una homotecia del plano euclídeo es escalar, es decir, de la forma:

$M = kI_2 = k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbf{R}-\{0,1\}$

La matriz M asociada es $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\,I_2$.

Luego la ecuación dada corresponde a una **homotecia directa** del plano de razón **k=2**.
El centro es el único punto doble, por tanto haciendo x'= x, y' =y en la ecuación dada queda:

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$$

Luego el **centro** es el punto **C(2,2).**

Inicio

23. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

Se desarrolla la ecuación dada para ver claramente cuáles son las matrices N y M asociadas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

La matriz asociada es $M = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3I_2$ luego la ecuación dada corresponde a una **homotecia inversa** del plano de razón **k = -3**.
El centro es el único punto doble, en consecuencia, lo calculamos haciendo x'= x, y'= y en la ecuación dada:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Por tanto el **centro** de la homotecia es el punto **C(1/4,1/4).**

Inicio

24. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x-1} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

Solución

Se desarrolla la ecuación dada:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como se ve la matriz asociada $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ no es escalar, es decir, no existe $k \in \mathbf{R}-\{0,1\}$ tal que $M=kI_2$,

Luego la ecuación dada **no** corresponde a una homotecia del plano.

Inicio

25. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{15} & \mathbf{-6} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz $M=\begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ asociada a la transformación geométrica correspondiente a la ecuación dada no es escalar es decir, no existe $k \in \mathbf{R}-\{0,1\}$ tal que $M=kI_2$,

Luego la ecuación dada **no** corresponde a una homotecia del plano.

Inicio

26. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ asociada a la transformación no es una matriz escalar y por tanto la ecuación no corresponde a una homotecia.

Se halla entonces el producto MM^t teniendo en cuenta que:

- Si $MM^t=I_2$, la matriz M sería ortogonal y la ecuación corresponde a un movimiento del plano (que puede considerarse como una semejanza de razón k=1).
- Si $MM^t= pI_2$, es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es $k=\sqrt{p}$ y $Q=\frac{1}{k}M$ es la matriz ortogonal asociada al movimiento (de la descomposición canónica de la semejanza).
- Si $MM^t \neq pI_2 \ \forall p \in \mathbf{R}$, entonces la ecuación no corresponde a ningún tipo de movimiento, homotecia o semejanza en general.

En este caso, $MM^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2$, luego M es la matriz asociada a una **semejanza** de razón **k** $= \sqrt{4} =$ **2** que se designa por S.

Si $|M| = |kQ| < 0$, la semejanza es inversa (el movimiento es una simetría axial)

Además $|M| = -4<0$, luego se trata de una **semejanza inversa**.

En consecuencia $S = S_e \circ H_{(C,2)} = H_{(C,2)} \circ S_e$, siendo $C \in e$ el centro de la semejanza (único punto doble).

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza inversa:

- **Centro de la semejanza:** el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\ \overline{X} = O$

Para calcular C se resuelve la ecuación $N\ \overline{X} = \overline{X} \Leftrightarrow (N - I)\ \overline{X} = O$, siendo $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 3 & 2-1 & 0 \\ -3 & 0 & -2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3+x=0 \\ -3-3y=0 \end{cases}$$, luego el **centro** es el punto **C(-3,-1)**

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^2 = -\det(M)$, es decir, $k = \sqrt{|p|}$ tal que $M \cdot M^t = p \cdot I_2$.

$k = \sqrt{4} = 2$ es la razón de la semejanza inversa.

- **Eje de la semejanza:** es la recta que pasa por el centro C y su dirección es la solución de la ecuación: $Q \cdot X = X \Leftrightarrow (Q - I)X = 0$

Por último el eje e es la recta que pasa por C y su dirección es el conjunto de vectores invariantes que constituyen la solución de la ecuación QX=X⇒(Q-I)X=O⇔(1/kM-I)X=O:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0,$$

luego e es la paralela al eje de abscisas por C⇒ **e ≡ y = -1**

Resumiendo, la ecuación dada corresponde a una semejanza inversa del plano de razón k = 2, centro C(-3,-1) y eje e ≡ y = -1.

Inicio

27.- Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{15} & \mathbf{-6} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz N= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 15 & -6 & -8 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ de la ecuación no corresponde a ninguna transformación del plano

pues debería ser de la forma N= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & A & B \\ F & C & D \end{pmatrix}$, luego en particular **no** corresponde a una semejanza.

Inicio

28. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ asociada a la transformación no es una matriz escalar y por tanto la ecuación no corresponde a una homotecia.

Siguiendo un proceso análogo al establecido en el problema nº 26 hallamos el producto MM^t.

$MM^t = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} \neq p\, I_2\ \forall p \in \mathbf{R}$, luego la ecuación dada **no** corresponde ni a un movimiento ni homotecia ni semejanza del plano euclídeo.

Inicio

29. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

Se desarrolla la ecuación dada:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como se ve la matriz asociada $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ no es escalar luego la ecuación dada no corresponde a una homotecia.

Siguiendo el proceso establecido en el problema nº 26 se halla el producto MM^t.

$MM^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \neq p\, I_2\ \forall p \in \mathbf{R}$, luego la ecuación dada **no** corresponde ni a un movimiento ni homotecia ni semejanza del plano euclídeo.

Inicio

30.-Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\15&-6&-8\\-1&8&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Solución

La matriz $M=\begin{pmatrix}-6&-8\\8&-6\end{pmatrix}$ asociada a la transformación no es una matriz escalar y por tanto la ecuación no corresponde a una homotecia.

Siguiendo el procedimiento establecido previamente se halla el producto MM^t:

$MM^t=\begin{pmatrix}100&0\\0&100\end{pmatrix}=100\,I_2$, luego M es la matriz asociada a una **semejanza** de razón.

k $=\sqrt{100}=$ **10** que designamos por S.

Si $|M|=|kQ|>0$, la semejanza es directa (el movimiento es un giro)

Además $|M|=100>0$, luego se trata de una **semejanza directa**.

En consecuencia $S=G_{(C,\alpha)}\circ H_{(C,2)}=H_{(C,2)}\circ G_{(C,\alpha)}$, siendo C el centro de la semejanza (único punto doble).

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza directa:

- **Centro de la semejanza:** el punto doble obtenido al resolver $(N-I)\,\overline{X}=0$.

Para calcular C resolvemos la ecuación $N\,\overline{X}=\overline{X}\Leftrightarrow(N-I)\,\overline{X}=O$, siendo $N=\begin{pmatrix}1&0&0\\15&-6&-8\\-1&8&-6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\text{-}1&0&0\\15&-6\text{-}1&-8\\-1&8&-6\text{-}1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}15-7x-8y=0\\-1+8x-7y=0\end{cases}$$
, luego el **centro** es el punto **C(1,1).**

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^2=\det(M)$, es decir, $k=\sqrt{|p|}$ tal que $M\cdot M^t=p\cdot I_2$.

k $=\sqrt{100}=$ **10**

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula haciendo:

$$M=kQ=\begin{pmatrix}k\cos\alpha&-k\,\text{sen}\,\alpha\\k\,\text{sen}\,\alpha&k\cos\alpha\end{pmatrix},\text{ o bien, }Q=\frac{1}{k}M=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\text{sen}\,\alpha\\\text{sen}\,\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$$

El ángulo α es el que verifica que:

$$\begin{cases} 10\ \cos\alpha = -6 \\ 10\ \text{sen}\alpha = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-6}{10} = -\dfrac{3}{5} \\ \text{sen}\alpha = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Resumiendo, la ecuación dada corresponde a una semejanza directa del plano de razón k = 10, centro C(1,1) y ángulo α definido por su seno y coseno calculados.

Inicio

31. a) Hallar la ecuación de la homotecia directa de centro C(-1,-1) y razón 0<k<1 que transforma la recta r ≡ 3x + y = 4 en la recta r' ≡ 3x + y = 0.

b) Razonar si hay, o no, una única homotecia de razón k=1/2 que transforma r en s.

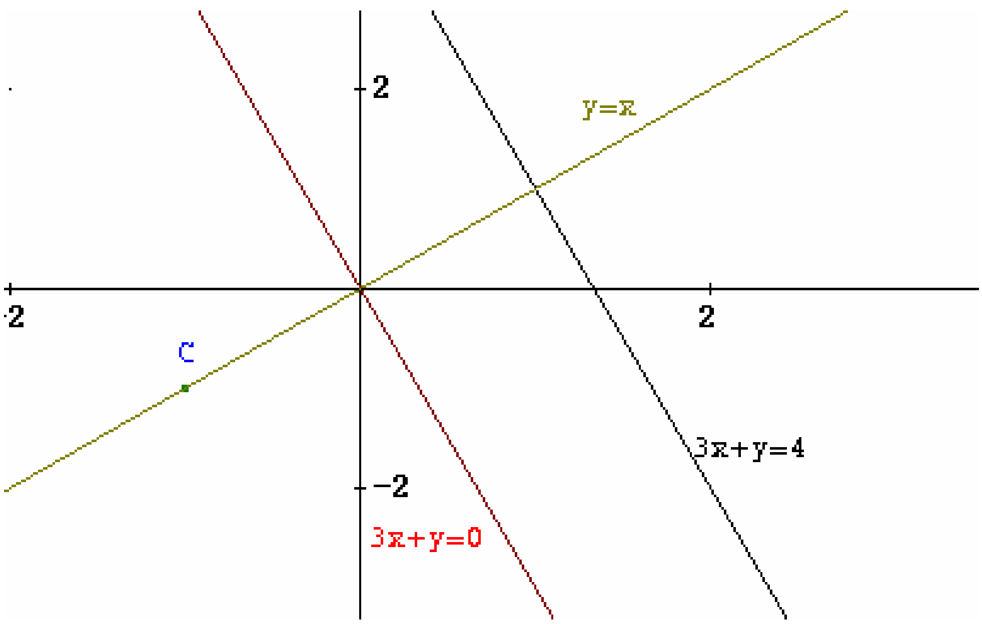
Solución

a)

Dado que conocemos el centro C de la homotecia se trata de calcular la razón.
Para calcularla bastaría conocer 2 puntos homólogos P y P' pues debe cumplirse que

$$\vec{CP'} = k\,\vec{CP}.$$

Ahora bien, se sabe que dos puntos homólogos por una homotecia están alineados con el centro de la homotecia, luego si se considera un punto cualquiera de una de las rectas, por ejemplo el origen O(0,0)∈r' su homólogo X es la intersección con r del recta determinada por los puntos O y C .



La ecuación de la recta determinada por O y C es y = x, su intersección con 3x + y = 4 es el punto X(1,1), luego en nuestro caso P≡X(1,1) se transforma en P'≡O(0,0) y

$$\vec{CP'} = k\,\vec{CP} \Leftrightarrow (1,1) = k(2,2) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ 1 = 2k \end{cases} \Rightarrow \mathbf{k = ½.}$$

La ecuación matricial de la homotecia de centro C y razón ½ es:

$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

b)

Comprobación de que todo punto A(a,b) que pertenezca a la recta t que pasa por C(1,1) y es paralela a r y s verifica que $H_{(A,1/2)}$(r) = r'.

La ecuación de t es 3x + y = -4 ⇒ y = -4 – 3x, luego todo punto A de dicha recta es de la forma A(a,-4-3a).

La ecuación de la homotecia de centro A y razón k=1/2 es $\begin{pmatrix} x'-a \\ y'+4+3a \end{pmatrix} = 1/2\begin{pmatrix} x-a \\ y+4+3a \end{pmatrix}$.

Se calcula la transformada de la recta r por esta homotecia.

Para ello se despeja x e y en la ecuación y se sustituye en la ecuación de r ≡ 3x + y = 4.

Al despejar x e y se obtiene $\begin{cases} x = 2x'-a \\ y = 2y'+4+3a \end{cases}$ y sustituyendo en r:

3(2x' –a) + 2y'+ 4+3a = 4⇒ 6x'+2y'= 0⇒ 3x'+y'= 0 que es la ecuación de r' como queríamos probar.

Por tanto hay **infinitas** homotecias de razón ½ que transforman r en r' pero todas ellas deben tener como centro un punto de la recta 3x + y = -4

Inicio

32. Calcular los centros y las razones respectivas de la homotecia directa y de la homotecia inversa que transforman la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en la circunferencia $x^2 + y^2 – 6x - 2y + 6 = 0$.

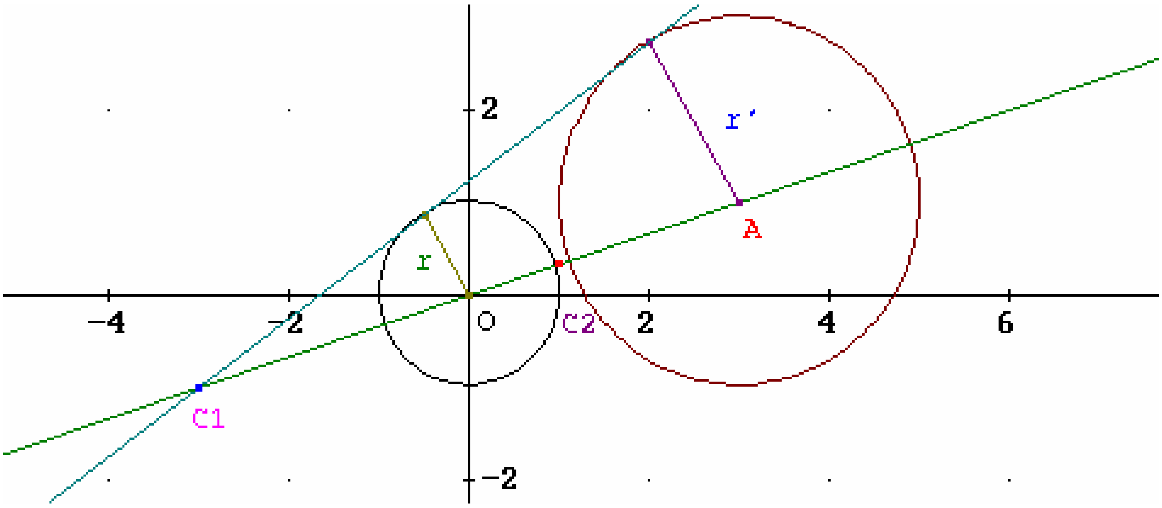
Solución

La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ tiene por centro O(0,0) y radio r = 1.

La circunferencia $x^2 + y^2 – 6x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2= 4$ tiene por centro A(3,1) y radio r' = 2.

Las propiedades de las homotecias nos dicen que hay una homotecia directa y otra inversa que transforman la primera circunferencia en la segunda y que verifican:

- que los centros de ambas circunferencias y homotecias están alineados
- que el centro de la primera circunferencia se transforma en el de la segunda
- que las razones de las homotecias son respectivamente r'/r y –r'/r, como se observa en la figura.



Se designa por C_1 y k_1 el centro y la razón de la homotecia directa y por C_2 y r_2 el centro y la razón de la homotecia inversa.

C_1 verifica que $\overrightarrow{C_1A} = \frac{r'}{r}\overrightarrow{C_1O} \Leftrightarrow$ (x-3,y-1) = 2(x-0,y-0)$\Rightarrow \begin{cases} x-3=2x \\ y-1=2y \end{cases} \Rightarrow C_1(-3,-1)$.

Luego la homotecia directa pedida tiene por **centro C_1(-3,-1)** y razón **k_1=2.**

C_2 verifica que $\overrightarrow{C_1A} = -\frac{r'}{r}\overrightarrow{C_1O} \Leftrightarrow$ (x-3,y-1) = -2(x-0,y-0)$\Rightarrow \begin{cases} x-3=-2x \\ y-1=-2y \end{cases} \Rightarrow C_2(1,1/3)$.

Luego la homotecia inversa pedida tiene por **centro C_2(1,1/3)** y razón **k_2=-2.**

Inicio

33. Utilizando los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, hallar las tangentes comunes exteriores e interiores a las circunferencias dadas en dicho ejercicio.

Solución

<u>Cálculo de las tangentes exteriores comunes:</u>

Las tangentes exteriores comunes a las circunferencias dadas son las tangentes a ambas circunferencias que pasan por el centro C_1 de la homotecia directa obtenida.

Se las designa por T_1 y T_2.

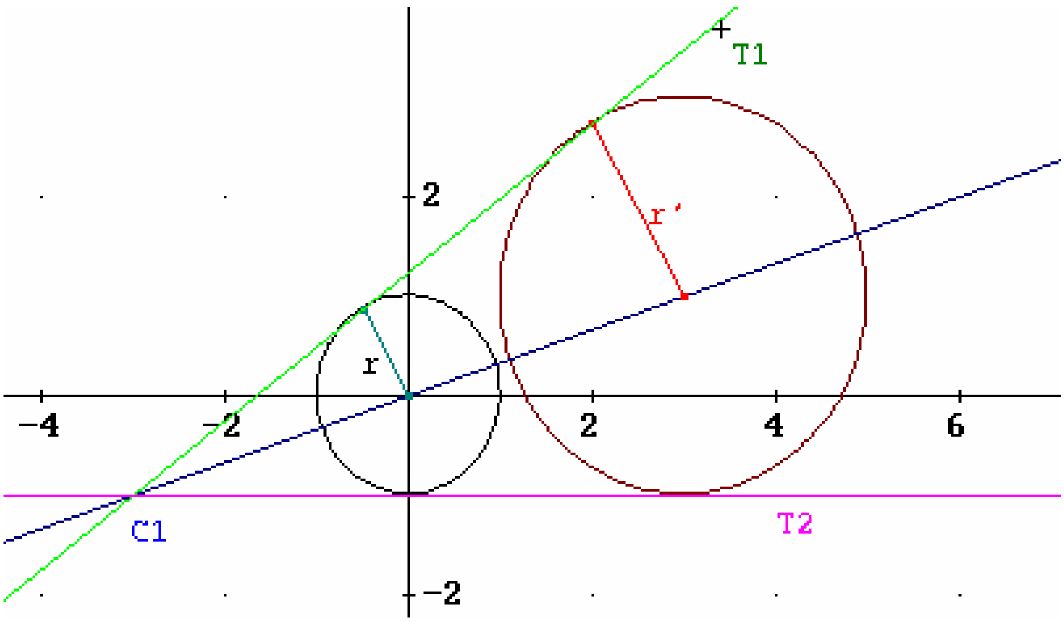
Para hallar sus ecuaciones se impone la condición de que su distancia a O(0,0) es r =1.

Las tangentes exteriores forman parte del haz de rectas que pasan por C_1.

El haz de rectas por C_1 tiene de ecuación $y+1= m(x+3) \Leftrightarrow mx-y + 3m-1 = 0$, luego:

$d(T_1,O)=1\Leftrightarrow \dfrac{|m0-0+3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1\Leftrightarrow |3m-1|=\sqrt{m^2+1}$, elevando al cuadrado y despejando m se obtiene m= ¾ y m=0,luego las ecuaciones de las tangentes exteriores son:

$T_1 \equiv y+1= \frac{3}{4}(x+3)$; $T_2 \equiv y+1= 0$



<u>Cálculo de las tangentes interiores comunes:</u>

Las tangentes interiores comunes a las circunferencias dadas son las tangentes a ambas circunferencias que pasan por el centro C_2 de la homotecia inversa obtenida.

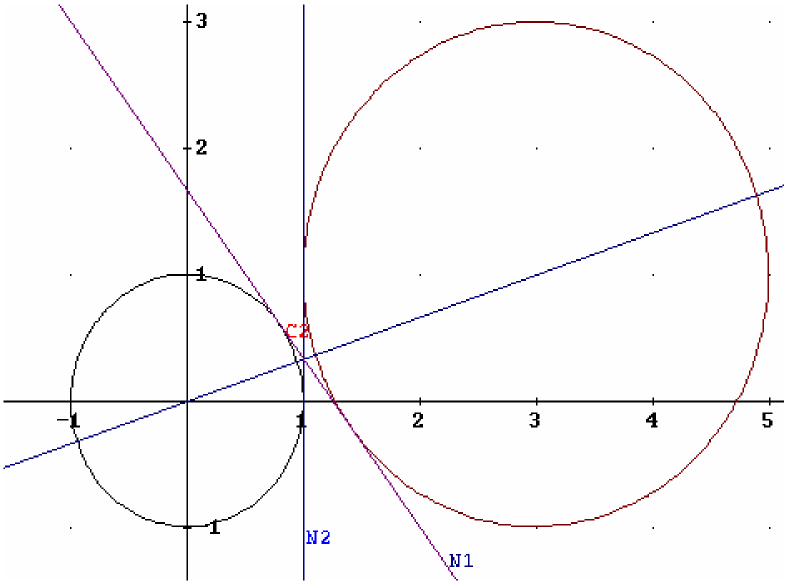
Las designaremos por N_1 y N_2.

Para hallar sus ecuaciones se impone la condición de que su distancia a O(0,0) es r =1.

Las tangentes exteriores forman parte del haz de rectas que pasan por C_2.
El haz de rectas por C_2 tiene de ecuación $y-1/3= m(x-1) \Leftrightarrow mx-y-m+1/3 = 0$, luego:

$d(N_1,O)=1\Leftrightarrow \dfrac{|m0-0-m+1/3|}{\sqrt{m^2+1}}=1\Leftrightarrow |-m+1/3|=\sqrt{m^2+1}$, elevando al cuadrado y despejando se obtiene sólo una solución m= -4/3 pero es conocido que sólo hay una tangente común en el caso de que las circunferencias sean tangentes, lo cual no ocurre en este caso, por tanto la otra tangente ha de ser la recta vertical ($m=\infty$) por C_2 (como se aprecia claramente en la figura) ,luego las ecuaciones de las tangentes interiores son:

$N_1 \equiv y + 1/3 = -4/3(x-1)$; $N_2 \equiv x = 1$



Inicio

34. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son homólogos por una homotecia inversa siendo A(0,-1), B(2,1), A'(-4,11) y B'(-10,5), se pide:

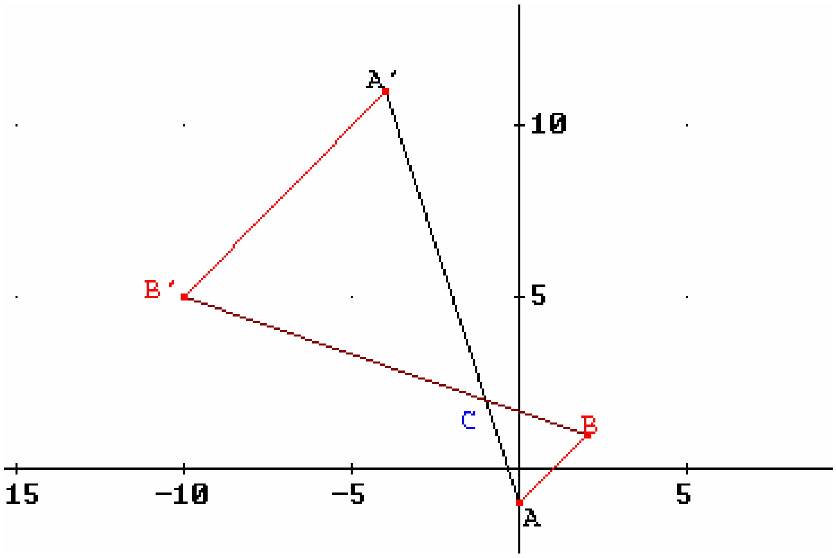
a) La ecuación de dicha homotecia.

b) La ecuación de la elipse homóloga a la de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Solución

a)

Primer método: La homotecia inversa que transforma $\overline{AB}$ en $\overline{A'B'}$ tiene por centro el punto de intersección de dichos segmentos y por razón $k = -\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|}$ (ver figura)



La recta AA' tiene por ecuación y + 1= -3x .

La recta BB' tiene por ecuación y-1 = -1/3(x-2).

La intersección de ambas rectas es el punto C(-1,2).

Por otro lado, $\left|\overline{A'B'}\right| = |(6,-6)| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ y $\left|\overline{AB}\right| = |(2,2)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Luego la homotecia pedida tiene por **centro** el punto **C(-1,2)** y razón **k**= $-\dfrac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ = **-3**.

Su ecuación es:

$$\begin{pmatrix} x'+1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Segundo método: Designando por C(a,b) al centro y por k la razón se verifica que

$$\begin{cases} \overrightarrow{CA'} = k\,\overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{CB'} = k\,\overrightarrow{CB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-4-a, 11-b) = k(0-a, -1-b) \\ (-10-a, 5-b) = k(2-a, 1-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4-a = -ka \\ 11-b = -k-kb \\ -10-a = 2k-ka \\ 5-b = k-kb \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene: a = -1, b = 2, k =-3

Luego la homotecia pedida tiene por **centro** el punto **C(-1,2)** y razón **k = -3**, resultado coincidente con el primer método. La ecuación es la obtenida anteriormente.

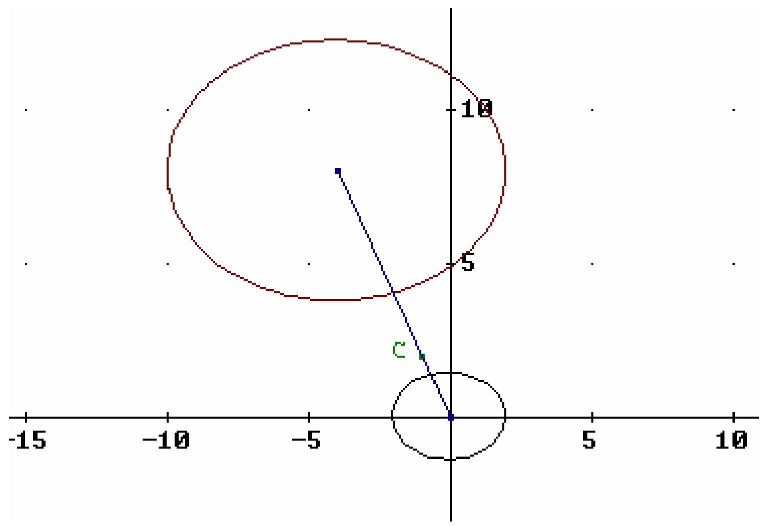
b)

Para hallar la transformada de una curva plana se despeja x e y en una de las ecuaciones matriciales y se sustituyen en dicha curva las expresiones obtenidas.

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&-3&0\\8&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4/3&-1/3&0\\8/3&0&-1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x'\\y=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}y'\end{cases}$$

sustituyendo en $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ se obtiene $\frac{(-4/3-1/3x')^2}{4}+\frac{(8/3-1/3y')^2}{2}=1$, simplificando y haciendo x'=x e y'=y, se obtiene que la ecuación de la elipse transformada es:

$$\mathbf{\frac{(x+4)^2}{36}+\frac{(y-8)^2}{18}=1}$$



Inicio

35. Sea la homotecia H_1 de centro A(2,-2) y razón k=2/3 :

a) Hallar la ecuación de dicha homotecia y la de su recíproca $(H_1)^{-1}$.

b) Hallar el transformado P' del punto P(6,0) por H_1.

c) Hallar la ecuación de la homotecia de centro P' y razón r =3.

d) Estudiar si el producto de $H_{(P',\ r)}\circ H_{(A,k)}$ es una homotecia y en caso afirmativo calcular el centro y la razón.

Solución

a)

La ecuación de H_1 es:

$$\begin{pmatrix}x'-2\\y'+2\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}x-2\\y+2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\-\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

La ecuación de $(H_1)^{-1}$ se obtiene despejando:

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\-\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&\frac{3}{2}&0\\1&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}$$

b)

El transformado del punto P(6,0) por H_1 es el punto **P'(14/3,-2/3)** pues:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\-\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{14}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

c)

La ecuación de la homotecia $H_{(p',3)}$ es:

$$\begin{pmatrix}x'-\frac{14}{3}\\y'+\frac{2}{3}\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x-\frac{14}{3}\\y+\frac{2}{3}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{28}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\text{-}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{28}{3}&3&0\\\frac{4}{3}&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

d)

El producto $H_{(P',r)}\circ H_{(A,k)}$ tiene como ecuación

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{28}{3}&3&0\\\frac{4}{3}&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\-\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{22}{3}&2&0\\-\frac{2}{3}&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

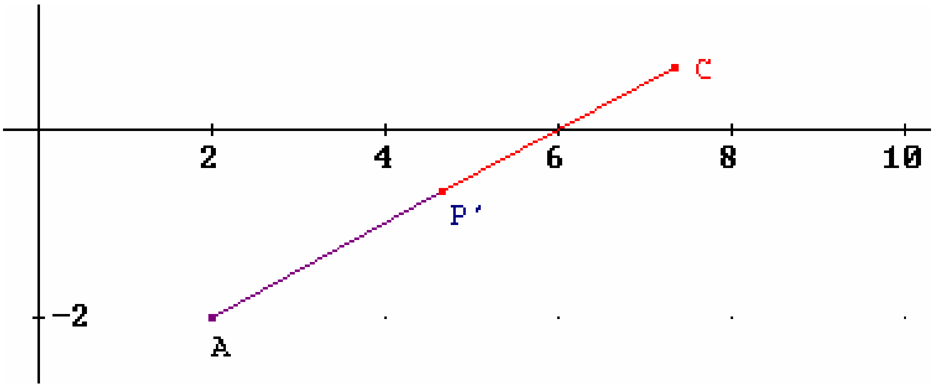
Como se ve su matriz asociada es M= $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ $=2I_2$, luego se trata de una **homotecia directa** de **razón 2**= r·p=2/3·3.

El centro es el punto doble, que se calcula resolviendo la ecuación $N\,\overline{X}=\overline{X}\Leftrightarrow(N-I)\,\overline{X}=O\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}1-1&0&0\\-\frac{22}{3}&2-1&0\\-\frac{2}{3}&0&2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{22}{3}+x=0\\-\frac{2}{3}+y=0\end{cases}$$

, luego el centro es el punto **C(22/3,2/3)**

Es decir, el producto $H_{(P', r)} \circ H_{(A,k)}$ es otra homotecia de centro **C(22/3,2/3)** y **razón 2.**
(El centro está alineado con los centros de dichas homotecias y la razón es el producto de las razones).



Inicio

36. El producto de dos homotecias no es siempre una homotecia. Para probarlo con un contraejemplo se propone el siguiente ejercicio:

a) Hallar la ecuación de homotecia de centro C(1,-1) y razón k = 3/5.

b) Hallar el transformado O' del origen por la homotecia anterior.

c) Hallar la ecuación de homotecia de centro O' y razón r = 5/3.

d) Hallar la ecuación del producto $H_{(O', r)} \circ H_{(C,k)}$

e) Estudiar qué tipo de transformación es la obtenida en el apartado anterior y dar sus elementos.

Solución

a)
La ecuación de $H_{(C,3/5)}$ es:

$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'+1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{-2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

b)
El transformado del origen O(0,0) por $H_{(C,3/5)}$ es el punto **O'(2/5,-2/5)** pues:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{5}&\frac{3}{5}&0\\ -\frac{2}{5}&0&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{2}{5}\\ -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

c)

La ecuación de la homotecia $H_{(O',5/3)}$ es:

$$\begin{pmatrix}x'-\frac{2}{5}\\ y'+\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}x-\frac{2}{3}\\ y+\frac{2}{5}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{15}\\ \frac{4}{15}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&0\\0&\frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\text{-}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ -\frac{4}{15}&\frac{5}{3}&0\\ \frac{4}{15}&0&\frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

d)

El producto $H_{(O',\,r)}\circ H_{(C,k)}$ tiene como ecuación

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ -\frac{4}{15}&\frac{5}{3}&0\\ \frac{4}{15}&0&\frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{5}&\frac{3}{5}&0\\ -\frac{2}{5}&0&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{5}&1&0\\ -\frac{2}{5}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

e)

Como vemos la matriz asociada a $H_{(O',\,r)}\circ H_{(C,k)}$ es $M=I_2$ (ya que $r\cdot k=1$), y $N\neq I_3$, luego la ecuación de $H_{(O',\,r)}\circ H_{(C,k)}$ corresponde a una **traslación de vector** $\vec{\mathbf{u}}=\left(\frac{2}{5},-\frac{2}{5}\right)$

Inicio

37. a) Hallar las coordenadas de los vértices del triángulo homólogo al de vértices A(0,0), B(2,0) C(3,2) por la semejanza resultante de aplicar un giro con centro B y ángulo de 135º con la homotecia de centro C y razón k = $2\sqrt{2}$.

b) Hallar los elementos de la semejanza obtenida en a).

Solución

a)

Para hallar los vértices del triángulo semejante (homólogo) al dado debemos calcular las ecuaciones de la semejanza, por ello vamos a hallar previamente las ecuaciones del giro y de la homotecia.

Ecuaciones de $G_{(B,135º)} = G_{(B,3\pi/4)}$:

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}+2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de $H_{(C,2\sqrt{2})}$:

$$\begin{pmatrix} x'-3 \\ y'-2 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6\sqrt{2} \\ 2-4\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3-6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2-4\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de la semejanza resultante de la composición $H_{(C,2\sqrt{2})} \circ G_{(B,3\pi/4)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3-6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2-4\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}+2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7-2\sqrt{2} & -2 & -2 \\ -4\sqrt{2}-2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Los puntos homólogos de los vértices del triángulo dado son:

El homólogo del origen A(0,0) es A'(7-2$\sqrt{2}$,v-4$\sqrt{2}$ -2) pues

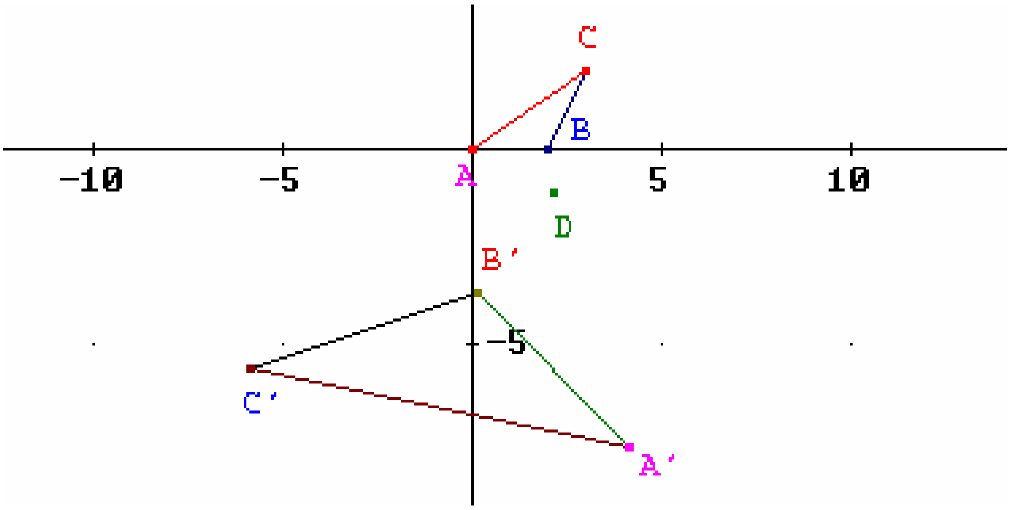
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7-2\sqrt{2} & -2 & -2 \\ -4\sqrt{2}-2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7-2\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$$

El homólogo del vértice B(2,0) es B'(3-2$\sqrt{2}$, 2-4$\sqrt{2}$) pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7-2\sqrt{2} & -2 & -2 \\ -4\sqrt{2}-2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-2\sqrt{2} \\ 2-4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

El homólogo del vértice C(3,2) es C'(-2$\sqrt{2}$ -3, -4$\sqrt{2}$) pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7-2\sqrt{2} & -2 & -2 \\ -4\sqrt{2}-2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2}-3 \\ -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



b)

La semejanza anterior es **directa** pues $|M|=8>0$.

Designando por D su centro y por r su razón, se verifica que $S_{(D;\,r)}=G_{(D;\alpha)}\circ H_{(D,r)}=H_{(D,r)}\circ G_{(D;\alpha)}$, donde:

La razón **k** es la de la homotecia k= $\mathbf{2\sqrt{2}}$ **.**

El **centro** es el único punto doble y se obtiene resolviendo la ecuación

$$N\,\overline{X} = \overline{X} \Leftrightarrow (N-I)\,\overline{X} = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7-2\sqrt{2} & -3 & -2 \\ -4\sqrt{2}-2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, obteniéndose

$$\mathbf{D}\left(\frac{2\sqrt{2}+25}{13}, \frac{8-16\sqrt{2}}{13}\right)$$

El **ángulo** α es el que verifica que

$$\begin{cases} k\cos\alpha = -2 \\ k\,\mathrm{sen}\alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \mathrm{sen}\alpha = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \ \alpha = 3\pi/4$$

Inicio

38. Dada la recta $m \equiv y = \frac{1}{2}x+1$ y el punto A(1,0), se pide:

a) Hallar la ecuación de la semejanza resultante de componer la simetría axial cuyo eje es la recta m con la homotecia de centro A y razón k = -5

b) Calcular los elementos de la semejanza anterior indicando si se trata de una semejanza directa o inversa.

Solución

a)

Se hallan las ecuaciones de la semejanza axial y de la homotecia dada.

Ecuación de la simetría axial S_e:

Es de la forma X'= A+M $\vec{AX}$, donde A es un punto invariante (cualquiera del eje) y $M=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$ donde α es un ángulo que mide el doble que el que forma el eje con el eje de abscisas.

Por ejemplo, el punto A(0,1)∈m, y por definición de pendiente de la recta se tiene $\text{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

Utilizando que $\text{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ y que $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\alpha<\pi$, podemos calcular senα y cosα que valen $\text{sen}\alpha=\frac{4}{5}$ y $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, luego la ecuación de la simetría axial es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-0\\y-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\ \frac{8}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{8}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Ecuación de la homotecia $H_{(A,-3)}$:

$$\begin{pmatrix}x'-1\\y'-0\end{pmatrix}=-5\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\6 & -5 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Ecuación de la semejanza $S_{(C,k)}$ resultante del producto $H_{(A,-3)}\circ S_e$:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{8}{5}&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\10&-3&-4\\-8&-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

b)

La matriz M=$\begin{pmatrix}-3&-4\\-4&3\end{pmatrix}$ verifica que $|M|$=-25<0, luego se trata de una **semejanza inversa** de **razón k** $=\sqrt{|-25|}=$ **5.**

Por tratarse de una semejanza inversa existe una recta e’ tal que $S_{(C,k)}= H_{(C,k)}\circ S_{e'} = S_{e'}\circ H_{(C,k)}$

El **centro** es el único punto doble, solución de N $\overline{X}=\overline{X}\Leftrightarrow(N-I)\overline{X}=O\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}1-1&0&0\\10&-3-1&-4\\-8&-4&3-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}10-4x-4y=0\\-8-4x+2y=0\end{cases}\Rightarrow \mathbf{C}\left(\frac{1}{2},3\right)$$

El eje **e’** es la recta que pasa por C y su dirección es la solución de la ecuación QX=X:

$$QX=X\Leftrightarrow \frac{1}{k}MX=X\Leftrightarrow \left(\frac{1}{k}M-I\right)X=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{3}{5}-1&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}y=0\\\frac{4}{5}x-\frac{8}{5}y=0\end{cases}$$

Las dos ecuaciones anteriores son proporcionales y equivalentes a x-2y =0, luego e’ es de la forma $x-2y=c\Rightarrow\frac{1}{2}-2\cdot3=c\Rightarrow c=-\frac{11}{2}$. Por tanto, **e’≡ $x-2y=-\frac{11}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}$**

Resumiendo es una **semejanza inversa** de centro **C$\left(\frac{1}{2},3\right)$**, **razón k = 5** y **eje e’≡ $y=\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}$.**

Inicio

39. Dadas las rectas m ≡ y =(1/2)x-1 y m'≡ y =2x+2 y el punto P(0,-1), se pide:

a) Hallar la ecuación de la semejanza resultante de componer la simetría axial que transforma la recta m en la recta m' con la homotecia de centro P y razón k = 2

b) Calcular los elementos de la semejanza anterior indicando si se trata de una semejanza directa o inversa.

Solución

a)

Hallamos la ecuación de la semejanza axial y de la homotecia dadas.

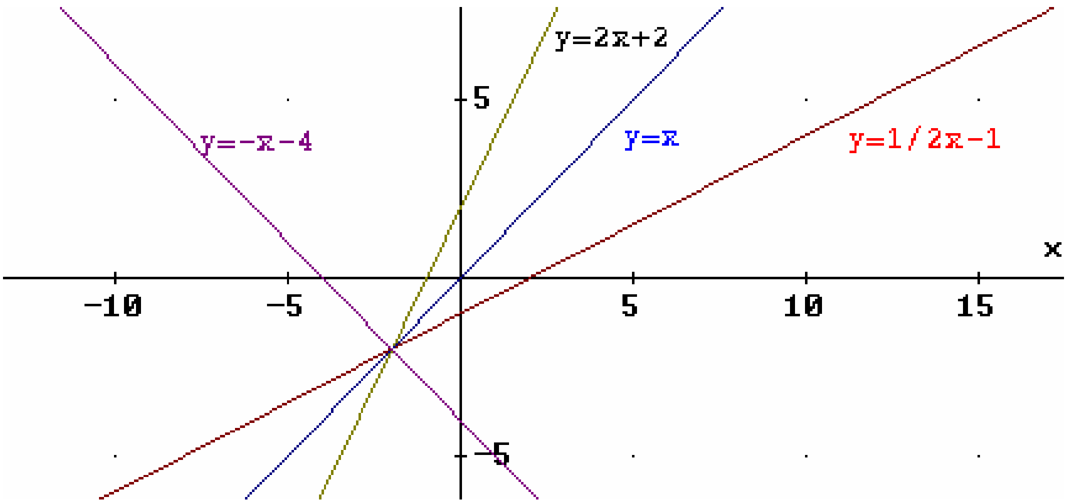
Ecuación de la simetría axial S_e:

La simetría axial que transforma la recta m en la recta m' tiene por eje e la bisectriz de ambas rectas correspondiente al ángulo menor.

Todo punto P(x,y) de la bisectriz, verifica que d(P,m) = d(P,m').

$$m \equiv y = \frac{1}{2}x\text{-}1 \Leftrightarrow x\text{-}2y - 2 = 0,\ m' \equiv y = 2x+2 \Leftrightarrow 2x\text{-}\ y + 2 = 0, \text{ luego}$$

$$\frac{|x-2y-2|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x-y+2|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \equiv -x-y-4=0 \\ b_2 \equiv x-y=0 \end{cases}$$



El eje **e** de la simetría es la bisectriz **y = x**.

Tomando O(0,0)∈e y observando que $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$, la ecuación de S_e es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecuación de la homotecia $H_{(P,2)}$:

$$\begin{pmatrix} x'-0 \\ y'-1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecuación de la semejanza $S_{(C,k)}$ resultante del producto $H_{(P,2)} \circ S_e$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -3 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

b)

La matriz M=$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ verifica que $|M|$=-4<0, luego se trata de una **semejanza inversa** de **razón $k = \sqrt{|-4|} = 2$.**

Por tratarse de una semejanza inversa existe una recta e' tal que $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ S_{e'} = S_{e'} \circ H_{(C,k)}$

El **centro** es el único punto doble, solución de $N\,\overline{X} = \overline{X} \Leftrightarrow (N-I)\,\overline{X} = O \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} \\ -3 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{2}-1\right)x + \sqrt{2}y = 0 \\ -3 + \sqrt{2}x + \left(-\sqrt{2}-1\right)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{C}\left(\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right)$$

El **eje e'** es la recta que pasa por C y su dirección es la solución de la ecuación QX=X:

$$QX=X \Leftrightarrow \frac{1}{k}MX=X \Leftrightarrow (\frac{1}{k}M-I)X=O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{2}-2\right)x + \sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}x - \left(\sqrt{2}+2\right)y = 0 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones anteriores son proporcionales y equivalentes a $\left(\sqrt{2}-1\right)$x-y =0, luego e' es de la forma $\left(\sqrt{2}-1\right)$x-y = d$\Rightarrow$ $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}$ - (1-$\sqrt{2}$)·= d $\Rightarrow$ d= 1. Por tanto, **e'≡ $\left(\sqrt{2}-1\right)$x-y =1**

Resumiendo es una **semejanza inversa** de centro **$C\left(\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right)$, razón k = 2** y **eje e'≡ $\left(\sqrt{2}-1\right)$x-y=1.**

Inicio

40. a) Hallar la ecuación de la semejanza directa que transforma los puntos P(0,1) y Q(1,2) en P'(15,-2) y Q'(1,-4) respectivamente.

b) Hallar la descomposición canónica de dicha semejanza.

Solución

a)

La ecuación de una semejanza directa del plano euclídeo es de la forma:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\E&A&-B\\F&B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Imponiendo que los pares de puntos P y P', Q y Q' son homólogos calculamos A, B, E y F.

$$\begin{pmatrix}1\\15\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\E&A&-B\\F&B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\text{ y }\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\E&A&-B\\F&B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}15=E-B\\-2=F+A\\1=E+A-2B\\-4=F+B+2A\end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene como solución: **A = - 8, B = 6, E = 21, F = 6.**

Luego la ecuación de la semejanza es: $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\21&-8&-6\\6&6&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$

b)

Designando por $S_{(C;k)}$ la semejanza obtenida en el apartado a), se verifica que:

$S_{(C;\,k)} = G_{(C;\,\alpha)}\circ H_{(C;\,k)} = H_{(C;\,k)}\circ G_{(C;\,\alpha)}$, donde:

C es el **centro** de la semejanza (único punto doble) y se obtiene resolviendo la ecuación

$$N\,\overline{X}=\overline{X}\Leftrightarrow(N-I)\,\overline{X}=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-1&0&0\\21&-8-1&-6\\6&6&-8-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}21-9x-6y=0\\6+6x-9y=0\end{cases}\Rightarrow \mathbf{C}\left(\frac{17}{13},\frac{20}{13}\right)$$

k es la **razón** de semejanza y verifica que: $\mathbf{k}=\sqrt{|M|}=\sqrt{|100|}=\mathbf{10}$

α es el **ángulo** de la semejanza y verifica que:

$$\begin{cases}k\cos\alpha=A\\k\operatorname{sen}\alpha=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10\cos\alpha=-8\\10\operatorname{sen}\alpha=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=-\dfrac{8}{10}=-\dfrac{4}{5}\\\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}\end{cases}$$

Inicio

41. a) Hallar la ecuación de la semejanza inversa que transforma los puntos P(0,0) y Q(0, $\sqrt{3}$) en P'(2,- $\sqrt{3}$) y Q'(5,0) respectivamente.

b) Hallar la descomposición canónica de la semejanza obtenida en a).

Solución

La ecuación de una semejanza inversa del plano euclídeo es de la forma:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\E&A&B\\F&B&-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Imponiendo que los pares de puntos P y P', Q y Q' son homólogos calculamos A, B, E y F.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\E&A&B\\F&B&-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\E&A&B\\F&B&-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2=E\\-\sqrt{3}=F\\5=E+\sqrt{3}B\\0=F-\sqrt{3}A\end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene como solución: **A = - 1, B = $\sqrt{3}$, E = 2, F = - $\sqrt{3}$.**

Luego la ecuación de la semejanza es: $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$

b)

Designando por $S_{(C;k)}$ la semejanza obtenida en el apartado a), se verifica que:

$S_{(C;\,k)} = S_e \circ H_{(C;\,k)} = H_{(C;\,k)} \circ S_e$, donde:

C es el **centro** de la semejanza (único punto doble) y se obtiene resolviendo la ecuación

$$N\,\overline{X}=\overline{X}\Leftrightarrow(N-I)\,\overline{X}=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-1&0&0\\2&-1-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&\sqrt{3}&1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2-2x+\sqrt{3}y=0\\-\sqrt{3}+\sqrt{3}x=0\end{cases}\Rightarrow \mathbf{C(1,\,0)}$$

k es la **razón** de semejanza y verifica que: **k** = $\sqrt{-|M|}=\sqrt{|-4|}=\mathbf{2}$

e es el **eje** de la semejanza y es la recta que pasa por C y su dirección es la solución de:

$$QX=X\Leftrightarrow\frac{1}{k}MX=X\Leftrightarrow(\frac{1}{k}M-I)X=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-1&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-3x+\sqrt{3}y=0\\\sqrt{3}x-y=0\end{cases}$$

Las dos ecuaciones anteriores son proporcionales y equivalentes a $\sqrt{3}$ x-y =0, luego e es de la forma $\sqrt{3}$ x-y = d$\Rightarrow$ $\sqrt{3}\cdot 1$- 0=d $\Rightarrow$ d= $\sqrt{3}$.

Por tanto, e $\equiv$ $(\sqrt{\mathbf{3}})$x-y =$(\sqrt{\mathbf{3}})$

Inicio