Espacio afín euclídeo

1.- En el *espacio afín* real A^3 respecto de una *referencia* cartesiana $R=\{O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$, se consideran los puntos O'= (1, 2, 1), A=(2, 3, 1), B =(2, 2, 2) y C=(4, 3, 1). Sea $R'=\{O',\ \vec{e}'_1,\ \vec{e}'_2,\ \vec{e}'_3\}$ una *referencia* cuyos ejes son las rectas O'A, O'B, O'C. Determinar R' sabiendo que un punto D tiene de *coordenadas* $\left(2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$ en la *referencia* R y (1, 1, 1) en R'. Hallar las ecuaciones del *cambio de coordenadas*.

Solución

2.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias*:

$R=\{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{O',\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$, donde $\overrightarrow{OO'}=\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}'=-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{v}'=\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{w}'=\vec{u}+\vec{v}-3\vec{w}$.

a) Hallar las ecuaciones del *cambio de referencia* de R a R´.

b) Análogamente, de R´ a R.

c) Demostrar que existe un único punto del espacio que tiene las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R´.

Solución

3.- Si A, B, C, D son cuatro puntos cualesquiera demostrar que:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0.$$

Solución

4.- Hallar: a) La ecuación de la *recta* r que pasa por el punto (1,0,0) y es perpendicular al *plano* $x-y-z+2=0$.

b) El *plano* π que pasa por los puntos (0,1,2), (1,0,3), (2,-1,0).

c) La ecuación del *plano* σ que pasa por el punto (1,1,1) y es perpendicular a la recta x=t, y=0, z=t.

d) La recta s definida por la intersección de los planos π y σ.

e) Posición relativa de r y s.

f) *Distancia entre las rectas* r y s.

Solución

5.- Hallar la *distancia entre el punto* (1,2,5) *y el plano* x+y+z=5. Encontrar el punto del *plano* que está a la mínima *distancia*.

Solución

6.- Sean las rectas $r\equiv x-2=\dfrac{y-1}{k}=\dfrac{z+1}{2}$ y $s\equiv\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=t\end{cases}$

Se pide:

Hallar k para que r y s sean *coplanarias*, hallar la *ecuación del plano* que contiene a ambas rectas y la *perpendicular común* a ambas.

Solución

7.- Dada la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$ y el punto P(1,2,1)

Calcular:

1°) *Ecuaciones de la recta* s que pasa por P y corta perpendicularmente a r

2°) Hallar el punto de intersección de r y s.

3°) Hallar las *coordenadas* del punto *simétrico* de P respecto de r.

Solución

8.- Hallar el punto *simétrico* del punto (1,4,5) respecto a la recta $\frac{x-1}{2} = y-3 = \frac{z-1}{5}$.

Solución

9.- Hallar el punto *simétrico* de (1,2,3) respecto del *plano* x-3y-2z+4=0.

Solución

10.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias*:

$R = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $R' = \{O', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$, donde $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}' = \vec{v}+\vec{w}$, $\vec{v}' = \vec{u}+\vec{w}$, $\vec{w}' = \vec{u}+\vec{v}$.

a) Hallar las ecuaciones del *cambio de referencia* de R a R'.

b) Análogamente, de R' a R.

c) Demostrar que existe un único punto del espacio que tiene las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R'.

e) Indicar las *coordenadas* del punto O en R'.

Solución

11.- Las *coordenadas* de los puntos medios de los lados de un triángulo ABC son: M(1,0,-1), N(0,2,0) y P(0,1,1). Determinar las *coordenadas* de los vértices A, B y C.

Solución

12.- Dadas las rectas representadas por las ecuaciones:

$r \equiv x-1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ y $s \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3}$, se pide:

a) Demostrar que las rectas r y s son *coplanarias*.

b) Hallar la *ecuación del plano* que determinan.

Solución

13.- Hallar la posición relativa de los dos planos siguientes según los valores de a.

$$\pi_1 \equiv x - 3y + 2z = 1,\ \pi_2 \equiv 2x - 6y + a^2 z = -a$$

Solución

14.- Determinar la posición relativa de las rectas r y s en función del valor que se tome para a:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases},\quad s \equiv \frac{x - a}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{1}$$

Solución

15.- ¿Pertenece el plano x+y+z+2=0 al haz determinado por la recta $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$?

Solución

16.- Hallar las ecuaciones de la *recta* tal que: sea incidente con P(1,1,0), *coplanaria* con la *recta* x=y-1=z y sea paralela al *plano* x+2y-5=0.

Solución

17.- Dada la *recta* 2x+3y-4z=6; 3x-y+z=1 y el *plano* 2x+ay-z=4. Hallar el valor de a para que el *plano* sea paralelo a la *recta*.

Solución

18.- Determinar la ecuación de un *plano* que contiene a la *recta* $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - 3z = 2 \end{cases}$ y es paralelo al *plano* $\pi \equiv$6x+8y+3z=1.

Solución

19.- Encontrar las ecuaciones de una *recta* que se apoya en dos rectas r y s dadas y pasa por el punto P(1,0,-1).

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Solución

20.- Hallar las *coordenadas* de los restantes vértices de un *paralelepípedo*, siendo:

A=(1,-7,4), B=(2,-1,9), C=(3,-7,5) y D=(4,-5,8) (aristas $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$).

Solución

21.- Sean A_1, A_2,…,A_8 los vértices de un *paralelepípedo*. Sabiendo que los vectores diagonales de las caras que concurren en A_1 son $\overrightarrow{A_1A_3} = (2,-2,2)$, $\overrightarrow{A_1A_6} = (4,2,2)$ y $\overrightarrow{A_1A_8} = (2,2,4)$. Se pide:

a) Calcular las *coordenadas* de los vectores $\overrightarrow{A_1A_i}$, i=2,4,5,7.

b) Hallar los ángulos $\widehat{A_4A_1A_3}$, $\widehat{A_1A_3A_5}$ y $\widehat{A_6A_8A_7}$

Solución

22.- Sean A, B, C y D cuatro puntos no alineados. Demostrar que los puntos medios de los segmentos que forman los lados del cuadrilátero son los vértices de un *paralelogramo*.

Solución

23.- Conocidas las *coordenadas* A, B y C de los vértices de un triángulo, determinar las *coordenadas* de su *baricentro*.

Solución

24.- Calcular las *coordenadas* del *baricentro*, *ortocentro* y *circuncentro* del triángulo A B C, siendo A (2, 0, 1), B (0, 1, 1), C (0, 0, 4) y comprobar que están alineados.

Solución

25.- Calcular $\vec{x} \wedge \vec{y}$, $\left(\vec{x} \wedge \vec{y}\right) \cdot \vec{z}$, $\left(\vec{x} \wedge \vec{y}\right) \wedge \vec{z}$, $\vec{x} \wedge \left(\vec{y} \wedge \vec{z}\right)$, $\left[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right]$, siendo

$\vec{x} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$, $\vec{y} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{z} = -\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$ y $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una *base ortonormal*.

Solución

26.- Dados dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ se buscan los vectores $\vec{x}$ tales que $\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{x}$, obtener la relación que deben satisfacer $\vec{a}$, $\vec{b}$ para que la ecuación $\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{x}$ tenga alguna solución. Cuando se cumple dicha condición, describir geométricamente, las soluciones $\vec{x}$ de la ecuación.

Solución

27.- Hallar el valor de λ para que los vectores

$\vec{x} = \vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2 - 3\vec{u}_3$, $\vec{y} = 2\vec{u}_1 - 3\lambda\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{z} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$

sean *coplanarios*.

Solución

28.- Dados los puntos A=(3,2,0), B=(1,0,1), C=(2,-2,3), y D(-1,1,2). Se pide:

a) El *área del triángulo* ABC.

b) El *volumen del tetraedro* ABDC.

c) El *ángulo* determinado por el *plano* ABC y la *recta* CD.

d) El *ángulo* determinado por los planos ABC y BCD.

e) Ecuación de la *perpendicular común* a las rectas AB y CD.

f) *Distancia* entre las rectas AB y CD.

Solución

29.- Consideremos los puntos P = (1,2,0) , Q = (1,0,1) y R(1,0,0). Se pide:

a) Demostrar que son los vértices de un triángulo rectángulo y calcula la longitud de cada cateto y el *área del triángulo*.

b) La *ecuación del plano* que los contiene.

c) Un punto T de manera que los puntos P, Q, R y T sean los vértices de un rectángulo.

Solución

30.- Hallar la *distancia* del punto P=(1,4,5) a la *recta* $r \equiv \frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-3}{3}$.

Solución

31.- Sea el punto P(1,4,5) donde está situado un semáforo en el borde de la calzada de una calle cuyo eje sigue una línea *recta* de ecuación $\frac{x-1}{2} = y-3 = \frac{z-1}{5}$. Hallar el punto P' *simétrico* del P respecto del eje de la calle donde colocar el otro semáforo. ¿Cuál es la anchura de la calle?

Solución

32.- La base de un árbol está situada en el punto P(1,2,3) próxima a un muro de ecuación x-3y-2z+4=0. Hallar las *coordenadas* del punto P' en el cual se desea colocar otro árbol *simétrico* al del punto P respecto del muro.

Solución

33.- Considérese el *tetraedro* de vértices O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,1). Hallar un *plano* que contenga al lado AB y que divida al *tetraedro* en dos partes de igual volumen.

Solución

34.- Dos caras de un cubo están en los planos x+2y+2z=1, x+2y+2z=7. Calcular el volumen del cubo.

Solución

35.- Se considera una diagonal D de un cubo y una diagonal d de una de sus caras de tal forma que las *rectas* que contienen D y d se cruzan. Hallar la *distancia* entre ambas *rectas*.

Solución

36.- Expresar $\vec{v}$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ paralelo a $\vec{u}$ y otro $\vec{v}_2$ perpendicular a $\vec{u}$ para un vector $\vec{u}$ cualquiera.

En particular, para $\vec{v}$=(1,-1,0) y $\vec{u}$=(1,3,0).

Solución

37.- Hallar la ecuación de la *recta* que pasa por el punto (0,1,-3) y que forma con la parte positiva de cada *eje* coordenado los siguientes ángulos: $\alpha=90°$, $\beta=30°$, $\gamma=60°$.

Solución

38. Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$; s: $x=y=\frac{z-1}{2}$. Se pide:

a) Estudiar si se cortan o cruzan.

b) *Ecuación del plano* en forma implícita que contiene a s y es paralelo a r.

c) *Ecuaciones paramétricas* de todas las *rectas* que se apoyan en r y s.

d) Entre todas las *rectas* del apartado anterior, encontrar una que sea paralela al *plano* x + y + z - 3 = 0. Dar la solución en paramétricas.

e) *Distancia* entre r y s.

Solución

39.- Se quiere construir un tendedero con una cuerda desde el punto P (0,1,1) hasta la *recta* r: $\begin{cases} 2x+3y+z-5=0 \\ -5y-z-10=0 \end{cases}$ de modo que la longitud de la cuerda sea la menor posible. Determinar el punto de la *recta* r donde debe ir la cuerda y la longitud de dicha cuerda.

Solución

40.- Hallar en el *eje* OX un punto equidistante de los dos planos:

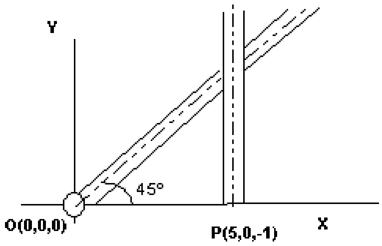
$$2x+2y+z=0;\ -x+2y+2z=6.$$

Solución

41.- Hallar los *ángulos* que la *recta* de ecuaciones x+y+z=1, 2x-y+z=0, forma con los *planos coordenados*.

Solución

42.- Se necesita colocar una tubería *recta* que tenga la menor inclinación posible para poder ir por debajo de una conducción de gas y debe estar a una *distancia* no menor de 1 metro. El *eje* de la conducción de gas es horizontal y está a una profundidad constante de 1 metro.



Determinar la inclinación mínima para colocar la tubería. Una vez colocada la tubería se desea conectarla con la conducción de gas empleando un tubo de 1 metro de longitud, ¿dónde se realiza la conexión?

Solución

43.- Dadas las rectas que delimitan un campo de balonmano:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases} ; r_2 \equiv \begin{cases} x = -49 + 3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases} ; s_1 \equiv \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 \end{cases} ; s_2 \equiv \begin{cases} x = -11 - 4t \\ y = -16 + 3t \\ z = 1 \end{cases}$$

y sabiendo que la escuadra de la portería está situada en el punto $\left(-\frac{41}{10}, -\frac{34}{5}, 3\right)$. Se pide:

a) La ecuación del *plano* del campo.
b) Los vértices que forman el campo.
c) Las dimensiones del campo.
d) La situación del portero cuando se lanza un penalti.
e) La altura de la portería.
f) La anchura de la portería.
g) Las ecuaciones de las *rectas* de los postes de la portería.

Solución

44.- Determinar la longitud de un rayo de luz que parte del foco F=(1,0,2) es reflejado por un espejo *plano* de ecuación 3x+y-z=0 y acaba en el punto P=(2,3,0).

Solución

45.- En el *espacio afín* real A_3 respecto de una *referencia* canónica $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se consideran los puntos:

O'= (1, 2, 0), A=(-2, 0, 1), B =(-1, 3, 1) y C=(2, 3, 0).

Sea $R' = \{O', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ una *referencia* cuyos ejes son las *rectas* O'A, O'B, O'C.

a) Determinar R' sabiendo que un punto D tiene de *coordenadas* (1,1/3,1/4), en la *referencia* R y (1, 2, 3) en R'.

b) Hallar las ecuaciones del cambio de *coordenadas* de R en R'.

Solución

46.-Dados los puntos A=(3,2,0), B=(1,0,1), C=(2,-2,3), y D(-1,1,2). Se pide:

a) Demostrar que R={A,B,C,D} es un sistema de *referencia* afín del espacio

b) Escribir las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a la canónica.

c) Escribir las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a R'={A'(1,1,1), B'(1,0,0), C'(2,2,2),D'(0,1,0)}

d) Si P =(1,1,1), hallar sus *coordenadas* en R y en R'

e) Escribir las ecuaciones del *plano* π: x+2y+3z-6 =0 en R y en R'

f) Escribir las ecuaciones de la *recta* normal al *plano* π que pasa por P, tanto en la *referencia* canónica y como en R

Solución

47.- Consideremos los puntos P = (-1, 1, 1) , Q = (7, 1, 7) y R(-4, 1, 5). Se pide:

a) Demuestra que son los vértices de un *triángulo rectángulo* y calcula la longitud de cada cateto y el *área del triángulo*.
b) Obtén la *ecuación del plano* que los contiene.
c) Obtén un punto T de manera que los puntos P, Q, R y T sean los vértices de un rectángulo.

Solución

48.- Sean las rectas $r \equiv x-2=\dfrac{y-1}{k}=\dfrac{z+1}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=2t \end{cases}$

a) Hallar k para que r y s sean *coplanarias*.

b) Para el valor anterior de k, hallar la *ecuación del plano* que contiene a ambas rectas.

c) Para ese mismo valor de k, hallar la ecuación de la recta *perpendicular común* a las rectas dadas.

Solución

49.- Sean los puntos A(0,0,1), B(5,-4,3), C(4,-1,-2) y D(10,-5,-2) referidos al sistema de *referencia* R de un *espacio euclídeo* tridimensional. Se pide:

a) Las ecuaciones del cambio de sistema de *referencia* de R'={A,B,C,D} a R.

b) Indicar si la base $B=\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right\}$ es una *base ortonormal*.

c) Si x + y + z =0 es la ecuación de un *plano* respecto de R, ¿cuál es la ecuación de dicho plano respecto de la *referencia* R'?

d) El triángulo cuyos vértices son A, B y C se proyecta ortogonalmente sobre el plano x-y=3. Encontrar los vértices y el área del nuevo triángulo.

Solución

50.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias*:

$R=\{A;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{B;\vec{u}\,',\vec{v}\,',\vec{w}\,'\}$, donde:

$$\begin{cases} A=(5,6,7)\\ \vec{u}=(1,2,3)\\ \vec{v}=(1,0,1)\\ \vec{w}=(1,0,0)\end{cases} \quad y \quad \begin{cases} B=(-1,0,0)\\ \vec{u}\,'=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\ \vec{v}\,'=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ \vec{w}\,'=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\end{cases}$$

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a la canónica y de R´ a la canónica.

b) Análogamente, de R´ a R y de R a R'.

c) Hallar las *coordenadas* del punto B en R y en R'.

d) Hallar la *ecuación del plano* $\pi\equiv x+y+z-18=0$ en R.

Solución

51.-En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencia* s:

$R=\{O;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{O';\vec{u}\,',\vec{v}\,',\vec{w}\,'\}$, donde $\overrightarrow{OO'}=\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}\,'=\vec{u}+2\vec{v}$, $\vec{v}\,'=-3\vec{u}-7\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{w}\,'=-2\vec{v}+\vec{w}$.

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a R´.

b) Análogamente, de R´ a R.

c) Comprobar si existen puntos del espacio que tienen las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias* .

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R´.

e) Si Q=(1,1,1) en R' hallar las *coordenadas* de Q en R.

Solución

52.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias* :

$R=\{O;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{O';\vec{u}\,',\vec{v}\,',\vec{w}\,'\}$, donde $\overrightarrow{OO'}=\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}\,'=2\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}\,'=-4\vec{u}+5\vec{v}-8\vec{w}$, $\vec{w}\,'=-2\vec{v}+2\vec{w}$.

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a R´.

b) Análogamente, de R´ a R.

c) Comprobar si existen puntos del espacio que tienen las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R´.

e) Si Q=(1,1,1) en R' hallar las *coordenadas* de Q en R.

Solución

53.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran la *referencia*:

$R = \{A, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}\}$, donde A es el punto de *coordenadas* A = (1, 2, 3) y los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tienen por *coordenadas* $\vec{u} = (1,2,0)$, $\vec{v} = (-3,-7,1)$ y $\vec{w} = (-2,0,1)$. Se pide:

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de la canónica a R.

b) Comprobar si existen puntos del espacio que tienen las mismas *coordenadas* respecto de la *referencia* canónica y de R.

c) Ecuación, en la *referencia* R, del *plano* cuya ecuación en la *referencia* canónica es z = 0.

Solución

54.- a) Sean los *subespacios vectoriales* E y F de R^4, definidos por las siguientes *ecuaciones implícitas*: $E \equiv \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -9x+3y-z+7t=0 \end{cases}$, $F \equiv 3x+z-t=0$

Hallar una *base* de la *suma* E+F y de la *intersección* E∩F. ¿Es *suma directa*?

b) Respecto de la *base canónica*, la *transformación lineal* f tiene por matriz asociada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & -4 \\ -3 & a & 3 \\ 3 & a+1 & -3 \end{pmatrix}$.

Estudiar para qué valores de *a* es *diagonalizable* la transformación *f*.

c) Hallar la *distancia* euclídea entre la *recta* afín *r* que pasa por el origen *O* y su dirección es la del vector $\vec{u} = (1,2,-1)$ y la *recta* *s* que pasa por *A* (1,1,1) y su dirección es $f(\vec{u})$, siendo f la transformación lineal del apartado anterior particularizada para *a* = 0.

Solución

55.- En el *espacio afín* real A^3, sea:

$$R \equiv \left\{O = (1,-1,1), \vec{u}_1 = (1,2,3), \vec{u}_2 = (0,0,1), \vec{u}_3 = (2,a,b)\right\}.$$

a) ¿Para qué valores de a y b es R un sistema de *referencia* afín del espacio?

b) A partir de ahora, se toman a = 5 y b = 4. Sea R' otro sistema de *referencia*: $R' \equiv \left\{O' = (0,2,1), \vec{v}_1 = (3,5,2), \vec{v}_2 = (1,1,1), \vec{v}_3 = (2,4,3)\right\}$

Hallar las ecuaciones de cambio de sistema de *referencia* de R a R'.

c) Si un punto P tiene de *coordenadas* $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ en el sistema de *referencia* R', ¿cuáles son las *coordenadas* de P respecto del sistema de *referencia* R? Comenta el resultado obtenido.

d) Sea $x - y + z + 2 = 0$ la ecuación de un *plano* en el sistema de *referencia* R. Hallar su ecuación respecto de R'.

Solución

56.- En el *espacio vectorial euclídeo* tridimensional V^3, se pide:

a) Hallar una *base ortonormal* del *plano* vectorial F engendrado por los vectores $\vec{u} = (1,2,0)$ y $\vec{v} = (1,-1,-1)$.

b) Hallar $F^{\perp}$ (*subespacio ortogonal* de F).

c) Ampliar la base encontrada en el apartado a) para obtener una *base ortonormal* de V^3.

Solución

57.- I. En R^3 se consideran los siguientes elementos:

- El *plano* $\pi : 2x + y - z = 2$.
- La *recta* $r : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$.
- El punto P: (1, 2, 1).

a) Expresar la ecuación de r en forma continua.

b) *Distancia* de P a π y de *P a r*.

c) Ecuación implícita del plano que pasa por P, es paralelo a r y perpendicular a π.

d) Hallar el punto P' *simétrico* de P respecto de π.

II. En el *espacio euclideo* E_3 se considera el sistema de referencia *ortonormal* $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Sea $R' = \{O'; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ otro sistema de referencia donde las *coordenadas* de O' con respecto a R son (1, 1, 0) y $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{u}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Hallar las ecuaciones del *cambio de referencia* R al sistema de referencia R'.

Solución

58.- Dados los puntos A=(1,1,0), B=(4/3, 1/3, - 2/3), C=(1/3, 4/3, - 2/3), y D=(1/3, 1/3, 1/3). Se pide:

a) Las *coordenadas* de los restantes vértices del *paralelepípedo* de aristas $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

b) Las ecuaciones del cambio de *referencia* de R $=\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ en R'={A,B,C,D}.

c) El *área del triángulo* ABC.

d) El *volumen del tetraedro* ABDC.

e) El *ángulo* determinado por el *plano* ABC y la *recta* CD.

f) El *ángulo* determinado por los planos ABC y BCD.

g) Ecuación de la *perpendicular común* a las rectas AB y CD.

h) *Distancia* entre las rectas AB y CD.

i) El punto D' *simétrico* de D respecto del plano ABC.

Solución

59.- En el *espacio afín euclídeo* ordinario R^3 se consideran las *referencias* $R = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $R' = \{O', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$. Las ecuaciones del *cambio de referencia* de R' a R son: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

a) Indicar las *coordenadas* de los vectores de la *base* $B=\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ respecto a la *base* $B'=\{\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$.

b) Demostrar que no existe ningún punto del espacio que tenga las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

c) Si x+y+z=0 es la ecuación de un *plano* en la *referencia* R, hallar la ecuación en R´.

Solución

60.- En el espacio afín R^3 respecto de la *referencia canónica* $R = \{0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se consideran los puntos P(1,2,1), A(2,3,1), B(1,1,2), C(4,-1,1). Sea $R' = \{P, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ otra referencia cuyos ejes son las rectas PA, PB, PC. Determinar R' sabiendo que el punto D tiene de *coordenadas* $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en la referencia R y (2, -1, -1) en la referencia R'. Hallar:

a) La *distancia* entre los orígenes de los sistemas de referencia.

b) Las ecuaciones del cambio de *coordenadas* de R' a R.

c) ¿Es R' un *sistema de referencia ortonormal*?

d) Ecuación implícita del *subespacio vectorial* F engendrado por los vectores $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ y $\vec{v}_2 = (0, -1, 1)$.

e) El *subespacio ortogonal* de F.

f) Un *subespacio suplementario* de $\langle \vec{v}_1 \rangle$

Solución

61.- En el Espacio Euclídeo:

a) Definición de *subespacio ortogonal* a un subespacio dado y definición de *sistema de referencia ortonormal*.

b) En A_3 se consideran los puntos siguientes: O(1,1,1), A(2,1,1), B(2,2,2), C(1,3,1) y O'(1,0,1), A'(1,1,1), B'(-1,1,1), C'(2,-1,2)

I) Probar que R={O, A, B, C} y R'={O', A', B', C'} son dos referencias de A_3.

II) Hallar las *ecuaciones del cambio de la referencia* R a R'.

Solución

1.- En el *espacio afín* real A^3 respecto de una *referencia* cartesiana $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, se consideran los puntos O'= (1, 2, 1), A=(2, 3, 1), B =(2, 2, 2) y C=(4, 3, 1). Sea $R' = \{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ una *referencia* cuyos ejes son las rectas O'A, O'B, O'C. Determinar R' sabiendo que un punto D tiene de *coordenadas* $\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ en la *referencia* R y (1, 1, 1) en R'. Hallar las ecuaciones del *cambio de coordenadas*.

Solución:

$\overrightarrow{O'A}$ =(1, 1, 0) $\overrightarrow{O'B}$ =(1, 0, 1) $\overrightarrow{O'C}$ =(3, 1, 0)

Por tanto: $\vec{e}'_1 = (\lambda, \lambda, 0)$, $\vec{e}'_2 = (\mu, 0, \mu)$, $\vec{e}'_3 = (3\nu, \nu, 0)$

Cambio de referencia de R' a R:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 3\nu \\ \lambda & 0 & \nu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Sustituimos las coordenadas del punto D en los dos sistemas de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 3\nu \\ \lambda & 0 & \nu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{37}{12} \\ \mu = -\dfrac{2}{3} \\ \nu = \dfrac{19}{12} \end{array}\right\}$$

Luego:

$\vec{e}'_1 = (-37/12, -37/12, 0)$, $\vec{e}'_2 = (-2/3, 0, -2/3)$, $\vec{e}'_3 = (57/12, 19/12, 0)$.

Por tanto, las ecuaciones definitivas del cambio de referencia de R' a R queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{37}{12} & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{19}{4} \\ -\dfrac{37}{12} & 0 & \dfrac{19}{12} \\ 0 & -\dfrac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

2.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias*:
$R=\{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{O',\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$, donde $\overrightarrow{OO'}=\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}'=-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{v}'=\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{w}'=\vec{u}+\vec{v}-3\vec{w}$.

a) Hallar las ecuaciones del *cambio de referencia* de R a R´.

b) Análogamente, de R´ a R.

c) Demostrar que existe un único punto del espacio que tiene las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R´.

Solución:

b) Ecuaciones del cambio de referencia de R' a R.

Si X tiene por vectores de posición $\overrightarrow{OX}=(x,y,z)$ y $\overrightarrow{O'X}=(x',y',z')$ respecto de R y R' respectivamente, luego $\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'X}=\overrightarrow{OX'}$.

Entonces:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Leftrightarrow[X]_R=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+P.[X]_{R'}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R, siendo P la matriz del cambio de la base $B'=\{\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$ a la base $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$.

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\text{ o bien }\boxed{\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&-1&1&1\\2&1&-2&1\\3&1&1&-3\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}}$$

a) Ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.
De las ecuaciones del apartado b) despejando (x',y',z') obtenemos:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&-1&1&1\\2&1&-2&1\\3&1&1&-3\end{array}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\boxed{\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline -11&5/2&2&3/2\\-7&2&1&1\\-5&3/2&1&1/2\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

c) Si un punto X tiene las mismas coordenadas respecto a las dos referencias significa que: x=x'; y=y'; z=z'. Y de las ecuaciones del cambio de sistema de referencia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{33}{13} \\ y = \dfrac{28}{13} \\ z = \dfrac{25}{13} \end{cases}}$$

d) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R' y sustituyendo x=1; y=2; z=0, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -11 & 5/2 & 2 & 3/2 \\ -7 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & 3/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{9}{2} \\ -3 \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P = \left(-\dfrac{9}{2}, -3, -\dfrac{3}{2}\right)}$$

3.- Si A, B, C, D son cuatro puntos cualesquiera demostrar que:

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BC}=0\,.$$

Solución:

Aplicando las propiedades del producto escalar y la descomposición de un vector en suma de otros dos (Relación de Chasles):

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overbrace{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)}^{\overrightarrow{AC}}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=$$

distributiva

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DB}}^{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{DB}}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overbrace{\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)}^{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=$$

conmutativa

$$=\overrightarrow{AB}.\overbrace{\overrightarrow{CB}}^{\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DB}+\overbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}}^{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}}=$$

distributiva

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overbrace{\overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\right)}^{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}.\overbrace{\overrightarrow{AB}}^{\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\right)}=$$

conmutativa y distributiva

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}^{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}}=\overbrace{\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)}^{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}=$$

y por último

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{AB}.\vec{0}=0$$

4.- Hallar: a) La ecuación de la *recta* r que pasa por el punto (1,0,0) y es perpendicular al *plano* $x - y - z + 2 = 0$.
b) El *plano* π que pasa por los puntos (0,1,2), (1,0,3), (2,-1,0).
c) La ecuación del *plano* σ que pasa por el punto (1,1,1) y es perpendicular a la recta x=t, y=0, z=t.
d) La *recta* s definida por la intersección de los planos π y σ.
e) Posición relativa de r y s.
f) *Distancia entre las rectas* r y s.

Solución:

a)
Del plano x-y-z+2=0 sabemos que $\vec{n} = (1,-1,-1)$ es un vector ortogonal a él, y si queremos una recta perpendicular, un vector director de ella puede ser (1,-1,-1) o cualquier vector paralelo.
La ecuación vectorial $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{n}$ conocido un punto P(1,0,0) y el vector director $\vec{n} = (1,-1,-1)$ resulta: **(x,y,z)=(1,0,0)+t(1,-1,-1)**.

b)
La ecuación general del plano sabiendo que pasa por tres puntos es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 & 3 \\ z & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + y - 1 = 0}.$$

c)
De la recta $x = t$, $y = 0$, $z = t$, podemos observar el vector director (1,0,1), que a su vez es un vector normal a cualquier plano perpendicular a dicha recta.
El haz de planos paralelos entre sí y perpendiculares a la recta dada, es: 1x+0y+1z=k; además debe contener al punto (1,1,1), con lo cuál x+z=1+1=2=k de donde, resulta $\sigma \equiv x+z=2$.

d)

La recta definida por los planos anteriores es: $s \equiv \begin{cases} \pi \equiv x + y - 1 = 0 \\ \sigma \equiv x + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$

e)
Puesto que las dos rectas tienen la dirección del vector (1,-1,-1) ¿o son paralelas? ¿o son coincidentes?
Es fácil observar que el punto P(1,0,0) pertenece a la recta r, pero no cumple la ecuación del plano σ y por consiguiente no está en s; **r y s son paralelas**.

f)

La distancia entre rectas paralelas es la distancia de un punto de una de ellas a la otra recta, cuya fórmula es: $d(r,s)=d(P,s)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$ con $A\in s; P\in r$.

Tenemos: P=(1,0,0) un punto de r; A=(0,1,2) un punto de s; y el vector $\vec{n}=(1,-1,-1)$.

El producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AP}=(1,0,0)-(0,1,2)=(1,-1,-2)$ y $\vec{n}=(1,-1,-1)$:

$$\overrightarrow{AP}\wedge\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=(-1,-1,0)$$

cuyo módulo $\left|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{n}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$ junto con $|\vec{n}|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$ se sustituye en la fórmula de la distancia $\boxed{d(r,s)=d(P,s)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}}$.

5.- Hallar la *distancia entre el punto* (1,2,5) *y el plano* x+y+z=5. Encontrar el punto del *plano* que está a la mínima *distancia*.

Solución:

Procedimiento a seguir:

1. Recta perpendicular al plano y que contiene al punto.

Del plano $x+y+z=5$ un vector perpendicular es (1,1,1) y será director de la recta perpendicular:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 5+t \end{cases}$$

2. Intersección de la recta anterior con el plano dado.

Sustituyendo $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 5+t \end{cases}$ en la ecuación $x+y+z=5$ resulta $1+t+2+t+5+t=5 \Rightarrow t=-1$ que da lugar al punto $A \equiv \begin{cases} x = 1+t = 1-1 = 0 \\ y = 2+t = 2-1 = 1 \Rightarrow (0,1,4) \\ z = 5+t = 5-1 = 4 \end{cases}$.

Conocido el punto más cercano del plano la distancia del punto al plano será:

$$d(P,\pi) = d(P,A) = \left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|(0,1,4)-(1,2,5)\right| = \left|(-1,-1,-1)\right| = \boxed{\sqrt{3}}$$

6.- Sean las rectas $r \equiv x - 2 = \dfrac{y-1}{k} = \dfrac{z+1}{2}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$

Se pide:

Hallar k para que r y s sean ***coplanarias*****, hallar la ecuación del** ***plano*** **que contiene a ambas rectas y la** ***perpendicular común*** **a ambas.**

Solución:

Vector de r: vr=(1,k,2) y un punto de r Pr(2,1,-1)

Vector de s: vs=(1,-1,1) y un punto de s Ps(1,2,0)

Para que las rectas sean coplanarias $\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{k = -1}$

El plano que contiene a ambas rectas (con k = -1)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x + y - 3 = 0}$$

la perpendicular común es la recta de vector vp=(1,1,0) que pasa por el punto de intersección de ambas rectas.

$s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$ sustituyendo en $r \equiv x - 2 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ resulta t=3 luego P(4,-1,3) y la recta pedida es $\boxed{t \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases}}$

7.- Dada la recta $r \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ **y el punto P(1,2,1)**

Calcular:

1°) *Ecuaciones de la recta* s que pasa por P y corta perpendicularmente a r

2°) Hallar el punto de intersección de r y s.

3°) Hallar las *coordenadas* del punto *simétrico* de P respecto de r.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de r son $r \equiv \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+4t \end{cases}$ se deduce que el punto genérico de r puede escribirse como A(-1+t, 2+t, 3+4t) con t∈ℜ.

El plano perpendicular a r es de la forma

x+y+4z+D=0

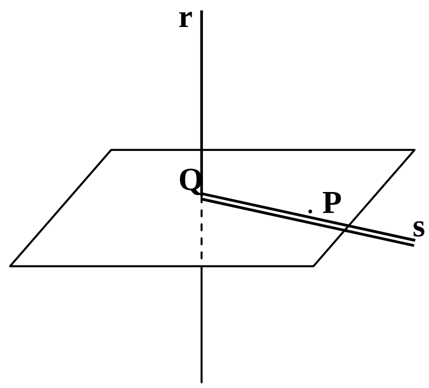
obteniéndose D al imponer que debe pasar por el punto P.

entonces 1+2+4+D=0 ⇒ D=-7

y el plano es x+y+4z-7=0

El corte de este plano con r es

(-1+t)+(2+t)+4(3+4t)-7=0 ⇒ 18t+6=0 ⇒ $t = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ el punto de intersección de r y s es (sustituyendo $t = -\frac{1}{3}$ en la ecuación de r) $\boxed{Q \equiv \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{5}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases}}$ solución al apartado 2º)



La ecuación de la recta s, recta que pasa por P y por Q es:

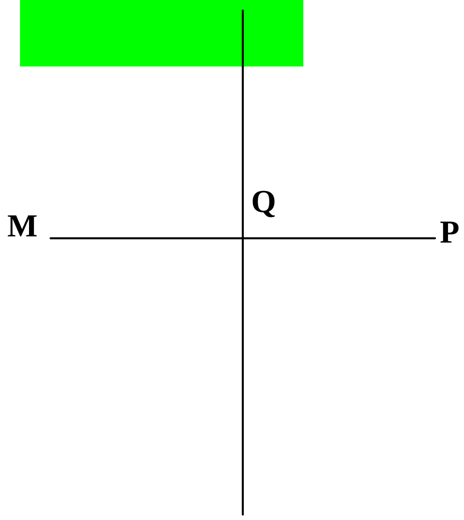
$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \left(-\frac{4}{3} - 1\right)\mu \\ y = 2 + \left(\frac{5}{3} - 2\right)\mu \\ z = 1 + \left(\frac{5}{3} - 1\right)\mu \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 - \frac{7}{3}\mu \\ y = 2 - \frac{1}{3}\mu \\ z = 1 + \frac{2}{3}\mu \end{cases}$$ y en forma continua $\boxed{s \equiv \frac{x-1}{-7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}}$

solución del apartado 1º)

El punto simétrico de P respecto de r vendrá dado por:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QM} \Rightarrow \left(-\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(x + \frac{4}{3}, y - \frac{5}{3}, z - \frac{5}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x + \frac{4}{3} = -\frac{7}{3} \\ y - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} \\ z - \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(-\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$ solución al apartado 3º



8.- Hallar el punto *simétrico* del punto (1,4,5) respecto a la recta $\frac{x-1}{2} = y-3 = \frac{z-1}{5}$.

Solución:

Procedimiento a seguir:

1. Plano perpendicular a la recta y que contiene al punto.
2. Intersección de recta y plano.
3. Simétrico del punto dado respecto del obtenido por intersección.

De la recta dada conocemos el vector director $\vec{v} = (2,1,5)$ que utilizamos como vector normal al plano pedido.

1. Haz de planos paralelos entre sí y perpendiculares a la recta dada 2x+y+5z=k; que además contenga al punto (1,4,5) resulta 2.1+4+5.5=31=k. El plano $\pi \equiv 2x + y + 5z = 31$.

2. La recta dada en forma paramétrica es $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+t \\ z = 1+5t \end{cases}$ que sustituyendo en la ecuación del plano

$$2(1+2t)+(3+t)+5(1+5t) = 31 \Rightarrow 30t = 21 \Rightarrow t = \frac{21}{30} = \frac{7}{10} \text{ que en la recta da}$$

$$\begin{cases} x = 1+2\frac{7}{10} = \frac{12}{5} \\ y = 3+\frac{7}{10} = \frac{37}{10} \\ z = 1+5\frac{7}{10} = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow O = \left(\frac{12}{5}, \frac{37}{10}, \frac{9}{2}\right)$$

3. El simétrico de P es el punto P’ siendo O el punto medio del segmento PP’, luego,

$$\text{P'=2.O-P=} 2\left(\frac{12}{5}, \frac{37}{10}, \frac{9}{2}\right) - (1,4,5) = \boxed{\left(\frac{19}{5}, \frac{17}{5}, 4\right)}$$

9.- Hallar el punto *simétrico* de (1,2,3) respecto del *plano* x-3y-2z+4=0.

Solución:

Procedimiento a seguir:

1. Recta perpendicular al plano y que contiene al punto.
2. Intersección de recta y plano.
3. Simétrico del punto dado respecto del obtenido por intersección.

1. En este caso el vector normal al plano $\vec{n} = (1,-3,2)$ nos sirve para determinar la dirección de la recta perpendicular: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 3-2t \end{cases}$

2. Sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano
$(1+t)-3(2-3t)-2(3-2t)+4=0 \Rightarrow -7+14t=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$ que en la recta queda
$$\begin{cases} x = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y = 2-3\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow O\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},2\right) \\ z = 3-2\frac{1}{2} = 2 \end{cases}$$

3. El simétrico de P es el punto P' siendo O el punto medio del segmento PP', luego,
$$P'=2.O-P=2\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},2\right)-(1,2,3)=\boxed{(2,-1,1)}$$

10.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias*:

$R = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $R' = \{O', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$, donde $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}' = \vec{v}+\vec{w}$, $\vec{v}' = \vec{u}+\vec{w}$, $\vec{w}' = \vec{u}+\vec{v}$.

a) Hallar las ecuaciones del *cambio de referencia* de R a R'.

b) Análogamente, de R' a R.

c) Demostrar que existe un único punto del espacio que tiene las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R'.

e) Indicar las *coordenadas* del punto O en R'.

Solución:

b) Ecuaciones del cambio de referencia de R' a R.

Supongamos que X tiene por vectores de posición $\overrightarrow{OX} = (x, y, z)$ y $\overrightarrow{O'X} = (x', y', z')$ respecto de R y R' respectivamente, como $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{OX}$, se verifica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow [X]_R = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P.[X]_{R'}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R, siendo P la matriz del cambio de la base $B' = \{\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$ a la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ o bien } \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

a) Ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.

De las ecuaciones del apartado b) despejando (x',y',z') obtenemos:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&0&1&1\\2&1&0&1\\3&1&1&0\end{array}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\boxed{\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline -2&-1/2&1/2&1/2\\1&1/2&-1/2&1/2\\0&1/2&1/2&-1/2\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}}$$

c) Si un punto X tiene las mismas coordenadas respecto a las dos referencias significa que: x=x'; y=y'; z=z'. Y de las ecuaciones del cambio de sistema de referencia:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=-\dfrac{5}{2}\\y=-2\\z=-\dfrac{3}{2}\end{cases}}$$

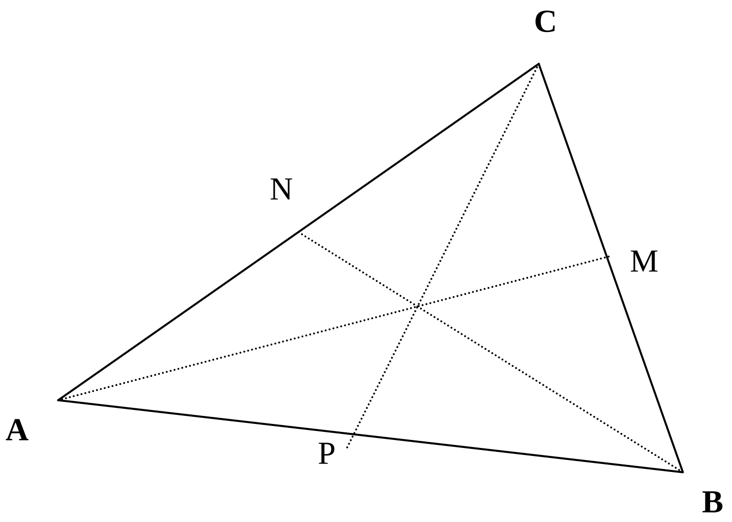
d) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R' y sustituyendo x=1; y=2; z=0, resulta:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline -2&-1/2&1/2&1/2\\1&1/2&-1/2&1/2\\0&1/2&1/2&-1/2\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\dfrac{3}{2}\\-\dfrac{3}{2}\\\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{P=\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)}$$

e) Puesto que O=(0,0,0) en R mediante las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R' es **O=(-2,1,0)**.

11.- Las *coordenadas* de los puntos medios de los lados de un triángulo ABC son: M(1,0,-1), N(0,2,0) y P(0,1,1). Determinar las *coordenadas* de los vértices A, B y C.

Solución:



Consideramos el vector de posición de cada punto en el sistema de referencia:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{m}$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{b}; \qquad \overrightarrow{ON} = \vec{n}$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{c}; \qquad \overrightarrow{OP} = \vec{p}$$

y por ser los puntos medios de los lados:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \vec{m} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \Rightarrow 2\vec{m} = \vec{b}+\vec{c} \\ \overrightarrow{ON} = \vec{n} = \dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2} \Rightarrow 2\vec{n} = \vec{a}+\vec{c} \\ \overrightarrow{OP} = \vec{p} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2} \Rightarrow 2\vec{p} = \vec{a}+\vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{m}+\vec{n}+\vec{p} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

restando la última ecuación a las anteriores, resulta:

$$\begin{array}{l} \vec{a} = -\vec{m}+\vec{n}+\vec{p} = -(1,0,-1)+(0,2,0)+(0,1,1) = (-1,2,2) \\ \vec{b} = \vec{m}-\vec{n}+\vec{p} = (1,0,-1)-(0,2,0)+(0,1,1) = (1,-1,0) \\ \vec{c} = \vec{m}+\vec{n}-\vec{p} = (1,0,-1)+(0,2,0)-(0,1,1) = (1,1,-2) \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} A = (-1,2,2) \\ B = (1,-1,0) \\ C = (1,1,-2) \end{array}}$$

12.- Dadas las rectas representadas por las ecuaciones:

$r \equiv x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ y $s \equiv \frac{x+5}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{3}$, **se pide:**

a) Demostrar que las rectas r y s son *coplanarias*.

b) Hallar la *ecuación del plano* que determinan.

Solución:

a)

De cada recta tomamos un punto y el vector director:

A=(1,1,-2); $\vec{v}_r=(1,-1,2)$ corresponden a la recta r.

B=(-5,3-4); $\vec{v}_s=(4,-2,3)$ corresponden a la recta s.

Formamos el vector que resulta de unir las rectas: $\overrightarrow{AB}=(-6,2,-2)$ y vemos que los tres vectores son linealmente dependientes:

$$\left[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{AB}\right]=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 3\\ -6 & 2 & -2\end{vmatrix}=0$$

b)

La ecuación vectorial del plano es: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\vec{v}_r+s\vec{v}_s$ que en forma paramétrica

$$\left.\begin{aligned}x&=1+t+4s\\ y&=1-t-2s\\ z&=-2+2t+3s\end{aligned}\right\}\text{ y su ecuación general }\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 4\\ y-1 & -1 & -2\\ z+2 & -2 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{x+5y+2z-2=0}$$

13.- Hallar la posición relativa de los dos planos siguientes según los valores de a.

$$\pi_1 \equiv x - 3y + 2z = 1,\ \pi_2 \equiv 2x - 6y + a^2 z = -a$$

Solución:

Estudiamos las soluciones del sistema formado por las ecuaciones que determinan los planos mediante el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$¿\,r\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & a^2 \end{pmatrix}? \text{ Para ello} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 4 = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow a = \pm 2 \Leftrightarrow \text{rango} = 1 \\ \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 2 \Leftrightarrow \text{rango} = 2 \end{cases}$$

$$¿\,r\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & a^2 & -a \end{pmatrix}? \text{ Para ello} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = -a - 2 = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow a = -2 \Leftrightarrow \text{rango} = 1 \\ \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2 \Leftrightarrow \text{rango} = 2 \end{cases}$$

Si a=-2 planos coincidentes.

Si a=2 planos paralelos.

Si $a \neq \pm 2$ planos secantes.

14.- Determinar la posición relativa de las rectas r y s en función del valor que se tome para a:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}, \quad s \equiv \frac{x-a}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{1}$$

Solución:

Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s consideramos el vector director de cada una y un vector que resulte de unirlas:

$$\vec{v}_r = (2,-1,1); \vec{v}_s = (3,2,1); A = (1,2,-2) \in r; B = (a,-1,-3) \in s \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (a-1,-3,-1)$$

$$\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ a-1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -3a - 7 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{7}{3}}$$

Si a=-7/3 rectas secantes, en otro caso r y s se cruzan.

15.- ¿Pertenece el plano x+y+z+2=0 al haz determinado por la recta $\begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-3y+4z+2=0 \end{cases}$?

Solución:

Mediante la combinación lineal de las ecuaciones de los planos determinamos el haz de planos, puesto que el plano buscado no es ninguno de los dados multiplicamos por un parámetro una ecuación y sumamos la otra ecuación:

$$\begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-3y+4z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ \underline{\lambda x-3\lambda y+4\lambda z+2\lambda=0} \end{cases}$$

$$(1+\lambda)x+(2-3\lambda)y+(-1+4\lambda)z-1+2\lambda=0$$

para que el plano x+y+z+2=0 pueda pertenecer al haz deben ser los coeficientes proporcionales:

$$\frac{1+\lambda}{1}=\frac{2-3\lambda}{1}=\frac{-1+4\lambda}{1}=\frac{-1+2\lambda}{2}$$

No hay solución y el plano **no** está situado en el haz.

16.- Hallar las ecuaciones de la *recta* tal que: sea incidente con P(1,1,0), *coplanaria* con la *recta* x=y-1=z y sea paralela al *plano* x+2y-5=0.

Solución:

Vamos a buscar dos planos que contengan a la recta pedida. Uno π que contenga a la recta x=y-1=z y al punto P y otro σ paralelo al plano x+2y-5=0 y que contenga a P.

Planteamos el haz de planos que contiene a la recta $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ \lambda x-\lambda z=0 \end{cases}$

$$(1+\lambda)x-y-\lambda z+1=0$$

Para que contenga (incidente) al punto P ha de verificarse:

$$(1+\lambda)-1+1=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow \boxed{-y+z+1=0 \equiv \pi}$$

Considerando todos los planos paralelos entre sí y con el plano dado x+2y-5=0: x+2y=k, como queremos aquél que contenga al punto P: k=1+2·1=3 queda:

$$x+2y=3 \Leftrightarrow \boxed{x+2y-3=0 \equiv \sigma}.$$

La recta pedida es la intersección de los planos obtenidos $\boxed{\begin{cases} -y+z+1=0 \equiv \pi \\ x+2y-3=0 \equiv \sigma \end{cases}}$ cumpliendo las tres condiciones.

17.- Dada la *recta* 2x+3y-4z=6; 3x-y+z=1 y el *plano* 2x+ay-z=4. Hallar el valor de a para que el *plano* sea paralelo a la *recta*.

Solución:

Estudiando el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la ecuación del plano**:**

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y-4z=6 \\ 3x-y+z=1 \\ 2x+ay-z=4 \end{array}\right\}$$

observamos que el rango de la matriz ampliada vale 3 independientemente del valor de a

$$r\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & a & -1 & 4 \end{pmatrix}=3$$

si el sistema debe ser compatible entonces:

$$r\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}=2$$

para ello el menor de orden tres debe ser nulo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{9}{14}}$$

18.- Determinar la ecuación de un *plano* que contiene a la *recta* $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y-3z=2 \end{cases}$ y es paralelo al *plano* $\pi \equiv 6x+8y+3z=1$.

Solución:

La ecuación del haz de planos de eje la recta r es:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y-3z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ \underline{2\lambda y-3\lambda z=2\lambda} \end{array}$$

$$x+(1+2\lambda)y+(1-3\lambda)z=2\lambda$$

Para que el plano anterior sea paralelo a π el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos debe ser incompatible.

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1+2\lambda & 1-3\lambda \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{6}=\frac{1+2\lambda}{8}=\frac{1-3\lambda}{3} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{x+\frac{4}{3}y+\frac{1}{2}z=\frac{1}{3}}$$

19.- Encontrar las ecuaciones de una *recta* que se apoya en dos rectas r y s dadas y pasa por el punto P(1,0,-1).

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Solución:

La recta pedida se puede formar interseccionando dos planos que contengan al punto P y a las rectas r y s, respectivamente.

Primeramente, plano π que contiene a la recta r y al punto P:

Conocidos los puntos A=(1,0,1)$\in r$ y P(1,0,-1) formamos el vector $\overrightarrow{AP} = (0,0,-2)$ y el plano π es el que pasa por A y es paralelo a los vectores $\overrightarrow{AP} = (0,0,-2)$ y $\vec{r} = (3,4,0)$:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4t \\ z = 1 - 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y & 4 & 0 \\ z-1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8x + 6y + 8 = 0 \Rightarrow 4x - 3y - 4 = 0$$

El segundo plano σ pertenece al haz de planos de eje la recta s y pasa por P:

$$s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2\lambda x - \lambda y = 3\lambda \end{cases}$$

$$(1 + 2\lambda)x + (1 - \lambda)y + z = 3\lambda$$

que contenga al punto P(1,0,-1) $\Rightarrow 1 + 2\lambda - 1 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = 0$

por tanto el plano σ directamente es x+y+z=0, ya que contiene a P.

La recta buscada coplanaria con r y s es: $\boxed{\begin{cases} \pi \equiv 4x - 3y - 4 = 0 \\ \sigma \equiv x + y + z = 0 \end{cases}}$

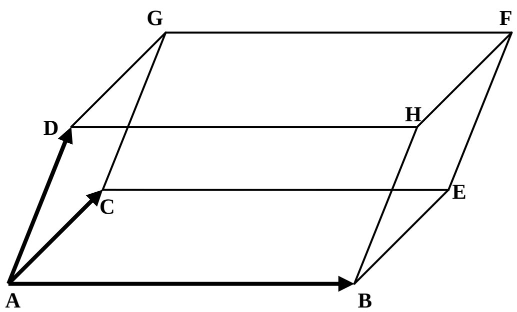
20.- Hallar las *coordenadas* de los restantes vértices de un *paralelepípedo*, siendo:

A=(1,-7,4), B=(2,-1,9), C=(3,-7,5) y D=(4,-5,8) (aristas $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$).

Solución:

Determinamos las aristas:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,-1,9) - (1,-7,4) = (1,6,5)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3,-7,5) - (1,-7,4) = (2,0,1)$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (4,-5,8) - (1,-7,4) = (3,2,4)$$



Vectorialmente obtenemos todos los vértices:

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (1,-7,4) + (1,6,5) + (2,0,1) = (4,-1,10)$$
$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AD} = (4,-1,10) + (3,2,4) = (7,1,1)$$
$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD} = (3,-7,5) + (3,2,4) = (6,-5,9)$$
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = (2,-1,9) + (3,2,4) = (5,1,13)$$

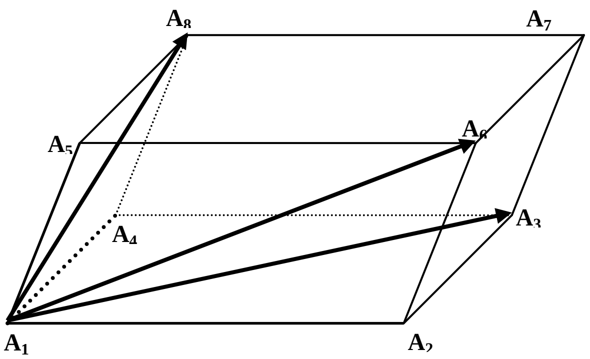
$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} E = (4,-1,10) \\ F = (7,1,1) \\ G = (6,-5,9) \\ H = (5,1,13) \end{array}}$$

21.- Sean A_1, $A_2,\dots,A_8$ los vértices de un *paralelepípedo*. Sabiendo que los vectores diagonales de las caras que concurren en A_1 son $\overrightarrow{A_1A_3}=(2,-2,2)$, $\overrightarrow{A_1A_6}=(4,2,2)$ y $\overrightarrow{A_1A_8}=(2,2,4)$. Se pide:

a) Calcular las *coordenadas* de los vectores $\overrightarrow{A_1A_i}$, i=2,4,5,7.

b) Hallar los ángulos $\widehat{A_4A_1A_3}$, $\widehat{A_1A_3A_5}$ y $\widehat{A_6A_8A_7}$.

Solución:



a)

Planteamos las ecuaciones vectorialmente:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_3}&=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_4}=(2,-2,2)\\ \overrightarrow{A_1A_6}&=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_6}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_5}=(4,2,2)\\ \overrightarrow{A_1A_8}&=\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_4A_8}=\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_1A_5}=(2,2,4)\end{aligned}$$

Se resuelve el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y sale:

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_2}&=(2,-1,0)\\ \overrightarrow{A_1A_4}&=(0,-1,2)\\ \overrightarrow{A_1A_5}&=(2,3,2)\end{aligned}}$$

por último $\overrightarrow{A_1A_7}=\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_7}=\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_5}=\boxed{(4,1,4)}$

b)

Para calcular los ángulos aplicamos la definición de producto escalar:

$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos(\vec{x},\vec{y})$, de aquí se obtiene: $\cos(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|.|\vec{y}|}$. Si los vectores están referidos a una base ortonormal, entonces: $\cos(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$

$$\cos\widehat{A_4A_1A_3}=\frac{\overrightarrow{A_1A_4}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|}=\frac{(0,-1,2)\cdot(2,-2,2)}{\left|(0,-1,2)\right|\left|(2,-2,2)\right|}=\frac{2+4}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{15}}=\boxed{\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

Como

$$\overrightarrow{A_3A_5}=\overrightarrow{A_1A_5}-\overrightarrow{A_1A_3}=(0,5,0)$$

tenemos que

$$\cos\widehat{A_1A_3A_5}=\frac{\overrightarrow{A_3A_1}\cdot\overrightarrow{A_3A_5}}{\left|\overrightarrow{A_3A_1}\right|\left|\overrightarrow{A_3A_5}\right|}=\frac{(-2,2,-2)\cdot(0,5,0)}{\left|(-2,2,-2)\right|\left|(0,5,0)\right|}=\frac{10}{2\sqrt{3}\cdot 5}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Y por último:

$$\overrightarrow{A_8A_6}=\overrightarrow{A_1A_6}-\overrightarrow{A_1A_8}=(2,0,-2)$$

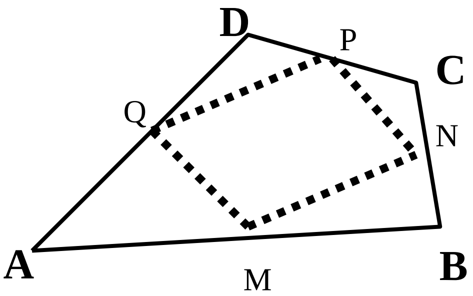
$$\overrightarrow{A_8A_7}=\overrightarrow{A_1A_7}-\overrightarrow{A_1A_8}=(2,-1,0)$$

así

$$\cos\widehat{A_6A_8A_7}=\frac{\overrightarrow{A_8A_6}\cdot\overrightarrow{A_8A_7}}{\left|\overrightarrow{A_8A_6}\right|\left|\overrightarrow{A_8A_7}\right|}=\frac{(2,0,-2)\cdot(2,-1,0)}{\left|(2,0,-2)\right|\left|(2,-1,0)\right|}=\frac{4}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\boxed{\frac{\sqrt{10}}{5}}$$

22.- Sean A, B, C y D cuatro puntos no alineados. Demostrar que los puntos medios de los segmentos que forman los lados del cuadrilátero son los vértices de un *paralelogramo*.

Solución:



Tenemos que demostrar que los segmentos del cuadrilátero son iguales dos a dos, es decir, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$ teniendo en cuenta que:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\right)$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)$$

Ahora bien,

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$$
$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$$

que como vemos son iguales: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{QP}$

Análogamente,

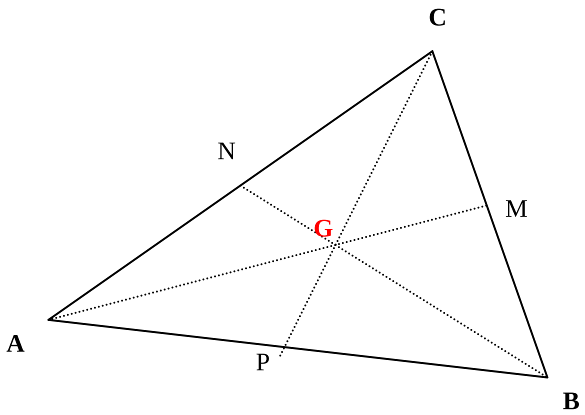
$$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)$$

$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)$$

que como vemos son iguales: $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{NP}$

23.- Conocidas las *coordenadas* A, B y C de los vértices de un triángulo, determinar las *coordenadas* de su *baricentro*.

Solución:



Vectorialmente se cumple: $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ por ser P el punto medio del lado AB y sabemos que el baricentro se encuentra a 1/3 de la base y a 2/3 del vértice:

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \boxed{\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}}$$

24.- Calcular las *coordenadas* del *baricentro, ortocentro* y *circuncentro* del triángulo A B C, siendo A (2, 0, 1), B (0, 1, 1), C (0, 0, 4) y comprobar que están alineados.

Solución:

Baricentro o lugar donde se cortan las medianas, corresponde al centro de gravedad, según el problema 23:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3} = \frac{(2,0,1)+(0,1,1)+(0,0,4)}{3} = \boxed{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},2\right)}$$

Ortocentro o lugar donde se cortan las alturas:

Altura sobre el lado AB:

$\overrightarrow{AB} = (-2,1,0)$ es un vector normal al plano π_1 que pasa por C y es perpendicular al lado AB, luego $\pi_1 \equiv -2x + y = 0$; la intersección de π_1 con la recta AB:

$\begin{cases} x = 2-2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ es el punto H_1=(2/5,4/5,1) que junto con el C forma la altura sobre AB:

$$h_1 \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 4-15t \end{cases}.$$

Altura sobre el lado AC:

$\overrightarrow{AC} = (-2,0,3)$ es un vector normal al plano π_2 que pasa por B y es perpendicular al lado AC, luego $\pi_2 \equiv -2x + 3(z-1) = 0$

intersección con la recta AC: $\begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \\ z = 4+3t \end{cases}$ da el punto H_2=(18/13,0,25/13) que junto con el B forma

la altura sobre AC: $h_2 \equiv \begin{cases} x = 18t \\ y = 1-13t \\ z = 1+12t \end{cases}$.

Por último, la intersección de las dos alturas: $h_1 \cap h_2 = \boxed{H = \left(\frac{18}{49},\frac{36}{49},\frac{61}{49}\right)}$

Circuncentro o lugar donde se cortan las mediatrices o centro de la circunferencia circunscrita:

Necesitamos conocer la ecuación del plano ABC, procederemos imponiendo la condición de que cualquier punto (x,y,z) junto con A, B y C sean linealmente dependientes:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3x - 6y - 2z + 8 = 0$$

Mediatriz sobre el lado $AB \equiv \pi \cap \sigma_1$, siendo σ_1 el plano que corta ortogonalmente al lado AB por su punto medio (plano mediador):

Punto medio: $\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} = \left(1, \dfrac{1}{2}, 1\right)$ y vector normal a σ_1, $\overrightarrow{AB} = (-2,1,0)$ forman el plano:

$$\sigma_1 \equiv -2(x-1) + y - \frac{1}{2} = -2x + y + \frac{3}{2} = 0$$

intersección con el plano $\pi \equiv -3x - 6y - 2z + 8 = 0$ forma la mediatriz.

Mediatriz sobre el lado $AC \equiv \pi \cap \sigma_2$, siendo σ_2 el plano mediador del segmento AC:

Punto medio: $\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2} = \left(1, 0, \dfrac{5}{2}\right)$ y vector normal a σ_2, $\overrightarrow{AC} = (-2,0,3)$ forman el plano:

$$\sigma_2 \equiv -2(x-1) + 3(z - \frac{5}{2}) = -2x + 3z - \frac{11}{2} = 0$$

intersección con el plano $\pi \equiv -3x - 6y - 2z + 8 = 0$ forma la mediatriz.

La intersección de las mediatrices nos da el circuncentro:

$$\begin{cases} \pi \equiv -3x - 6y - 2z + 8 = 0 \\ \sigma_1 \equiv -2x + y + 3/2 = 0 \\ \sigma_2 \equiv -2x + 3z - 11/2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M = \left(\frac{40}{49}, \frac{13}{98}, \frac{233}{98}\right)}$$

Los tres puntos baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados, forman la llamada ***"recta de Euler".*** En efecto:

$$\overrightarrow{GM} = \lambda \overrightarrow{GH} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{147}, -\frac{59}{294}, \frac{37}{98}\right) = \lambda\left(-\frac{44}{147}, \frac{59}{147}, -\frac{37}{49}\right) \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

25.- Calcular $\vec{x}\wedge\vec{y}$, $\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)\cdot\vec{z}$, $\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)\wedge\vec{z}$, $\vec{x}\wedge\left(\vec{y}\wedge\vec{z}\right)$, $\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]$, siendo $\vec{x}=2\vec{u}_1+\vec{u}_2-\vec{u}_3$, $\vec{y}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$, $\vec{z}=-\vec{u}_1+5\vec{u}_2+7\vec{u}_3$ y $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una *base ortonormal*.

Solución:

$$\vec{x}\wedge\vec{y}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\vec{u}_1-3\vec{u}_2+\vec{u}_3$$

$$\boxed{\vec{x}\wedge\vec{y}=2\vec{u}_1-3\vec{u}_2+\vec{u}_3}$$

$$\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)\cdot\vec{z}=\left(2\vec{u}_1-3\vec{u}_2+\vec{u}_3\right)\left(-\vec{u}_1+5\vec{u}_2+7\vec{u}_3\right)=-2-15+7=\boxed{-10}$$

$$\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)\wedge\vec{z}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 5 & 7\end{vmatrix}=-26\vec{u}_1-15\vec{u}_2+7\vec{u}_3$$

$$\boxed{\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)\wedge\vec{z}=-26\vec{u}_1-15\vec{u}_2+7\vec{u}_3}$$

$$\vec{x}\wedge\left(\vec{y}\wedge\vec{z}\right)=\left(2\vec{u}_1+\vec{u}_2-\vec{u}_3\right)\wedge\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 5 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & -8 & 6\end{vmatrix}=-2\vec{u}_1-14\vec{u}_2-18\vec{u}_3$$

$$\boxed{\vec{x}\wedge\left(\vec{y}\wedge\vec{z}\right)=-2\vec{u}_1-14\vec{u}_2-18\vec{u}_3}$$

$$\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 5 & 7\end{vmatrix}=-10=\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)\cdot\vec{z}$$

$$\boxed{\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]=-10=\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)\cdot\vec{z}}$$

26.- Dados dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ se buscan los vectores $\vec{x}$ tales que $\vec{a}=\vec{b}\wedge\vec{x}$, obtener la relación que deben satisfacer $\vec{a}$, $\vec{b}$ para que la ecuación $\vec{a}=\vec{b}\wedge\vec{x}$ tenga alguna solución. Cuando se cumple dicha condición, describir geométricamente, las soluciones $\vec{x}$ de la ecuación.

Solución:

Por definición de producto vectorial de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{x}$ el resultado el vector $\vec{a}$ debe ser perpendicular a ambos, luego necesariamente $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen que ser perpendiculares para que exista $\vec{x}$ que cumpla $\vec{a}=\vec{b}\wedge\vec{x}$; por tanto, las soluciones de $\vec{x}$ pertenecen al plano ortogonal al vector $\vec{a}$ y como: $|\vec{a}|\leq|\vec{b}||\vec{x}|$ ha de ser $\boxed{\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\leq|\vec{x}|}$.

27.- Hallar el valor de λ para que los vectores $\vec{x} = \vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2 - 3\vec{u}_3$, $\vec{y} = 2\vec{u}_1 - 3\lambda\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{z} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$ sean *coplanarios*.

Solución:

Los tres vectores son coplanarios (están sobre un mismo plano) si su producto mixto es cero.

$$\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right] = \left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)\cdot\vec{z} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -3 \\ 2 & -3\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\lambda - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{7}{3}}$$

28.- Dados los puntos A=(3,2,0), B=(1,0,1), C=(2,-2,3), y D(-1,1,2). Se pide:

a) El *área del triángulo* ABC.

b) El *volumen del tetraedro* ABDC.

c) El *ángulo* determinado por el *plano* ABC y la *recta* CD.

d) El *ángulo* determinado por los planos ABC y BCD.

e) Ecuación de la *perpendicular común* a las rectas AB y CD.

f) *Distancia* entre las rectas AB y CD.

Solución:

a) El área del triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores

$$\overrightarrow{AB}=(1,0,1)-(3,2,0)=(-2,-2,1) \text{ y } \overrightarrow{AC}=(2,-2,3)-(3,2,0)=(-1,-4,3).$$

Cuya área viene determinada por el módulo del producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -4 & 3\end{vmatrix}=(-2,5,6)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+5^2+6^2}=\sqrt{65}.$$

Y por consiguiente, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{65}}$.

b) El volumen del tetraedro es igual a 1/6 del volumen del paralelepípedo cuyo valor se obtiene como valor absoluto del producto mixto de los tres vectores $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que constituyen sus aristas: $V=\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\left|\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|$

y en nuestro caso $\overrightarrow{AD}=(-1,1,2)-(3,2,0)=(-4,-1,2)$ y $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-2,5,6)$,

si hacemos $V=\left|\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|=(-4,-1,2)(-2,5,6)=8-5+12=15$

y así el volumen del tetraedro es **15/6=2.5**.

c) Del plano ABC conocemos un vector normal $\vec{n}$=(-2,5,6) y de la recta CD el vector director $\overrightarrow{CD}=(-3,3,-1)$; siendo el ángulo que forman suplementario del ángulo pedido, luego de la definición del producto escalar se tiene:

$$\alpha=\operatorname{arcsen}\left|\frac{\vec{n}.\overrightarrow{CD}}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{CD}\right|}\right|=\operatorname{arcsen}\left|\frac{(-2,5,6)(-3,3,-1)}{\sqrt{65}\sqrt{19}}\right|=\operatorname{arcsen}\frac{15}{\sqrt{1235}}\simeq\boxed{25^{\circ}16'}$$

d) Del plano BCD necesitamos conocer un vector normal, para ello realizamos el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{CB}=(-1,2,-2)$ y $\overrightarrow{CD}=(-3,3,-1)$

$$\vec{n}'=\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & -2\\ -3 & 3 & -1\end{vmatrix}=(4,5,3)$$

$$\beta=\arccos\left|\frac{\vec{n}.\vec{n}'}{|\vec{n}||\vec{n}'|}\right|=\arccos\left|\frac{(-2,5,6)(4,5,3)}{\sqrt{65}\sqrt{50}}\right|=\arccos\frac{35}{\sqrt{3250}}=\arccos\frac{7}{\sqrt{130}}\simeq\boxed{52^{o}\,07'30''}$$

e) Perpendicular común: recta perpendicular y secante a ambas.

Procedimiento a seguir:

1. Vector perpendicular a ambas rectas.

$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -2 & 1\\ -3 & 3 & -1\end{vmatrix}=(-1,-5,-12)$$

2. Plano que contiene a la recta AB y al vector perpendicular a ambas.

Tenemos el punto A=(3,2,0) y los vectores $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,1)$ y $\vec{v}=(-1,-5,-12)$ con lo cual la ecuación del plano es: $\pi\equiv\begin{vmatrix}x-3 & y-2 & z\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -5 & -12\end{vmatrix}=\boxed{29x-25y+8z-37=0}$

3. Plano que contiene a la recta CD y al vector perpendicular a ambas.

Tenemos el punto C=(2,-2,3) y los vectores $\overrightarrow{CD}=(-3,3,-1)$ y $\vec{v}=(-1,-5,-12)$ con lo cual la ecuación del plano es: $\sigma\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y+2 & z-3\\ -3 & 3 & -1\\ -1 & -5 & -12\end{vmatrix}=\boxed{-41x-35y+18z-42=0}$

4. Intersección de los planos anteriores.

La recta pedida es: $\boxed{\begin{cases}\pi\equiv 29x-25y+8z-37=0\\ \sigma\equiv -41x-35y+18z-42=0\end{cases}}$

f) $$d(r_{AB},r_{CD})=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}-1 & -4 & 3\\ -2 & -2 & 1\\ -3 & 3 & -1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(-12)^2}}=\frac{|-15|}{\sqrt{170}}=\boxed{\frac{15}{\sqrt{170}}}$$

29.- Consideremos los puntos P = (1,2,0) , Q = (1,0,1) y R(1,0,0). Se pide:

a) Demostrar que son los vértices de un triángulo rectángulo y calcula la longitud de cada cateto y el *área del triángulo*.

b) La *ecuación del plano* que los contiene.

c) Un punto T de manera que los puntos P, Q, R y T sean los vértices de un rectángulo.

***Solución*:**

a) El triángulo PQR será rectángulo si son perpendiculares algún entre los vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = (0,-2,1), \quad \overrightarrow{PR} = (0,-2,0), \quad \overrightarrow{QR} = (0,0,-1)$$

$\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QR} = 0\cdot 0 - 2\cdot 0 + 0\cdot(-1) = 0$, luego los vectores $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$ son perpendiculares.

Longitud de los catetos:

$$\left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{0^2+(-2)^2+0^2} = \boxed{2}; \quad \left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{0^2+0^2+(-1)^2} = \boxed{1}$$

Área del triángulo:

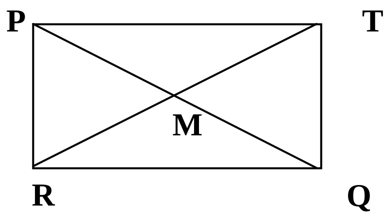
$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PR}\right|\cdot\left|\overrightarrow{QR}\right| = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = \boxed{1}\ u^2$$

b) Ecuación del plano que contiene a los puntos P, Q y R:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

c) Si T (a, b, c) es el punto pedido, como las diagonales se cortan en su punto medio:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} \Rightarrow a = 1 \\ \dfrac{b+0}{2} = \dfrac{2+0}{2} \Rightarrow b = 2 \\ \dfrac{c+0}{2} = \dfrac{0+1}{2} \Rightarrow c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$$\boxed{T = (1,2,1)}$$

30.- Hallar la *distancia* del punto P=(1,4,5) a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-3}{3}$.

Solución:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

De la recta r obtenemos: $A = (1,2,3) \in r; \vec{v} = (2,1,3)$ formamos $\overrightarrow{AP} = (0,2,2)$ y calculamos $\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (4,4,-4)$ cuyo módulo es: $\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{3}$ que junto con el módulo $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ se tiene que $d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\right|}{|\vec{v}|} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{2\sqrt{42}}{7}}$

31.- Sea el punto P(1,4,5) donde está situado un semáforo en el borde de la calzada de una calle cuyo eje sigue una línea *recta* de ecuación $\frac{x-1}{2} = y-3 = \frac{z-1}{5}$. Hallar el punto P' *simétrico* del P respecto del eje de la calle donde colocar el otro semáforo. ¿Cuál es la anchura de la calle?

Solución:

Procedimiento a seguir:

1. Plano perpendicular a la recta y que contiene al punto.
2. Intersección de recta y plano.
3. Simétrico del punto dado respecto del obtenido por intersección.

De la recta dada conocemos el vector director $\vec{v} = (2,1,5)$ que utilizamos como vector normal al plano pedido.

1. Haz de planos paralelos entre sí y perpendiculares a la recta dada: 2x+y+5z=k; si además contiene al punto (1,4,5) resulta 2.1+4+5.5=31=k. El plano es $\pi \equiv 2x + y + 5z = 31$.
2. La recta dada en forma paramétrica es $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+t \\ z = 1+5t \end{cases}$ que sustituyendo en la ecuación del plano

$$2(1+2t)+(3+t)+5(1+5t) = 31 \Rightarrow 30t = 21 \Rightarrow t = \frac{7}{10}$$ que en la recta da

$$\begin{cases} x = 1+2\frac{7}{10} = \frac{12}{5} \\ y = 3+\frac{7}{10} = \frac{37}{10} \\ z = 1+5\frac{7}{10} = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow O = \left(\frac{12}{5}, \frac{37}{10}, \frac{9}{2}\right)$$

3. El simétrico de P es el punto P' siendo O el punto medio del segmento PP', luego, P'=2.O-

$$P = 2\left(\frac{12}{5}, \frac{37}{10}, \frac{9}{2}\right) - (1,4,5) = \boxed{\left(\frac{19}{5}, \frac{17}{5}, 4\right)}$$

Para la anchura basta calcular la distancia entre los puntos P y P':

$$d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \left|\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}\right| = \left|\left(\frac{14}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{14}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + (-1)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{230}}{5}}$$

32.- La base de un árbol está situada en el punto P(1,2,3) próxima a un muro de ecuación x-3y-2z+4=0. Hallar las *coordenadas* del punto P' en el cual se desea colocar otro árbol *simétrico* al del punto P respecto del muro.

Solución:

Procedimiento a seguir:

1. Recta perpendicular al plano y que contiene al punto.
2. Intersección de recta y plano.
3. Simétrico del punto dado respecto del obtenido por intersección.

1. En este caso el vector normal al plano $\vec{n}=(1,-3,-2)$ nos sirve para determinar la dirección de la recta perpendicular: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=3-2t \end{cases}$

2. Sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano

   $(1+t)-3(2-3t)-2(3-2t)+4=0 \Rightarrow -7+14t=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$ que en la recta queda

$$\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ y=2-3\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow O\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},2\right) \\ z=3-2\frac{1}{2}=2 \end{cases}$$

3. El simétrico de P es el punto P' siendo O el punto medio del segmento PP', luego,

$$P'=2.O-P=2\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},2\right)-(1,2,3)=\boxed{(2,-1,1)}$$

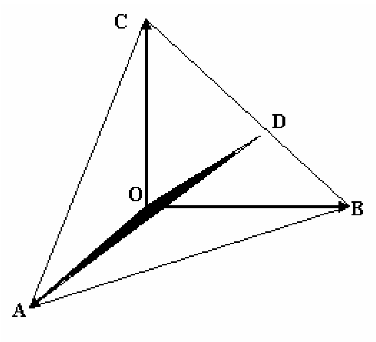
33.- Considérese el *tetraedro* de vértices O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,1). Hallar un *plano* que contenga al lado AB y que divida al *tetraedro* en dos partes de igual volumen.

Solución:

El volumen del tetraedro es igual a un 1/6 del volumen del paralelepípedo que forman los vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB},$ y $\overrightarrow{OC}$:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}$$

La mitad del volumen será: $\frac{1}{2}V = \frac{1}{2}\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$



El punto D pertenece a la recta que pasa por B y C:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + t\cdot\overrightarrow{BC} = (0,1,0) + t(0,-1,1) = (0,1-t,t)$$

Ahora**,** el volumen del tetraedro es igual a un 1/6 del volumen del paralelepípedo que forman los vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB},$ y $\overrightarrow{OD}$ y éste debe ser la mitad del anterior:

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OD}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{vmatrix} = \frac{1}{6}t \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow D = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

El plano que pasa por O, A y D: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO} + t\cdot\overrightarrow{OA} + s\cdot\overrightarrow{OD}$

(x,y,z)=(0,0,0)+t·(1,0,0)+s·(0,1/2,1/2)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \Leftrightarrow \boxed{-y+z=0}$$

34.- Dos caras de un cubo están en los planos x+2y+2z=1, x+2y+2z=7. Calcular el volumen del cubo.

Solución:

Obviamente los planos son paralelos y la distancia entre ambos es la arista del cubo. Tomamos un punto P(1,0,0) del plano x+2y+2z=1 y calculamos la distancia del punto P al otro plano:

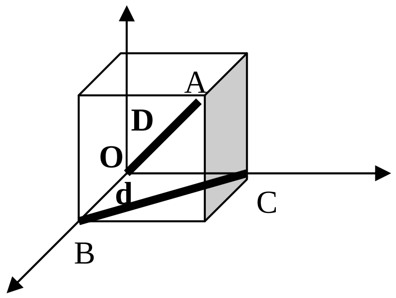
La distancia de P a π viene dada por: $d(P,\pi)=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ siendo el plano $\pi\equiv ax_1+bx_2+cx_3+d=0$ y el punto $P=(p_1,p_2,p_3)$.

En nuestro caso, $d(P,\pi)=\frac{|1\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 2-7|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2$

Y el volumen del cubo de arista 2 es 2^3=**8**

35.- Se considera una diagonal D de un cubo y una diagonal d de una de sus caras de tal forma que las *rectas* que contienen D y d se cruzan. Hallar la *distancia* entre ambas rectas.

Solución:



Consideremos un vértice en el origen O(0,0,0) y el otro en A(a,a,a) que forman la diagonal D de un cubo de arista a; entonces, los vértices de la diagonal d son B(a,0,0) y C(0,a,0). Las ecuaciones de las rectas que contienen a D y d, respectivamente, son:

$$r_D \equiv \begin{cases} x = \lambda a \\ y = \lambda a \\ z = \lambda a \end{cases};\ r_d \equiv \begin{cases} x = a - \mu a \\ y = \mu a \\ z = 0 \end{cases}, \text{ ya que } \overrightarrow{BC} = (-a, a, 0)$$

Como las rectas se cruzan la distancia es:

$$d(r_D, r_d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{BC}\right|}$$

Sabemos que V= $\left|\left[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}\right]\right| = \left\| \begin{matrix} a & 0 & 0 \\ a & a & a \\ -a & a & 0 \end{matrix} \right\| = \left|-a^3\right| = a^3$, puesto que es el volumen de un cubo de arista a.

Y el producto vectorial,

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & a \\ -a & a & 0 \end{vmatrix} = \left(-a^2, -a^2, 2a^2\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{a^4 + a^4 + 4a^4} = \sqrt{6} \cdot a^2$$

y sustituyendo en la fórmula

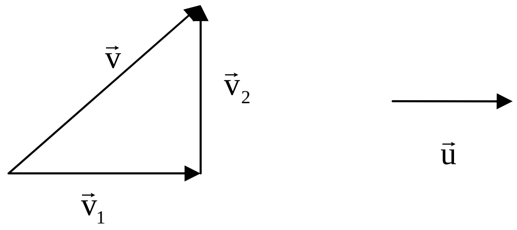
$$d(r_D, r_d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{BC}\right|} = \frac{a^3}{\sqrt{6} \cdot a^2} = \frac{a}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6} a}$$

36.- Expresar $\vec{v}$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ paralelo a $\vec{u}$ y otro $\vec{v}_2$ perpendicular a $\vec{u}$ para un vector $\vec{u}$ cualquiera.

En particular, para $\vec{v}=(1,-1,0)$ y $\vec{u}=(1,3,0)$.

Solución:

Las condiciones dadas se expresan mediante un sistema de ecuaciones vectoriales:



$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \exists\lambda \,/\, \vec{v}_1=\lambda\vec{u} \\ \vec{v}_2 \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}_2\cdot\vec{u}=0 \end{array}\right\}$$

resolvemos el sistema despejando $\vec{v}_2$ en la primera ecuación y sustituyéndolo en la tercera:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}-\vec{v}_1=\vec{v}_2 \\ \\ \vec{v}_1=\lambda\vec{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_2\cdot\vec{u}=\left(\vec{v}-\vec{v}_1\right)\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}_1\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{v}_1\cdot\vec{u}$$

y por la segunda ecuación,

$$\vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{v}_1\cdot\vec{u} \underset{\vec{v}_1=\lambda\vec{u}}{\Rightarrow} \vec{v}\cdot\vec{u}=\lambda\vec{u}\cdot\vec{u} \Rightarrow \lambda=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

con lo cual, conocido el valor de $\lambda=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ ya podemos determinar cada sumando:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}_1=\lambda\vec{u}=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} \\ \\ \vec{v}_2=\vec{v}-\vec{v}_1=\vec{v}-\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{v}=\underbrace{\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}}_{\vec{v}_2}+\underbrace{\vec{v}-\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}}_{\vec{v}_2}}$$

En particular, para $\vec{u}=(1,3,0)$ y $\vec{v}=(1,-1,0)$ se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}\cdot\vec{u}=(1,-1,0)\cdot(1,3,0)=1-3=-2 \\ \vec{u}\cdot\vec{u}=(1,3,0)\cdot(1,3,0)=1+9=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\frac{-2}{10}=-\frac{1}{5}$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}_1=\lambda\vec{u}=-\dfrac{1}{5}(1,3,0)=\left(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{3}{5},0\right) \\ \\ \vec{v}_2=\vec{v}-\vec{v}_1=(1,-1,0)-\left(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{3}{5},0\right)=\left(\dfrac{6}{5},-\dfrac{2}{5},0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{v}=\left(-\frac{1}{5},-\frac{3}{5},0\right)+\left(\frac{6}{5},-\frac{2}{5},0\right)}$$

37.- Hallar la ecuación de la *recta* que pasa por el punto (0,1,-3) y que forma con la parte positiva de cada *eje* coordenado los siguientes ángulos: $\alpha=90°$, $\beta=30°$, $\gamma=60°$.

Solución:

El vector director de la recta referido a los ejes coordenados es:

$\vec{v}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\cos 90^{\circ},\cos 30^{\circ},\cos 60^{\circ})=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ o bien, el vector proporcional $\left(0,\sqrt{3},1\right)$ resultando la recta de ecuación:

$$r\equiv(x,y,z)=(0,1,-3)+\lambda\left(0,\sqrt{3},1\right)\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}x=0\\y=1+\sqrt{3}\lambda\\z=-3+\lambda\end{cases}}$$

38. Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$; s: $x = y = \frac{z-1}{2}$. Se pide:

a) Estudiar si se cortan o cruzan.

b) *Ecuación del plano* en forma implícita que contiene a s y es paralelo a r.

c) *Ecuaciones paramétricas* de todas las *rectas* que se apoyan en r y s.

d) Entre todas las *rectas* del apartado anterior, encontrar una que sea paralela al *plano* x + y + z - 3 = 0. Dar la solución en paramétricas.

d) *Distancia* entre r y s.

Solución:

De cada recta consideramos un punto y el vector director:

$$r:\begin{cases} A(1,0,1) \\ \vec{u} = (1,2,3) \end{cases} \qquad s:\begin{cases} B(0,0,1) \\ \vec{v} = (1,1,2) \end{cases}$$

a) $\text{Rango}(\vec{u}, \vec{v}) = 2$, pues no son proporcionales.

$$\text{rango}\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 3, \text{ ya que } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \boxed{\textbf{SE CRUZAN}}$$

b) Del plano pedido conocemos la recta s que está contenida en él y el vector director de r:

$$\pi:\begin{cases} B(0,0,1) \\ \vec{u}=(1,2,3) \\ \vec{v} = (1,1,2) \end{cases}$$

Una ecuación implícita:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 = \boxed{\mathbf{x + y - z + 1 = 0}}$$

c) Escribimos las ecuaciones de las rectas en forma paramétricas.

Punto genérico de r: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$ Punto genérico de s: $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$

Luego una recta que se apoye en r y s será la que pase por estos dos puntos R y S.

$$\overrightarrow{RS} = (\mu - 1 - \lambda\ ,\ \mu - 2\lambda\ ,\ 1 + 2\mu - 1 - 3\lambda)$$

y pasa por el punto $S = (\mu\ ,\ \mu\ ,\ 1 + 2\mu)$

Ecuación paramétricas de la recta pedida:

$$\boxed{\begin{cases} x = \mu + (\mu - 1 - \lambda)t \\ y = \mu + (\mu - 2\lambda)t \\ z = 1 + 2\mu + (2\mu - 3\lambda)t \end{cases}}$$

d) Para que la recta determinada por R y S sea paralela al plano x + y + z -3 = 0 tiene que cumplir: $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{n} = 0$

$$(\mu - 1 - \lambda\ ,\ \mu - 2\lambda\ ,\ 2\mu - 3\lambda) \cdot (1,\ 1,\ 1) = 0 \Rightarrow 6\lambda - 4\mu + 1 = 0$$

Una de las rectas pedidas puede ser:

$$\text{Si } \mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \left(-1 + \frac{1}{6}\right)t = -\frac{5}{6}t \\ y = 2 \cdot \frac{1}{6}t = \frac{1}{3}t \\ z = 1 + \frac{3}{6}t = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases}}$$

$$\textbf{e)}\ d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \vec{u},\ \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|(1,1,-1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

39.- Se quiere construir un tendedero con una cuerda desde el punto P (0,1,1) hasta la *recta* r: $\begin{cases} 2x+3y+z-5=0 \\ -5y-z-10=0 \end{cases}$ de modo que la longitud de la cuerda sea la menor posible. Determinar el punto de la *recta* r donde debe ir la cuerda y la longitud de dicha cuerda.

Solución:

Procedimiento a seguir:

1. Plano perpendicular a la recta y que contiene al punto.
2. Intersección de recta y plano.

De la recta dada conocemos el vector director $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = (2,2,-10)$ paralelo a (1,1,-5)

que utilizamos como vector normal al plano pedido.

1. Haz de planos paralelos entre sí y perpendiculares a la recta dada x+y-5z=k; que además contenga al punto P (0,1,1) resulta 0+1-5·1=-8=k. El plano $\pi \equiv x + y - 5z = -4$.
2. Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la ecuación del plano

$$\begin{cases} \pi \equiv x + y - 5z + 4 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} 2x+3y+z-5=0 \\ -5y-z-10=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q = \left(\frac{47}{9}, -\frac{41}{18}, \frac{25}{18}\right)}$$

La longitud de la cuerda es:

$$d(P,r) = d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\left(\frac{47}{9}, -\frac{59}{18}, \frac{7}{18}\right)\right| = \boxed{\frac{\sqrt{1374}}{6}}$$

40.- Hallar en el *eje* OX un punto equidistante de los dos planos 2x+2y+z=0; -x+2y+2z=6.

Solución:

Cualquier punto del eje OX es de la forma P(x,0,0) y sabemos que la distancia de P a π viene dada por: $d(P,\pi)=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ siendo el plano $\pi\equiv ax_1+bx_2+cx_3+d=0$ y el punto $P=(p_1,p_2,p_3)$.

En nuestro caso,

$$d(P,\pi)=\frac{|x\cdot 2+0\cdot 2+0\cdot 1|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{|x\cdot(-1)+0\cdot 2+0\cdot 2-6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\Leftrightarrow|2x|=|-x-6|\Leftrightarrow x=\begin{cases}-2\\6\end{cases}$$

Por tanto, obtenemos dos soluciones **P(-2,0,0) y P(6,0,0**)

41.- Hallar los *ángulos* que la recta de ecuaciones x+y+z=1, 2x-y+z=0, forma con los *planos coordenados*.

Solución:

Sean la recta $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y el plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$. Se verifica, entonces, que:

$$\operatorname{sen}(\widehat{r,\pi}) = \frac{|v_1 a + v_2 b + v_3 c|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

De la recta dada $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$, obtenemos el vector director $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,1,-3)$.

- Para el plano YOZ de ecuación x=0:

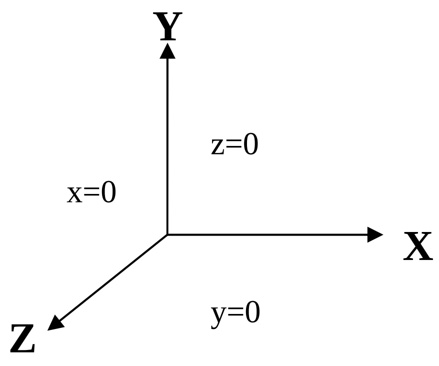
$$\operatorname{sen}(\widehat{r,\pi_{x=0}}) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{14}}}$$

- Para el plano XOZ de ecuación y=0:

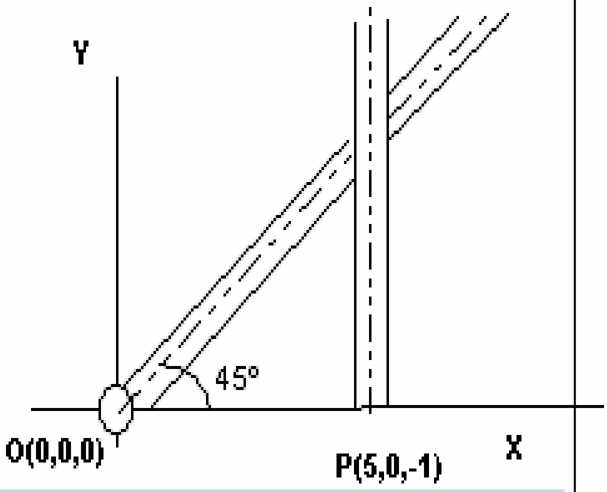
$$\operatorname{sen}(\widehat{r,\pi_{y=0}}) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{14}}}$$

- Para el plano XOY de ecuación z=0:

$$\operatorname{sen}(\widehat{r,\pi_{z=0}}) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{14}}}$$



42.- Se necesita colocar una tubería *recta* que tenga la menor inclinación posible para poder ir por debajo de una conducción de gas y debe estar a una *distancia* no menor de 1 metro. El *eje* de la conducción de gas es horizontal y está a una profundidad constante de 1 metro.



Determinar la inclinación mínima para colocar la tubería. Una vez colocada la tubería se desea conectarla con la conducción de gas empleando un tubo de 1 metro de longitud, ¿dónde se realiza la conexión?

Solución:

La dirección de la tubería que parte del origen O es: $\vec{v} = (1,1,t)$, ya que viene indicada por los 45º entre los ejes OX y OY y desconocemos la inclinación.

La dirección paralela al eje OY es: $\vec{u} = (0,1,0)$.

Si consideramos que las tuberías son rectas, se trata de imponer la condición de que la separación entre ellas sea como mínimo de 1 metro, es decir, que la distancia entre ellas sea de 1 m.

$$d(r,s) = \left| \frac{\left[\overrightarrow{OP},\ \vec{u},\ \vec{v}\right]}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} \right| = \frac{\left\| \begin{matrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \end{matrix} \right\|}{|(t,0,-1)|} = \frac{|5t+1|}{\sqrt{t^2+1}} = 1 \Leftrightarrow (5t+1)^2 = 4t^2+4 \Rightarrow \boxed{t = -\frac{5}{12}}$$

Luego la tubería debe tener la dirección $\vec{v} = \left(1,1,-\frac{5}{12}\right)$.

El ángulo que forma con el suelo, es decir, con el plano XOY de ecuación z=0:

$$\operatorname{sen}(\widehat{r,\pi_{z=0}})=\frac{\left|1\cdot 0+1\cdot 0-\frac{5}{12}\cdot 1\right|}{\sqrt{1^2+1^2+\left(-\frac{5}{12}\right)^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{313}}\Rightarrow\boxed{\alpha=16^{\circ}\,24'59''}$$

Tenemos dos tuberías que siguen la trayectoria de las siguientes rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=-\frac{5}{12}\lambda\end{cases};s\equiv\begin{cases}x=5\\ y=\mu\\ z=-1\end{cases}$$

Buscamos los puntos de cada recta que miden la mínima distancia; para ello, consideramos un punto genérico de cada recta:

$$A=\left(\lambda,\lambda,-\frac{5}{12}\lambda\right)\in r;B=(5,\mu,-1)$$

y formamos un vector:

$$\overrightarrow{AB}=\left(5-\lambda,\mu-\lambda,-1-\frac{5}{12}\lambda\right)$$

que debe ser perpendicular a ambas rectas, luego el producto escalar con cada vector director será cero:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=\left(5-\lambda,\mu-\lambda,-1-\frac{5}{12}\lambda\right)\cdot\left(1,1,-\frac{5}{12}\right)=5-\lambda+\mu-\lambda-\frac{5}{12}\left(-1-\frac{5}{12}\lambda\right)=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=\left(5-\lambda,\mu-\lambda,-1-\frac{5}{12}\lambda\right)\cdot(0,1,0)=\mu-\lambda=0$$

y resolviendo el sistema anterior, obtenemos,

$$\lambda=\mu=\frac{60}{13}$$

que sustituyéndolos

$$A=\left(\lambda,\lambda,-\frac{5}{12}\lambda\right)=\boxed{\left(\frac{60}{13},\frac{60}{13},-\frac{25}{13}\right)};B=(5,\mu,-1)=\boxed{\left(5,\frac{60}{13},-1\right)}$$

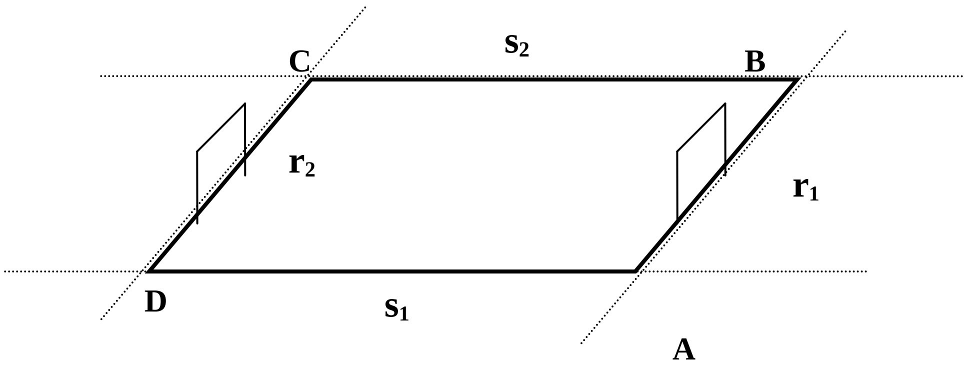
43.- Dadas las rectas que delimitan un campo de balonmano:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases};\ r_2 \equiv \begin{cases} x = -49+3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases};\ s_1 \equiv \begin{cases} x = 5-4t \\ y = -3+3t \\ z = 1 \end{cases};\ s_2 \equiv \begin{cases} x = -11-4t \\ y = -16+3t \\ z = 1 \end{cases}$$

y sabiendo que la escuadra de la portería está situada en el punto $\left(-\frac{41}{10}, -\frac{34}{5}, 3\right)$. Se pide:

a) La ecuación del *plano* del campo.
b) Los vértices que forman el campo.
c) Las dimensiones del campo.
d) La situación del portero cuando se lanza un penalti.
e) La altura de la portería.
f) La anchura de la portería.
g) Las ecuaciones de las *rectas* de los postes de la portería.

Solución:



a) Obviamente, las rectas son paralelas dos a dos y coplanarias y el plano común es **z=1**.

b) La intersecciones de las rectas r y s nos dan los cuatro vértices:

$$A \equiv r_1 \cap s_1 \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases} \cap \begin{cases} x = 5-4s \\ y = -3+3s \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (1,0,1)}$$

$$B \equiv r_1 \cap s_2 \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases} \cap \begin{cases} x = -11-4s \\ y = -16+3s \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = (-11,-16,1)}$$

$$C \equiv r_2 \cap s_2 \equiv \begin{cases} x = -49+3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases} \cap \begin{cases} x = -11-4s \\ y = -16+3s \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C = (-43,8,1)}$$

$$D \equiv r_2 \cap s_1 \equiv \begin{cases} x = -49+3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases} \cap \begin{cases} x = 5-4s \\ y = -3+3s \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D = (-31,24,1)}$$

c) Las dimensiones del campo son las distancias entre las rectas paralelas

Al ser paralelas la distancia entre ellas es la distancia de P a r que viene dada por: $d(P,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$ siendo la recta $r \equiv \dfrac{x-x_0}{v_1} = \dfrac{y-y_0}{v_2} = \dfrac{z-z_0}{v_3}$ (un punto cualquiera $A(x_0,y_0,z_0)$ y el vector director $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ de la recta) y el punto $P = (p_1,p_2,p_3)$.

Para: $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases}$; $r_2 \equiv \begin{cases} x = -49+3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases}$ tenemos que: $A = (1,0,1); P = (-49,0,1); \vec{v} = (3,4,0)$

$$\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -50 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-200) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\right| = 200$$

$$|\vec{v}| = |(3,4,0)| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = 5$$

$$d(r_1,r_2) = d(P,r_1) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\right|}{|\vec{v}|} = \frac{200}{5} = \boxed{40}$$

Para: $s_1 \equiv \begin{cases} x = 5-4t \\ y = -3+3t \\ z = 1 \end{cases}$; $s_2 \equiv \begin{cases} x = -11-4t \\ y = -16+3t \\ z = 1 \end{cases}$ tenemos que:

$$A = (5,-3,1); P = (-11,-16,1); \vec{v} = (-4,3,0)$$

$$\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -16 & -13 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-100) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\right| = 100$$

$$|\vec{v}| = |(4,-3,0)| = \sqrt{4^2+(-3)^2+0^2} = 5$$

$$d\left(s_1,s_2\right)=d(P,s_1)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}=\frac{100}{5}=\boxed{20}$$

Las dimensiones son **20x40**.

d) Se supone que cuando se lanza un penalti el portero se sitúa en el medio de la portería, en nuestro campo las porterías estarán situadas en las rectas r_1 y r_2 y por tanto en los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$:

Primer portero:

$$P_1=\frac{A+B}{2}=\frac{(1,0,1)+(-11,-16,1)}{2}=\boxed{(-5,-8,1)}$$

Segundo portero:

$$P_2=\frac{C+D}{2}=\frac{(-43,8,1)+(-31,24,1)}{2}=\boxed{(-37,16,1)}$$

e) La altura de la portería será la distancia del punto $E=\left(-\frac{41}{10},-\frac{34}{5},3\right)$ al plano, z-1=0, que forma el campo:

La distancia de P a π viene dada por: $d(P,\pi)=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ siendo el plano $\pi\equiv ax_1+bx_2+cx_3+d=0$ y el punto $P=(p_1,p_2,p_3)$.

En nuestro caso,

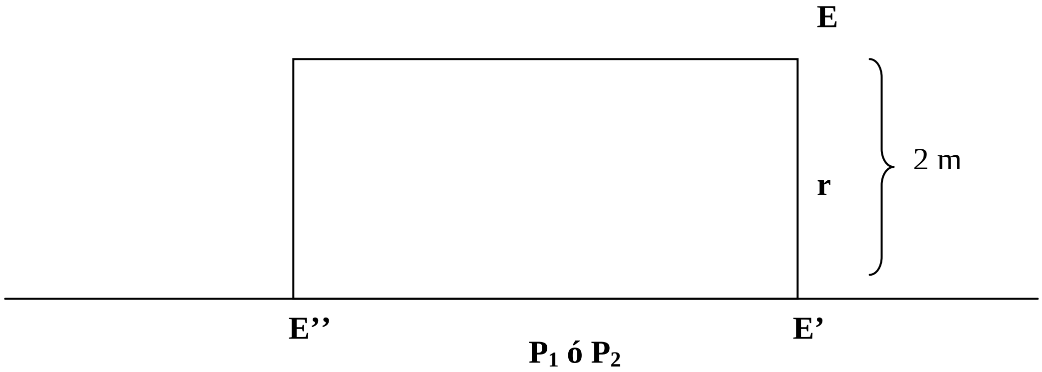
$$d(E,\pi)=\frac{|3-1|}{\sqrt{1^2}}=\boxed{2}$$

f) Para la anchura debemos proyectar el punto E sobre el plano $\pi\equiv$z-1=0 del campo y calcular la distancia de la proyección al punto medio de la portería.

Ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por E:

$$r\equiv\begin{cases}x=-\frac{41}{10}\\ y=-\frac{34}{5}\\ z=3+t\end{cases}\text{ siendo }\vec{n}=(0,0,1)\perp\pi$$

Ahora, intersección con el plano $\pi \equiv z = 1$, entonces $E' = \left(-\frac{41}{10}, -\frac{34}{5}, 1\right)$



Desconocemos sobre qué portería estamos, por ello, calculamos la distancia a los dos porteros:

$$d(P_1, E') = \left|\overrightarrow{P_1E'}\right| = \left|\left(-\frac{41}{10}+5, -\frac{34}{5}+8, 1-1\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + 0^2} = \frac{3}{2}$$

$$d(P_2, E') = \left|\overrightarrow{P_2E'}\right| = \left|\left(-\frac{41}{10}+37, -\frac{34}{5}-16, 1-1\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{329}{10}\right)^2 + \left(-\frac{114}{5}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{6409}}{2} \approx 40$$

La anchura de la portería es:

$$d(E'', E') = 2 \cdot d(P_1, E') = 2 \cdot \frac{3}{2} = \boxed{3}$$

ya que la otra opción excede a las dimensiones del campo.

g) Todos los postes tienen como vector director $\vec{n} = (0,0,1) \perp \pi$, es decir, perpendiculares al campo y conocemos uno de ellos,

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = -\frac{41}{10} \\ y = -\frac{34}{5} \\ z = 3 + t \end{cases}}.$$

El simétrico respecto del portero será el que pase por E’’:

$$E'' = 2P_1 - E' = 2(-5, -8, 1) - \left(-\frac{41}{10}, -\frac{34}{5}, 1\right) = \left(-\frac{59}{10}, -\frac{46}{5}, 1\right)$$

y la ecuación del poste:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{59}{10} \\ y = -\dfrac{46}{5} \\ z = 1 + t \end{cases}}$$

Para la otra portería, los puntos deben estar a 3/2 del portero sobre la recta r_2:

$$d(P_2, X) = \left|\overrightarrow{P_2X}\right| = \left|(x+37, y-16, z-1)\right| = \sqrt{(x+37)^2 + (y-16)^2 + (z-1)^2} = \frac{3}{2}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = -49 + 3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases}$$

resolviendo el sistema anterior:

$$\sqrt{(-49+3t+37)^2 + (4t-16)^2 + 0^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 5|t-4| = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \begin{cases} \dfrac{43}{10} \Rightarrow \left(-\dfrac{361}{10}, \dfrac{86}{5}, 1\right) \\ \dfrac{37}{10} \Rightarrow \left(-\dfrac{379}{10}, \dfrac{74}{5}, 1\right) \end{cases}$$

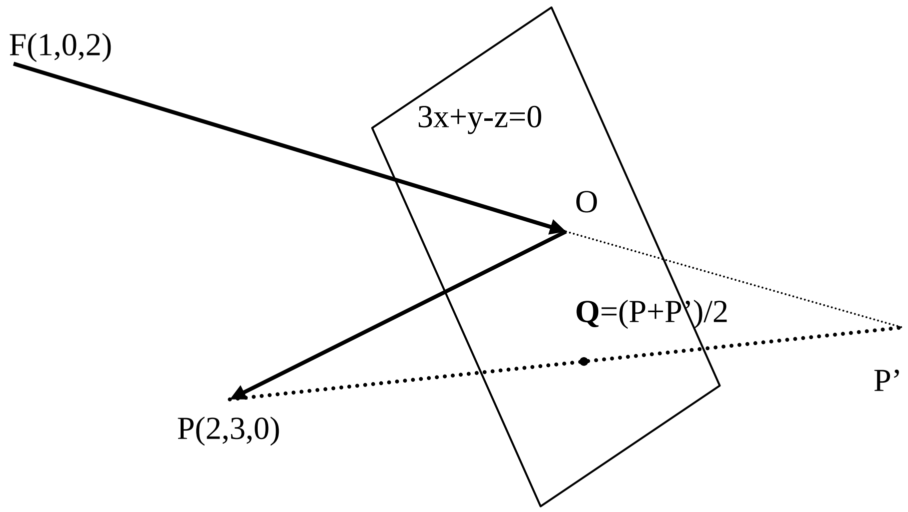
y las ecuaciones de los postes:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{361}{10} \\ y = \dfrac{86}{5} \\ z = 1 + t \end{cases}} \quad \boxed{r \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{379}{10} \\ y = \dfrac{74}{5} \\ z = 1 + t \end{cases}}$$

44.- Determinar la longitud de un rayo de luz que parte del foco F=(1,0,2) es reflejado por un espejo *plano* de ecuación 3x+y-z=0 y acaba en el punto P=(2,3,0).

Solución:

Para determinar la longitud total del recorrido del rayo de luz basta con encontrar el punto simétrico respecto del plano.



La distancia total es d(F,O)+d(O,P)= d(F,O)+d(O,P')= d(F,P') de tal forma que P' es el punto simétrico de P respecto del plano.

Procedimiento a seguir para hallar el simétrico de P respecto de π:

1. Recta perpendicular al plano π y que contiene al punto P.
2. Intersección de recta y plano, es el punto Q.
3. Punto simétrico de P respecto del Q.

1.- Del plano $\pi \equiv 3x + y - z = 0$ conocemos vector normal al plano que es el vector director de la recta buscada junto con el punto P(2,3,0) forman las ecuaciones de la recta en forma paramétrica: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases}$

2.- Recta que sustituyendo en la ecuación del plano:

$$3(2+3t)+(3+t)-(-t)=0 \Rightarrow 11t=-9 \Rightarrow t=-\frac{9}{11}$$

que en la recta da:

$$\left\{\begin{array}{l} x=2+3\left(-\frac{9}{11}\right)=-\frac{5}{11} \\ y=3-\frac{9}{11}=\frac{24}{11} \\ z=-\left(-\frac{9}{11}\right)=\frac{9}{11} \end{array}\right. \Rightarrow Q=\left(-\frac{5}{11},\frac{24}{11},\frac{9}{11}\right)$$

3.- Como Q es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$:

$$P'=2Q-P=2\left(-\frac{5}{11},\frac{24}{11},\frac{9}{11}\right)-(2,3,0)=\left(-\frac{32}{11},\frac{15}{11},\frac{18}{11}\right)$$

La longitud total recorrida por el rayo es:

$$d(F,P')=\left|\overrightarrow{FP'}\right|=\left|\left(-\frac{32}{11},\frac{15}{11},\frac{18}{11}\right)\right|=\boxed{\sqrt{13}}$$

45.- En el *espacio afín* real A_3 respecto de una *referencia* canónica $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se consideran los puntos:

$O' = (1, 2, 0)$, $A=(-2, 0, 1)$, $B =(-1, 3, 1)$ y $C=(2, 3, 0)$.

Sea $R' = \{O', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ una *referencia* cuyos ejes son las *rectas* O'A, O'B, O'C.

a) Determinar R' sabiendo que un punto D tiene de *coordenadas* (1,1/3,1/4), en la *referencia* R y (1, 2, 3) en R'.

b) Hallar las ecuaciones del cambio de *coordenadas* de R en R'.

***Solución*:**

a)

$\overrightarrow{O'A} = (-2, 0, 1) - (1, 2, 0) = (-3, -2, 1)$

$\overrightarrow{O'B} = (-1, 3, 1) - (1, 2, 0) = (-2, 1, 1)$,

$\overrightarrow{O'C} = (2, 3, 0) - (1, 2, 0) = (1, 1, 0)$

Por tanto: $\vec{u} = (-3\lambda, -2\lambda, \lambda)$, $\vec{v} = (-2\mu, \mu, \mu)$, $\vec{w} = (\nu, \nu, 0)$

Cambio de referencia de R' a R (y sustituir x = 1, y = 1/3, z = ¼, x' = 1, y' = 2, z' = 3)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\lambda & -2\mu & \nu \\ -3\lambda & \mu & \nu \\ \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\lambda & -2\mu & \nu \\ -3\lambda & \mu & \nu \\ \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{29}{24} \\ \mu = -\dfrac{23}{48} \\ \nu = \dfrac{41}{72} \end{array}\right\}$$

Luego:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{29}{8} & \dfrac{23}{24} & \dfrac{41}{72} \\ -\dfrac{29}{12} & -\dfrac{23}{48} & \dfrac{41}{72} \\ \dfrac{29}{24} & -\dfrac{23}{48} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

b) O bien,

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-\dfrac{29}{8}&\dfrac{23}{24}&\dfrac{41}{72}\\2&-\dfrac{29}{12}&-\dfrac{23}{48}&\dfrac{41}{72}\\0&\dfrac{29}{24}&-\dfrac{23}{48}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-\dfrac{29}{8}&\dfrac{23}{24}&\dfrac{41}{72}\\2&-\dfrac{29}{12}&-\dfrac{23}{48}&\dfrac{41}{72}\\0&\dfrac{29}{24}&-\dfrac{23}{48}&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Simplificando:

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\dfrac{12}{29}&\dfrac{12}{29}&-\dfrac{12}{29}&\dfrac{36}{29}\\\dfrac{24}{23}&\dfrac{24}{23}&-\dfrac{24}{23}&\dfrac{24}{23}\\-\dfrac{36}{41}&\dfrac{108}{41}&-\dfrac{36}{41}&\dfrac{252}{41}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}}$$

Que son las ecuaciones del cambio de coordenadas de R a R’

46.-Dados los puntos A=(3,2,0), B=(1,0,1), C=(2,-2,3), y D(-1,1,2). Se pide:

a) Demostrar que R={A,B,C,D} es un sistema de *referencia* afín del espacio

b) Escribir las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a la canónica.

c) Escribir las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a R'={A'(1,1,1), B'(1,0,0), C'(2,2,2),D'(0,1,0)}

d) Si P =(1,1,1), hallar sus *coordenadas* en R y en R'

e) Escribir las ecuaciones del *plano* π: x+2y+3z-6 =0 en R y en R'

f) Escribir las ecuaciones de la *recta* normal al *plano* π que pasa por P, tanto en la *referencia* canónica y como en R.

Solución:

a) Escribiremos los vectores $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ en una matriz por columnas:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ \underbrace{0}_{A} & \underbrace{1}_{B} & \underbrace{3}_{C} & \underbrace{2}_{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & -1 \\ \underbrace{1}_{\overrightarrow{AB}} & \underbrace{3}_{\overrightarrow{AC}} & \underbrace{2}_{\overrightarrow{AD}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & -1 \\ \underbrace{1}_{\overrightarrow{AB}} & \underbrace{3}_{\overrightarrow{AC}} & \underbrace{2}_{\overrightarrow{AD}} \end{vmatrix}=15\neq 0$$

Los puntos A, B, C y D son linealmente independientes, puesto que el determinante es distinto de cero

Matriz del cambio de la base $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right\}$ a la base canónica:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Cambio de referencia de R a la canónica:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

c) Matriz del cambio de la base $B'=\left\{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'D'}\right\}$ a la base canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ \underbrace{1}_{A'} & \underbrace{0}_{B'} & \underbrace{2}_{C'} & \underbrace{0}_{D'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \underbrace{-1}_{\overrightarrow{A'B'}} & \underbrace{1}_{\overrightarrow{A'C'}} & \underbrace{-1}_{\overrightarrow{A'D'}} \end{pmatrix}$$

cambio del sistema de referencia de R` a la referencia canónica

$$\begin{pmatrix}1\\x_c\\y_c\\z_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&-1\\1&-1&1&0\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

Igualando ambos cambios:

$$\begin{pmatrix}1\\x_c\\y_c\\z_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&-2&-1&-4\\2&-2&-4&-1\\0&1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&-1\\1&-1&1&0\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&-1\\1&-1&1&0\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&-2&-1&-4\\2&-2&-4&-1\\0&1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

cambio del sistema de referencia de R a la referencia R'

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&-3&-4&-6\\4&-5&-8&-7\\2&-3&-7&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}}$$

d)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&-3&-4&-6\\4&-5&-8&-7\\2&-3&-7&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&-3&-4&-6\\4&-5&-8&-7\\2&-3&-7&-3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\boxed{\frac{1}{3}}\\\boxed{0}\\\boxed{\frac{1}{3}}\end{pmatrix}$$

P=(1/3,0,1/3) en R, puesto que el punto P es igual al punto A' origen del sistema de referencia R' es: **P=(0,0,0)**

e)

$$\begin{pmatrix}1\\x_c\\y_c\\z_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&-2&-1&-4\\2&-2&-4&-1\\0&1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_c=3-2x-y-4z\\y_c=2-2x-4y-z\\z_c=\quad x+3y+2z\end{cases}$$

$\mathbf{x_c+2y_c+3z_c-6}$ =(- 2x - y - 4z + 3) + 2·(-2x - 4y - z + 2) + 3·(x + 3y + 2z) - 6 = 0

1 - 3·x = 0 respecto de R

$$\begin{pmatrix}1\\x_c\\y_c\\z_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&-1\\1&-1&1&0\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_c=1+y'-z'\\y_c=1-x'+y'\\z_c=1-x'+y'-z'\end{cases}$$

$\mathbf{x_c+2y_c+3z_c-6}$ =(y` - z` + 1) + 2·(- x` + y` + 1) + 3·(- x` + y` - z` + 1) - 6 = 0

- 5·x’ + 6·y’ - 4·z’ = 0 respecto de R'

f)
La recta será: **x=1+t, y=1+2t, z=1+3t en la referencia canónica**
Por otra parte, el cambio del vector director:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{3} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{26}{15} \end{pmatrix}$$

Para no escribir fracciones el vector director en la nueva base puede ser el proporcional al anterior. (-70, 21, 26)

La recta en R: x=1/3-70t, y=21t, z=1/3+26t

48.- Sean las rectas $r \equiv x-2=\dfrac{y-1}{k}=\dfrac{z+1}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 2t \end{cases}$

a) Hallar k para que r y s sean *coplanarias*.

b) Para el valor anterior de k, hallar la *ecuación del plano* que contiene a ambas rectas.

c) Para ese mismo valor de k, hallar la ecuación de la recta *perpendicular común* a las rectas dadas.

Solución:

De la recta $r \equiv x-2=\dfrac{y-1}{k}=\dfrac{z+1}{-2}$ consideramos un punto cualquiera P(2,1,-1) y el vector director $\vec{v}$=(1,k,-2) y de la recta s el punto Q(1,2,0) y el vector director $\vec{w}$=(1,-1,2).

a)

Las rectas r y s son coplanarias cuando los vectores $\overrightarrow{PQ}$=(-1,1,1), $\vec{v}$, $\vec{w}$ son linealmente dependientes, es decir,

$\left[\overrightarrow{PQ},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$, entonces $\boxed{\mathbf{k=-1}}$.

b)

Un punto cualquiera y dos vectores linealmente independientes determinan el plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & k=-1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{x+y-3=0}$$

c)

La perpendicular común a dos rectas secantes es la perpendicular en el punto de intersección de ambas rectas.

Resolviendo el sistema $r \equiv x-2=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=2t \end{cases}$ de 5 ecuaciones con 4 incógnitas se obtiene el punto (5/4,7/4,1/2) y la dirección perpendicular la del vector ortogonal al plano que forman r y s, es decir, (1,1,0) se obtiene la recta: $\boxed{s \equiv \begin{cases} x=\dfrac{5}{4}+t \\ y=\dfrac{7}{2}+t \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}}$

49.- Sean los puntos A(0,0,1), B(5,-4,3), C(4,-1,-2) y D(10,-5,-2) referidos al sistema de *referencia* R de un *espacio euclídeo* tridimensional. Se pide:

a) Las ecuaciones del cambio de sistema de *referencia* de R'={A,B,C,D} a R.

b) Indicar si la base $B = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ es una *base ortonormal*.

c) Si x + y + z =0 es la ecuación de un *plano* respecto de R, ¿cuál es la ecuación de dicho plano respecto de la *referencia* R'?

d) El triángulo cuyos vértices son A, B y C se proyecta ortogonalmente sobre el plano x-y=3. Encontrar los vértices y el área del nuevo triángulo.

Solución:

a)

El sistema de referencia R' está constituido por 4 puntos linealmente independientes de tal forma que, el primer punto A(0,0,1) es el origen del sistema y los tres puntos restantes dan lugar a la base $B=\left\{\overrightarrow{AB}=(5,-4,2), \overrightarrow{AC}=(4,-1,-3), \overrightarrow{AD}=(10,-5,-3)\right\}$. Todos ellos referidos al sistema de referencia R, por tanto,

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}_R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&5&4&10\\0&-4&-1&-5\\1&2&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_{R'}}$$

b)

No puede ser ortonormal, pues los vectores no son ni unitarios ni ortogonales dos a dos.

c)

Despejando en el cambio de sistema de referencia tenemos,

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}_R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&5&4&10\\0&-4&-1&-5\\1&2&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_{R'}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\quad 5x'+4y'+10z'\\y=\ -4x'-y'-5z'\\z=1+2x'-3y'-3z'\end{cases}$$, y sustituyendo en el plano:

$$x+y+z=1+3x'+2z'=0$$

$$\boxed{1+3x'+2z'=0}$$

d)

Para proyectar cada punto sobre el plano consideramos la recta perpendicular al plano y que pasa por cada punto obteniendo la intersección:

(x,y,z)=(0,0,1) + t·(1, -1, 0]= (t, -t, 1); x - y = 2·t = 3;t = 3/2; **A'=(3/2, -3/2, 1)**

(x,y,z)=(5,-4,3) + t·(1, -1, 0]= (t + 5, -t - 4, 3); x - y = 3;2·t + 9 = 3;t = -3; **B'=(2, -1, 3)**

(x,y,z)=(4,-1,-2) + t (1, -1, 0]= (t + 4, -t - 1, 2); 2·t + 5 = 3; t = -1; **C'=(3, 0, -2)**

El área es $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\boxed{\frac{9\sqrt{2}}{4}}$

50.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias*:
$R=\{A;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ **y** $R'=\{B;\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$**, donde:**

$$\begin{cases} A=(5,6,7) \\ \vec{u}=(1,2,3) \\ \vec{v}=(1,0,1) \\ \vec{w}=(1,0,0) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} B=(-1,0,0) \\ \vec{u}'=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \vec{v}'=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \vec{w}'=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{cases}$$

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a la canónica y de R´ a la canónica.
b) Análogamente, de R´ a R y de R a R'.
c) Hallar las *coordenadas* del punto B en R y en R'.
d) Hallar la *ecuación del plano* $\pi\equiv$ **x+y+z-18=0 en R.**

***Solución*:**

La matriz de cambio de referencia de R a la canónica es **P** y vale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación del cambio de referencia será $\mathbf{X_c=P\ .\ X_R}$
La matriz de cambio de referencia de R' a la canónica es **Q**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

La ecuación del cambio de referencia será $\mathbf{X_c= Q\ .\ X_{R'}}$

a) Ecuaciones matriciales del cambio de referencia de R a la canónica y de R' a la canónica
Ecuación matricial del cambio de referencia R a la canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}_{\text{canónica}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$$

Siendo (x_c, y_c, z_c) coordenadas de un punto en la referencia canónica y (x, y, z) las coordenadas de ese punto en la referencia R.
Ecuación matricial del cambio de referencia R' a la canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}_{\text{canónica}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{R'}$$

Siendo (x_c, y_c, z_c) coordenadas de un punto en la referencia canónica y (x', y', z') las coordenadas de ese punto en la referencia R'.

b) Ecuación matricial del cambio de referencia de R a R' y de R' a R

Como $X_c=P.X_R$ y $X_c=Q.X_{R'}$, igualando queda: $P.X_R = Q.X_{R'}$ despejando X_R y $X_{R'}$ queda $X_{R'}=Q^{-1}.P.X_R$ y $X_R=P^{-1}.Q.X_{R'}$

La ecuación matricial del cambio de R a R' es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{\sqrt{3}} & 2\sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{\sqrt{3}} & 2\sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$$

ecuación matricial del cambio de R' a R se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{6}} \\ -5 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{2} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{R'}$$

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}_R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&\frac{1}{2\sqrt{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\2&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{4}{\sqrt{6}}\\-5&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\sqrt{2}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_{R'}$$

c) Hallar las coordenadas de B en R y en R'
Como B=(-1,0,0) en la canónica:

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}_R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\5&1&1&1\\6&2&0&0\\7&3&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}_{canónica}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\-5\end{pmatrix}_{R'}$$

(-3,2,-5) son las coordenadas de B en R. Las coordenadas de B en R' son, naturalmente, **(0,0,0)** pues B es el origen de R'

d) Hallar la ecuación del plano x+y+z-18=0 en R
Como se tiene el cambio de referencia de R a la canónica despejando las coordenadas de la canónica

$$\begin{pmatrix}1\\x_c\\y_c\\z_c\end{pmatrix}_{canónica}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\5&1&1&1\\6&2&0&0\\7&3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}_R\Leftrightarrow\begin{cases}x_c=5+x+y+z\\y_c=6+2x\\z_c=7+3x+y\end{cases}$$

y sustituyendo en el plano:

x+y+z-18=18+6x+2y+z-18=0

$6\cdot x+2\cdot y+z=0$

51.-En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencia* s:
$R=\{O;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{O';\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$, donde $\overrightarrow{OO'}=\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}'=\vec{u}+2\vec{v}$, $\vec{v}'=-3\vec{u}-7\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{w}'=-2\vec{v}+\vec{w}$.

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a R´.

b) Análogamente, de R´ a R.

c) Comprobar si existen puntos del espacio que tienen las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R´.

e) Si Q=(1,1,1) en R' hallar las *coordenadas* de Q en R.

Solución:

a),b) Cambios de referencia de R' a R y de R a R' son, respectivamente

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&1&-3&0\\2&2&-7&-2\\3&0&1&1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline -19&-5&3&6\\-6&-2&1&2\\3&2&-1&-1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&1&-3&0\\2&2&-7&-2\\3&0&1&1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Sistema Incompatible por lo que **no existen tales puntos**

d)
Las coordenadas de P en R' son **(-18,-6,3)**

e)
Las coordenadas de Q en R son **(-1,-5,5)**

51.-En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencia* s:
$R=\{O;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{O';\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$, donde $\overrightarrow{OO'}=\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}'=\vec{u}+2\vec{v}$, $\vec{v}'=-3\vec{u}-7\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{w}'=-2\vec{v}+\vec{w}$.

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a R´.

b) Análogamente, de R´ a R.

c) Comprobar si existen puntos del espacio que tienen las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R´.

e) Si Q=(1,1,1) en R' hallar las *coordenadas* de Q en R.

Solución:

a),b) Cambios de referencia de R' a R y de R a R' son, respectivamente

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&1&-3&0\\2&2&-7&-2\\3&0&1&1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\ \text{y}\ \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline -19&-5&3&6\\-6&-2&1&2\\3&2&-1&-1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&1&-3&0\\2&2&-7&-2\\3&0&1&1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Sistema Incompatible por lo que **no existen tales puntos**

d)
Las coordenadas de P en R' son **(-18,-6,3)**

e)
Las coordenadas de Q en R son **(-1,-5,5)**

52.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias* :
$R = \{O;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R' = \{O';\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$, donde $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}'=2\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}'=-4\vec{u}+5\vec{v}-8\vec{w}$, $\vec{w}'=-2\vec{v}+2\vec{w}$.

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a R´.

b) Análogamente, de R´ a R.

c) Comprobar si existen puntos del espacio que tienen las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R´.

e) Si Q=(1,1,1) en R' hallar las *coordenadas* de Q en R.

Solución:

a),b) Cambios de referencia de R' a R y de R a R' son, respectivamente

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline 1&2&-4&0\\2&1&5&-2\\3&0&-8&2\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline \frac{17}{2}&\frac{3}{2}&-2&-2\\ \frac{9}{2}&\frac{1}{2}&-1&-1\\ \frac{33}{2}&2&-4&-\frac{7}{2}\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline 1&2&-4&0\\2&1&-5&-2\\3&0&-8&2\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

La solución es un único punto, de coordenadas $\boxed{\left(\frac{5}{2},\frac{7}{8},4\right)}$

d)
Las coordenadas de P en R' son **(6,3,21/2)**

e)
Las coordenadas de Q en R son **(-1,6,-3)**

53.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran la *referencia*:
$R = \{A, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}\}$, donde A es el punto de *coordenadas* A = (1, 2, 3) y los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tienen por *coordenadas* $\vec{u} = (1,2,0)$, $\vec{v} = (-3,-7,1)$ y $\vec{w} = (-2,0,1)$. Se pide:

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de la canónica a R.

b) Comprobar si existen puntos del espacio que tienen las mismas *coordenadas* respecto de la *referencia* canónica y de R.

c) Ecuación, en la *referencia* R, del *plano* cuya ecuación en la *referencia* canónica es z = 0.

Solución:

a) Llamando (x,y,z) a las coordenadas de un punto genérico del espacio respecto de la referencia canónica y (x',y',z') a las coordenadas de ese mismo punto respecto de la referencia R, se tiene que

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 1 & 1 & -3 & -2\\ 2 & 2 & -7 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

[1] y, por tanto, el cambio de la referencia canónica a R, que es lo que se pide en el apartado a) se calcula mediante la matriz inversa, es decir,

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline -\frac{47}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{14}{5}\\ -\frac{12}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 1 & 1 & -3 & -2\\ 2 & 2 & -7 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene un único punto **P=(-13,-3,5)**

c) La expresión matricial [1] puede ponerse como

$$\begin{cases} x = x' - 3y' - 2z' + 1\\ y = 2\cdot x' - 7\cdot y' + 2\\ z = y' + z' + 3\end{cases}$$

Por tanto, observando la última ecuación, el plano z=0 tendrá por ecuación en la referencia R:

$$y' + z' + 3 = 0$$

54.- a) Sean los *subespacios vectoriales* E y F de R^4, definidos por las siguientes *ecuaciones implícitas*:

$$E \equiv \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -9x + 3y - z + 7t = 0 \end{cases}, \quad F \equiv 3x + z - t = 0$$

Hallar una *base* de la *suma* E+F y de la *intersección* E∩F. ¿Es *suma directa*?

b) Respecto de la *base canónica*, la *transformación lineal* f tiene por matriz asociada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & -4 \\ -3 & a & 3 \\ 3 & a+1 & -3 \end{pmatrix}$.

Estudiar para qué valores de *a* es *diagonalizable* la transformación *f*.

c) Hallar la *distancia* euclídea entre la *recta* afín *r* que pasa por el origen O y su dirección es la del vector $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y la *recta s* que pasa por A (1,1,1) y su dirección es $f(\vec{u})$, siendo f la transformación lineal del apartado anterior particularizada para *a* = 0.

Solución:

a) El subespacio intersección E∩F está definido por el sistema formado por las ecuaciones implícitas de E y F. Para obtener una base resolvemos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} E \equiv \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -9x + 3y - z + 7t = 0 \end{cases} \\ F \equiv 3x + z - t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\dfrac{4\alpha + \beta}{2} \\ t = \dfrac{2\alpha - \beta}{2} \end{cases}$$

Una base puede ser **{(1, 0, -2, 1),(0, 2, -1, -1)}** que se obtiene haciendo x=1, y=0, e y=0, x=2 sucesivamente.

Para hallar una base de E+F hallamos, en primer lugar, una base de E y otra de F resolviendo las ecuaciones y luego eliminando los vectores linealmente dependientes se obtiene la base pedida.

$$E \equiv \left. \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -9x + 3y - z + 7t = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\dfrac{4\alpha + \beta}{2} \\ t = \dfrac{2\alpha - \beta}{2} \end{cases}$$

Una base de E es {(1, 0, -2, 1),(0, 2, -1, -1)} que se obtiene haciendo x=1, y=0, e y=0, x=2 sucesivamente.

$$F \equiv 3x+z-t=0\} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\gamma \\ t=3\alpha+\gamma \end{cases}$$

Una base de F puede ser {(1, 0, 0, 3),(0, 1, 0, 0),(0, 0, 1, 1)} que se obtiene haciendo x=1, y=0, z=0; x=0, y=1, z=0 y x=0, y=0, z=1 sucesivamente.
Hallamos ahora el rango de esos 5 vectores y se obtiene una base de E+F

$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}=3 \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}=3$$

Luego **una base de E+F puede ser {(1, 0, 0, 3),(0, 1, 0, 0),(0, 0, 1, 1)}**
No es suma directa, puesto que no se cumple que E+F sea igual a R^4, además la dimensión de la intersección no es cero.

b) Hallamos el polinomio característico y lo factorizamos

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & a+1 & -4 \\ -3 & a-\lambda & 3 \\ 3 & a+1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-a)=0$$

Hemos obtenido que los valores propios son λ=0, λ=1 y λ=a. La transformación f es diagonalizable si dim(V_λ)= orden de multiplicidad de λ, luego:
1) si a≠0 y a≠1 f es diagonalizable, pues tiene 3 valores propios distintos entre sí.
2) si a=0, f es diagonalizable si dim(V_0)=2
3) si a=1, f es diagonalizable si dim(V_1)=2
Para a=0, la matriz es:
Para a=0, f tiene como valores propios 0 (orden 2 de multiplicidad) y 1 (simple)

Los vectores propios asociados a cada valor propio λ, son las soluciones del sistema: $(A-\lambda I)\ \vec{v}=\vec{0}$

$$\text{Para } \lambda=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-0 & 1 & -4 \\ -3 & 0-0 & 3 \\ 3 & 1 & -3-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \ \vec{v}_1=(1,0,1)$$

Para a=1, f tiene como valores propios 1 (orden 2 de multiplicidad) y 0 (simple)

$$\text{Para } \lambda=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-1 & 2 & -4 \\ -3 & 1-1 & 3 \\ 3 & 2 & -3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y-\dfrac{z}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \ \vec{v}_1=(2,1,2)$$

Luego **f es diagonalizable para cualquier valor de a≠0 y a≠01**

b) Hallamos f(1,2,-1)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

La distancia entre las rectas r y s aplicamos la fórmula correspondiente:

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{f(\vec{u})} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 10 & -6 & 8 \end{vmatrix} = (10,-18,-26) \Rightarrow \left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{f(\vec{u})}\right| = 10\sqrt{11}$$

$$d(r,s) = \left| \frac{\left[\overrightarrow{OA}, \vec{u}, \overrightarrow{f(\vec{u})}\right]}{\vec{u} \wedge \overrightarrow{f(\vec{u})}} \right| = \frac{\left|\overrightarrow{OA} \cdot \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{f(\vec{u})}\right)\right|}{\left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{f(\vec{u})}\right|} = \frac{(1,1,1)\cdot(10,-18,-26)}{10\sqrt{11}} = \frac{34}{10\sqrt{11}} = \boxed{\frac{17}{5\sqrt{11}}}$$

55.- En el *espacio afín* real A^3, sea:

$$R \equiv \left\{O = (1,-1,1), \vec{u_1} = (1,2,3), \vec{u_2} = (0,0,1), \vec{u_3} = (2,a,b)\right\}.$$

a) ¿Para qué valores de a y b es R un sistema de *referencia* afín del espacio?

b) A partir de ahora, se toman a = 5 y b = 4. Sea R' otro sistema de *referencia*: $R' \equiv \left\{O' = (0,2,1), \vec{v_1} = (3,5,2), \vec{v_2} = (1,1,1), \vec{v_3} = (2,4,3)\right\}$

Hallar las ecuaciones de cambio de sistema de *referencia* de R a R'.

c) Si un punto P tiene de *coordenadas* $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ en el sistema de *referencia* R', ¿cuáles son las *coordenadas* de P respecto del sistema de *referencia* R? Comenta el resultado obtenido.

d) Sea x – y + z + 2 = 0 la ecuación de un *plano* en el sistema de *referencia* R. Hallar su ecuación respecto de R'.

Solución:

a) Para que R sea un sistema de referencia afín, ha de ser $B = \left\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right\}$ una base del espacio vectorial asociado, luego ha de verificarse que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} \neq 0$.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 4 - a = 0 \Rightarrow a = 4$. Luego, ha de ser **$a \neq 4$ y b puede tomar cualquier valor**.

b) Sea $B' = \left\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\right\}$. Se necesita conocer las ecuaciones de cambio de base de B a B':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En segundo lugar, se necesitan también las coordenadas del punto O respecto del sistema de referencia R', es decir, las coordenadas del vector $\overrightarrow{O'O}$ respecto de la base B'.

$\overrightarrow{O'O} = (1,-1,1) - (0,2,1) = (1,-3,0)$ respecto de la base canónica. Pasémoslo a la base B':

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Ahora ya pueden escribirse las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de R a R':

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{11}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z \\ y' = \frac{11}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}z \\ z' = -\frac{3}{2} + \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{7}{4}z \end{cases}}$$

c) Para pasar de R' a R se utiliza la matriz inversa de la obtenida en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{11}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 5 & 3 & 2 \\ 13 & -9 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, **las coordenadas de P respecto del sistema de referencia R son (0, 0, 0)**.

Lo cual es lógico, pues tal como se vio en el apartado a), el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\right)_{R'}$ no es otro que **el origen O del sistema de referencia R,** que naturalmente tiene de coordenadas (0, 0, 0) en dicha referencia R.

d) Sea $x - y + z + 2 = 0$ la ecuación de un plano en el sistema de referencia R. Para hallar su ecuación respecto de R', hemos de sustituir x, y, z en función de x', y', z' en dicha ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 5 & 3 & 2 \\ 13 & -9 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 + 5x' + 3y' + 2`z' \\ y = 13 - 9x' - 4y' - 3z' \\ z = 5 - x' - y' \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano queda:

$$(-11 + 5x' + 3y' + 2`z') - (13 - 9x' - 4y' - 3z') + (5 - x' - y') + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{13x' + 6y' + 5z' - 17 = 0}$$

56.- En el *espacio vectorial euclídeo* tridimensional V^3, se pide:

a) Hallar una *base ortonormal* del *plano* vectorial F engendrado por los vectores $\vec{u} = (1,2,0)$ y $\vec{v} = (1,-1,-1)$.

b) Hallar $F^{\perp}$ (*subespacio ortogonal* de F).

c) Ampliar la base encontrada en el apartado a) para obtener una *base ortonormal* de V^3.

Solución:

a) Base ortonormal de F

La base buscada ha de estar formada por dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de F que sean unitarios y ortogonales entre sí.

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right); \vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|}; \vec{u}_2 = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda(1,2,0) + \mu(1,-1,-1) \in F$$

A su vez $\vec{v}_1$ tiene que ser perpendicular a $\vec{v}_2$, luego, el producto escalar $\vec{v}_1 . \vec{v}_2$ ha de ser cero:

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}_2 = (1,2,0)\cdot(\lambda+\mu, 2\lambda-\mu, -\mu) = \lambda + \mu + 4\lambda - 2\mu = 5\lambda - \mu = 0$$

Si, por ejemplo, $\lambda = 1$, entonces $\mu = 5$:

$$\vec{u}_2 = (6,-3,-5) \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \left(\frac{6}{\sqrt{70}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}, -\frac{5}{\sqrt{70}}\right)$$

$\boxed{\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{6}{\sqrt{70}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}, -\frac{5}{\sqrt{70}}\right)\right\}}$ es una base ortonormal de F

b) Subespacio ortogonal de F:

Es la recta vectorial perpendicular a F; está engendrada por el vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,1,-3) \Rightarrow \boxed{F^{\perp} = <(-2,1,-3)>}$$

c) Basta tomar:

$$\frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{6}{\sqrt{70}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}, -\frac{5}{\sqrt{70}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right\}}$$

57.- I. En R^3 se consideran los siguientes elementos:

- **El *plano* $\pi: 2x + y - z = 2$.**
- **La *recta* $r: \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$.**
- **El *punto* P: (1, 2, 1).**

a) Expresar la ecuación de r en forma continua.

b) *Distancia* de P a π y de P a r.

c) Ecuación implícita del plano que pasa por P, es paralelo a r y perpendicular a π.

d) Hallar el punto P' *simétrico* de P respecto de π.

II. En el *espacio euclideo* E_3 se considera el sistema de referencia *ortonormal* $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Sea $R' = \{O'; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ otro sistema de referencia donde las coordenadas de O' con respecto a R son (1, 1, 0) y $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{u}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Hallar las ecuaciones del cambio de referencia R al sistema de referencia R'.

Solución:

I. a) La ecuación de la recta en forma continua $\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ siendo $P = (p_1, p_2, p_3)$ un punto de la recta y el vector director $\vec{\mathbf{r}} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$

$r: \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$ Un vector director de la recta r es (-1, 1, 2) y un punto (2,-1,0)

por tanto, una ecuación de la recta r en forma continua, es:

$$\boxed{\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}}$$

b) Distancia de un punto a un plano: $d(P, \pi) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ siendo

$\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ y $P = (p_1, p_2, p_3)$

Del plano 2x+y-z-2=0 obtenemos a=2, b=1, c=-1 y con el punto P(1,2,1):

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

Distancia de un punto a una recta: $d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$ siendo $r \equiv \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$

(un punto cualquiera $Q(x_0, y_0, z_0)$ y el vector director $\vec{\mathbf{r}} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ de la recta) y $P = (p_1, p_2, p_3)$.

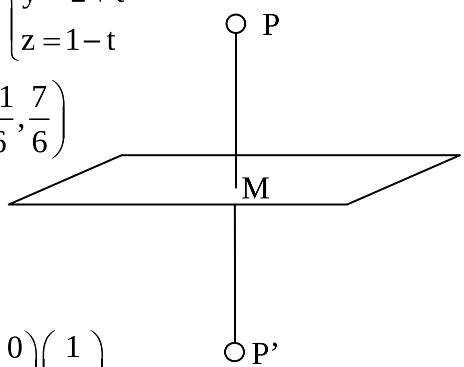
En nuestro caso consideramos Q(2,-1,0) un punto de la recta r con vector director (-1,1,2) y el punto P(1,2,1) obtenemos el vector $\overrightarrow{PQ} = (2,-1,0)-(1,2,1) = (1,-3,-1)$ y el producto vectorial

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5,-1,-2)$$

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{r}\right|}{|\vec{r}|} = \frac{|(-5,-1,-2)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \boxed{\sqrt{5}}$$

c) Consideramos el vector normal al plano (2,1,-1) y el vector director de r (-1,1,2) y obtenemos: $\vec{n} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3,-3,3)$. El haz de planos perpendiculares a π y paralelos a r es: x-y-z+k=0 de ellos el que pasa por P es **x-y+z=0**

d) Se considera la recta perpendicular al plano y que pasa por P: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 1-t \end{cases}$



La intersección con el plano2x+y-z=2 nos da el punto $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}\right)$

El simétrico P' es igual 2M-P=$\boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)}$

II. Cambio de R' a R con los datos dados: $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{R'}$

Despejando las coordenadas respecto de R' en función de la de R:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_3 = -\frac{3}{2}x_1 + 2x_2 - x_3 - \frac{3}{2} \end{cases}}$$

58.- Dados los puntos A=(1,1,0), B=(4/3, 1/3, - 2/3), C=(1/3, 4/3, - 2/3), y D=(1/3, 1/3, 1/3). Se pide:

a) Las *coordenadas* de los restantes vértices del *paralelepípedo* de aristas $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

b) Las ecuaciones del cambio de *referencia* de R $=\left\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ en R'={A,B,C,D}.

c) El *área del triángulo* ABC.

d) El *volumen del tetraedro* ABDC.

e) El *ángulo* determinado por el *plano* ABC y la *recta* CD.

f) El *ángulo* determinado por los planos ABC y BCD.

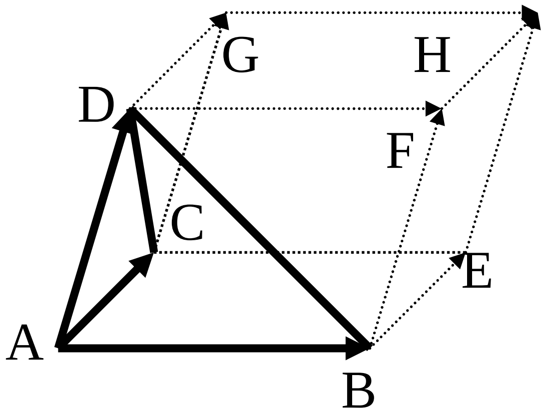
g) Ecuación de la *perpendicular común* a las rectas AB y CD.

h) *Distancia* entre las rectas AB y CD.

i) El punto D' *simétrico* de D respecto del plano ABC.

Solución:

a)



Determinamos las aristas:

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

$$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

$$\overline{AD}=\overline{OD}-\overline{OA}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Vectorialmente obtenemos todos los vértices:

$$\overline{OE}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BE}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{AC}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$$

$$\overline{OF}=\overline{OE}+\overline{EF}=\overline{OE}+\overline{AD}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

$$\overline{OG}=\overline{OA}+\overline{AC}+\overline{CG}=\overline{OC}+\overline{AD}=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

$$\overline{OH}=\overline{OB}+\overline{BH}=\overline{OB}+\overline{AD}=(0,0,-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} E=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)\\ F=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\\ G=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\\ H=(0,0,-1)\end{array}}$$

b) Si X tiene por vectores de posición $\overrightarrow{OX}=(x,y,z)$ y $\overrightarrow{O'X}=(x',y',z')$ respecto de R y R' respectivamente, luego $\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'X}=\overrightarrow{OX'}$.
Entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R
En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.
De las ecuaciones anteriores despejando (x',y',z') obtenemos:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

c) El área del triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Cuya área viene determinada por el módulo del producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=1.$$

Y por consiguiente, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\boxed{\frac{1}{2}}$.

d) El volumen del tetraedro es igual a 1/6 del volumen del paralelepípedo cuyo valor se obtiene como valor absoluto del producto mixto de los tres vectores $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que constituyen sus aristas: $V = \left|\left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \left|\overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right|$

y en nuestro caso $\overrightarrow{AD} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$,

si hacemos $V = \left|\overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right| = \left|\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right| = 1$

y así el volumen del tetraedro es **1/6**.

e) Del plano ABC conocemos un vector normal $\vec{n} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ y de la recta CD el vector director $\overrightarrow{CD} = (0, -1, 1)$; siendo el ángulo que forman suplementario del ángulo pedido, luego de la definición del producto escalar se tiene:

$$\alpha = \text{arcsen}\left|\frac{\vec{n}.\overrightarrow{CD}}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{CD}\right|}\right| = \text{arcsen}\left|\frac{(0,-1,1)\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{2}}\right| = \text{arcsen}\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq \boxed{45^{\circ}}$$

f) Del plano BCD necesitamos conocer un vector normal, para ello realizamos el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{CB} = (1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{CD} = (1, 0, -1)$

$$\vec{n}' = \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

$$\beta = \arccos\left|\frac{\vec{n}.\vec{n}'}{|\vec{n}||\vec{n}'|}\right| = \arccos\left|\frac{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right| = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq \boxed{54^{\circ}\,44'\,8''}$$

g) Perpendicular común: recta perpendicular y secante a ambas.

Procedimiento a seguir:

1. Vector perpendicular a ambas rectas.

$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=\left(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

2. Plano que contiene a la recta AB y al vector perpendicular a ambas.

Tenemos el punto A=(1,1,0) y los vectores $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ y $\vec{v}=(4,1,1)$ con lo cual la ecuación del plano es: $\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}=\boxed{y-z-3=0}$

3. Plano que contiene a la recta CD y al vector perpendicular a ambas.

Tenemos el punto C=(1/3, 4/3, - 2/3), y los vectores $\overrightarrow{CD}=(0,-1,1)$ y $\vec{v}=(4,1,1)$ con lo cual la ecuación del plano es: $\sigma\equiv\begin{vmatrix}x-\frac{1}{3} & y-\frac{4}{3} & z+\frac{2}{3}\\ 0 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}=\boxed{x-2y-2z+1=0}$

4. Intersección de los planos anteriores.

La recta pedida es: $\boxed{\begin{cases}\pi\equiv y-z-1=0\\ \sigma\equiv x-2y-z+1=0\end{cases}}$

h) $d(r_{AB},r_{CD})=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{\begin{vmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

i) Procedimiento a seguir:

1. Recta perpendicular al plano y que contiene al punto.
2. Intersección de recta y plano.
3. Simétrico del punto dado respecto del obtenido por intersección.

1. En este caso el vector normal al plano $\vec{n}=(2,2,-1)$ nos sirve para determinar la dirección de la recta perpendicular: $\begin{cases} x=\frac{1}{3}+2t \\ y=\frac{1}{3}+2t \\ z=\frac{1}{3}-t \end{cases}$

2. Sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano $\Rightarrow t=-\frac{1}{3}$ que en la recta queda $\Rightarrow O(1,1,0)$

3. El simétrico de P es el punto P' siendo O el punto medio del segmento PP', luego,

P'=2.O-P= $2(1,1,0)-\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\boxed{\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)}$

59.- En el *espacio afín euclídeo* ordinario R^3 se consideran las *referencias* $R=\{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{O',\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$. Las ecuaciones del *cambio de referencia* de R' a R son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

a) Indicar las *coordenadas* de los vectores de la *base* B=$\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ respecto a la *base* B'=$\{\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$.

b) Demostrar que no existe ningún punto del espacio que tenga las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

c) Si x+y+z=0 es la ecuación de un *plano* en la *referencia* R, hallar la ecuación en R´.

Solución:

Ecuaciones del cambio de referencia de R' a R.

Si X tiene por vectores de posición $\overrightarrow{OX}=(x,y,z)$ y $\overrightarrow{O'X}=(x',y',z')$ respecto de R y R' respectivamente, luego $\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'X}=\overrightarrow{OX}'$.

Entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow [X]_R = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P.[X]_{R'}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R, siendo P la matriz del cambio de la base $B'=\{\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$ a la base $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$.

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) La matriz del cambio de base de B a B' es:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces los vectores de la base B respecto de la base B' son:

$$B=\left\{\vec{u}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\vec{v}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\vec{w}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\right\}$$

b) Si un punto X tiene las mismas coordenadas respecto a las dos referencias significa que: x=x'; y=y'; z=z'. Y de las ecuaciones del cambio de sistema de referencia:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$r\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=2\neq 3=r\begin{pmatrix}2&-1&-1&1\\-1&2&-1&2\\-1&-1&2&3\end{pmatrix}$ El sistema es $\boxed{\text{incompatible}}$, es decir, no tiene solución

c) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R y sustituyendo en la ecuación x+y+z=0

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Rightarrow\underbrace{\begin{cases}x=1-x'+y'+z'\\y=2+x'-y'+z'\\z=3+x'+y'-z'\end{cases}}_{x+y+z=6+x'+y'+z'=0}\Rightarrow\boxed{6+x'+y'+z'=0}$$

60.- En el espacio afín R^3 respecto de la *referencia canónica* $R=\{0;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ se consideran los puntos P(1,2,1), A(2,3,1), B(1,1,2), C(4,-1,1). Sea $R'=\{P,\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$ otra referencia cuyos ejes son las rectas PA, PB, PC. Determinar R' sabiendo que el punto D tiene de *coordenadas* $\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ en la referencia R y (2,-1,-1) en la referencia R'. Hallar:

a) La *distancia* entre los orígenes de los sistemas de referencia.

b) Las ecuaciones del cambio de *coordenadas* de R' a R.

c) ¿Es R' un *sistema de referencia ortonormal*?

d) Ecuación implícita del *subespacio vectorial* F engendrado por los vectores $\vec{v}_1=(1,1,0)$ y $\vec{v}_2=(0,-1,1)$.

e) El *subespacio ortogonal* de F.

f) Un *subespacio suplementario* de $\langle\ \vec{v}_1\ \rangle$

Solución:

a) $d(O,P)=\left|\overrightarrow{OP}\right|=\boxed{\sqrt{6}}$.

b) Dirección de $\vec{u}_1=\alpha\overrightarrow{PA}=(\alpha\quad\alpha\quad 0)$. Dirección de $\vec{u}_2=\beta\overrightarrow{PB}=(0\quad -\beta\quad\beta)$. Dirección de $\vec{u}_3=\gamma\overrightarrow{PC}=(3\gamma\quad -3\gamma\quad 0)$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}_R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&\alpha&0&3\gamma\\2&\alpha&-\beta&-3\gamma\\1&0&\beta&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_{R'}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}_R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&\alpha&0&3\gamma\\2&\alpha&-\beta&-3\gamma\\1&0&\beta&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}_{R'}\Rightarrow$$

$$\alpha=-\frac{1}{2};\beta=\frac{1}{2};\gamma=-\frac{1}{3}$$

R'= $\left\{P(1\quad 2\quad 1),\ \vec{u}_1=\left(-\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad 0\right)\ \vec{u}_2=\left(0\quad -\frac{1}{2}\quad \frac{1}{2}\right)\ \vec{u}_3=(-1\quad 1\quad 0)\right\}$

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}_R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-\frac{1}{2}&0&1\\2&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1\\1&0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_{R'}$$

c) **No** es un sistema de referencia ortonormal.

$$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=\frac{1}{4}\neq 0$$

d) $\begin{vmatrix}x&1&0\\y&1&-1\\z&0&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow \boxed{x-y-z=0}$.

e) $\boxed{F^{\perp}=\langle(1\quad -1\quad -1)\rangle}$.

f) Un subespacio suplementario de $\langle\vec{v}_1\rangle$ es cualquier plano que no contenga a $\vec{v}_1$, por ejemplo

$$\boxed{F'=\{(x,y,z)/x+y+z=0\}}$$

61.- En el Espacio Euclídeo:

a) Definición de *subespacio ortogonal* a un subespacio dado y definición de *sistema de referencia ortonormal*.

b) En A_3 se consideran los puntos siguientes: O(1,1,1), A(2,1,1), B(2,2,2), C(1,3,1) y O'(1,0,1), A'(1,1,1), B'(-1,1,1), C'(2,-1,2)

I) Probar que R={O, A, B, C} y R'={O', A', B', C'} son dos referencias de A_3.

II) Hallar las *ecuaciones del cambio de la referencia* R a R'.

Solución:

a) Subespacio ortogonal a un subespacio dado es el conjunto formado por todos los vectores ortogonales al subespacio dado.

Sistema de referencia ortonormal es el constituido por un punto O denominado origen y una base ortonormal del espacio vectorial asociado

b)

I) Para que R sea un sistema de referencia afín, ha de ser $B = \left\{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right\}$ una base del espacio vectorial asociado,

$$\overrightarrow{OA} = (2,1,1) - (1,1,1) = (1,0,0)$$

$$\overrightarrow{OB} = (2,2,2) - (1,1,1) = (1,1,1)$$

$$\overrightarrow{OA} = (1,3,1) - (1,1,1) = (0,2,0)$$

luego se verifica que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ son tres vectores linealmente independientes.

Análogamente para R'

$$\overrightarrow{O'A'} = (1,1,1) - (1,0,1) = (0,1,0)$$

$$\overrightarrow{O'B'} = (-1,1,1) - (1,0,1) = (-2,1,0)$$

$$\overrightarrow{O'C'} = (2,-1,2) - (1,0,1) = (1,-1,1)$$

luego tenemos que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

II)

Llamando (x,y,z) a las coordenadas de un punto genérico del espacio A_3 respecto de la referencia R y (x',y',z') a las coordenadas de ese mismo punto respecto de la referencia R, se tiene que $\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

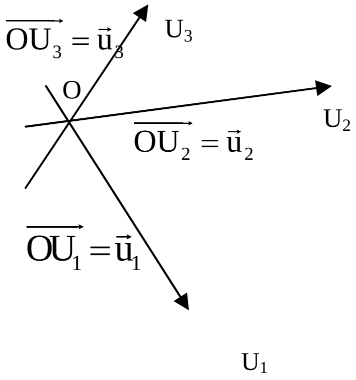
Despejando $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&0&-2&1\\0&1&1&-1\\1&0&0&1\end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&1&1&0\\1&0&1&2\\1&0&1&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&1/2&2&2\\0&-1/2&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$

Ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&1/2&2&2\\0&-1/2&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}}$$

Sistema de referencia

Sea $\boldsymbol{A}^3$ un espacio afín y $\Re = \{O, U_1, U_2, U_3\}$ una cuaterna de puntos, se dice que R constituye un **sistema de referencia** del espacio afín $\boldsymbol{A}^3$ cuando los vectores $\overrightarrow{OU_1}, \overrightarrow{OU_2}, \overrightarrow{OU_3}$ forman una base de $V^3(R)$. O es el **origen** del sistema de referencia.

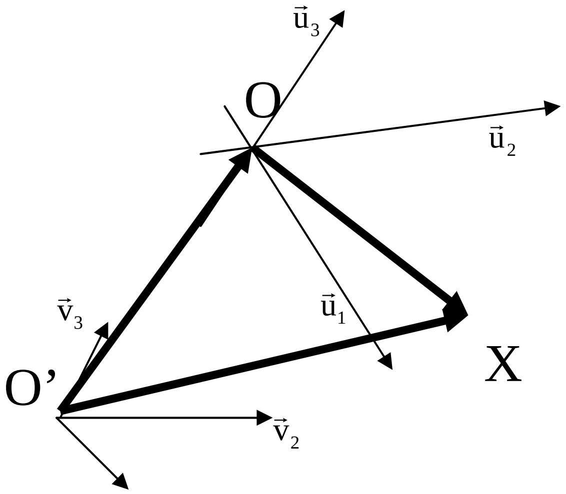


Si $\overrightarrow{OU_1} = \vec{u}_1, \overrightarrow{OU_2} = \vec{u}_2, \overrightarrow{OU_3} = \vec{u}_3$ entonces se tiene $\Re = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia.

Cambio de sistema de referencia

Sean $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $R' = \{O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ dos sistemas de referencia del espacio afín $\boldsymbol{A}^3$ tales que:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + a_{13}\vec{v}_3 \\
\vec{u}_2 &= a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + a_{23}\vec{v}_3 \\
\vec{u}_3 &= a_{31}\vec{v}_1 + a_{32}\vec{v}_2 + a_{33}\vec{v}_3 \\
\overrightarrow{O'O} &= a\ \vec{v}_1 + b\ \vec{v}_2 + c\vec{v}_3
\end{aligned}$$



Si X tiene por vectores de posición $\overrightarrow{OX} = (x, y, z)$ y $\overrightarrow{O'X} = (x', y', z')$ respecto de R y R’ respectivamente, luego $\overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX}$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow [x]_{R'} = A.[x]_R$ que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R’.

Base ortonormal o métrica

La base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ es **ortonormal** o **métrica** cuando sus vectores son unitarios ($\|\vec{u}_i\|=1$, i=1,2,...,n) y ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

Subespacios suplementarios

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Si se cumple $E_1 \oplus E_2 = V$, diremos que E_1 y E_2 son ***subespacios suplementarios***, en cuyo caso se verifican las dos condiciones siguientes: $E_1 + E_2 = V$ y $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$.

Subespacio ortogonal

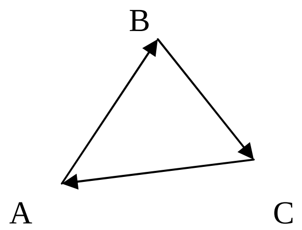
Dado un subconjunto F de V, llamaremos **ortogonal** de F y se escribe $F^{\perp}$, al subconjunto de V formado por todos los vectores ortogonales a F. $F^{\perp}$ es siempre un subespacio vectorial de V aunque F no lo sea.

Espacio afín

Sean **E** el conjunto de puntos del espacio, $V^3(R)$ el espacio vectorial real de los vectores libres del espacio, y $\begin{array}{l}\varphi : \mathbf{ExE} \to \mathbf{V}^3(\mathrm{R}) \\ (\mathrm{A,B}) \to \varphi(\mathrm{A,B}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{array}$ una aplicación que verifica:

I) “Relación de Chasles”

Si A, B, y $C \in \mathbf{E}$ $\varphi(A,B) + \varphi(B,C) + \varphi(C,A) = \vec{0}$ o también $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$



II) $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{E}, \forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}$, existe un único punto $B \in \mathbf{E}$ tal que $\varphi(A,B) = \vec{v}$.
Entonces a la terna (**E**, $V^3(R)$, φ) se le denomina **espacio afín** y se escribe $\boldsymbol{A}^3$.

Espacio euclídeo

Se llama espacio **afín euclídeo** o **espacio euclídeo** al espacio afín cuando el espacio vectorial real asociado V^3 es un espacio vectorial euclídeo. Lo representamos por $\mathbf{E^3}$**.**

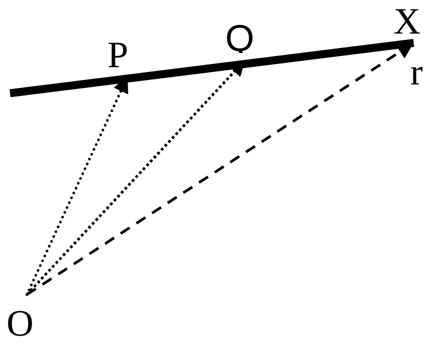
Coordenadas cartesianas rectangulares

Si $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un sistema de referencia ortonomal y A, B, y C son puntos tales que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}_1, \overrightarrow{OB} = \vec{u}_2, \overrightarrow{OC} = \vec{u}_3$, las rectas OA=i, OB=j, y OC=k se llaman **ejes** de **coordenadas cartesianas rectangulares**.

Se llaman **coordenadas cartesianas rectangulares** de un punto a sus coordenadas cartesianas cuando el sistema de referencia es métrico u ortonormal.

La recta en el Espacio

Una recta queda determinada por dos puntos P y Q distintos. Si X es un punto cualquiera de la recta y $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ un sistema de referencia del espacio afín, la ecuación vectorial de la recta es:



$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+t\,\overrightarrow{PQ}$ y sus ecuaciones paramétricas para $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$, y $X=(x_1,x_2,x_3)$ respecto de R,

son: $\begin{cases} x_1=p_1+t(q_1-p_1)\\ x_2=p_2+t(q_2-p_2)\\ x_3=p_3+t(q_3-p_3)\end{cases}$

Sea $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ un **vector director** de la recta, entonces la ecuación vectorial es $X=P+t\vec{v}$ y las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1=p_1+tv_1\\ x_2=p_2+tv_2\\ x_3=p_3+tv_3\end{cases}$. De donde en forma continua: $\dfrac{x_1-p_1}{v_1}=\dfrac{x_2-p_2}{v_2}=\dfrac{x_3-p_3}{v_3}$.

La recta en el Plano

Siendo m la pendiente; n la ordenada en el origen; $P(x_0,y_0)$ un punto cualquiera y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ un vector director.

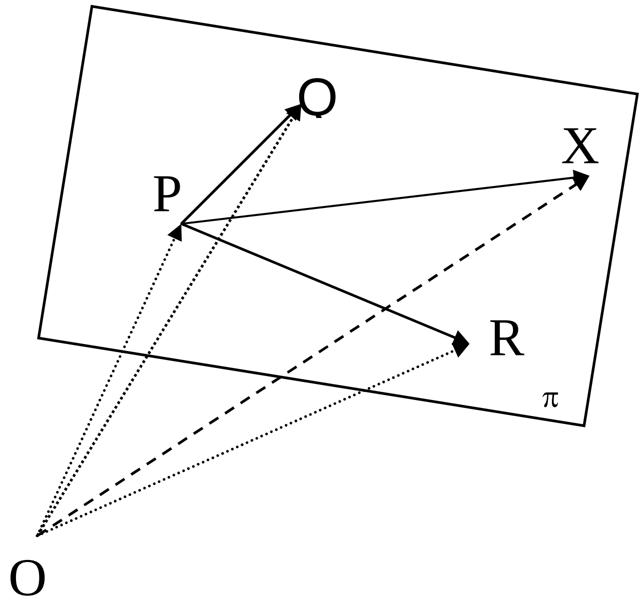
- Ecuación de la recta en forma explícita: $y=mx+n$
- Ecuación de la recta en forma punto pendiente: $y-y_0=m(x-x_0)$
- Ecuación general de la recta en el plano: $ax+by+c=0$
- Ecuaciones paramétricas de la recta: $\begin{cases} x=x_0+tv_1\\ y=y_0+tv_2\end{cases}$
- Ecuación de la recta en forma continua: $\dfrac{x-x_0}{v_1}=\dfrac{y-y_0}{v_2}$

El Plano en el Espacio

Sea el sistema de referencia $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ Un plano queda determinado por tres puntos P, Q y R no alineados, cualquier punto coplanario con ellos verifica $X = P + t\,\overrightarrow{PQ} + s\,\overrightarrow{PR}$.

De la ecuación vectorial, para $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$ y $X = (x_1, x_2, x_3)$ se obtienen las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) + s(r_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) + s(r_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + t(q_3 - p_3) + s(r_3 - p_3) \end{cases}$$



Si consideramos un punto P y dos vectores linealmente independientes $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ el plano queda determinado de forma vectorial por $X = P + t\vec{v} + s\vec{w}$ y por sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 + sw_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 + sw_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 + sw_3 \end{cases}$ de donde eliminando los parámetros t y s queda: $\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 - p_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 - p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$, la ecuación general, cartesiana o implícita del plano $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$

Distancia entre dos rectas

- Si las **rectas son paralelas**, r//r’, se construye un plano π perpendicular a ambas. Sean $P = r \cap \pi$ y $Q = r' \cap \pi$. Entonces d(r,r’)=d(P,Q).

- Si las **rectas se cruzan**:

1. $d(r,r') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}, \vec{v}'\right]\right|}{\left|\vec{v} \wedge \vec{v}'\right|}$, siendo $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ los vectores directores de r y r’, respectivamente, P y Q sendos puntos de r y r’.
2. Sea s la recta perpendicular común a r y a r’. Sean $P = r \cap s$ y $Q = r' \cap s$.. Entonces d(r,r’)=d(P,Q).

DISTANCIA entre dos puntos $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

DISTANCIA entre dos puntos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Perpendicular común

Se considera la recta **perpendicular común** a dos rectas dadas cuando dicha perpendicular es secante a ambas rectas dadas.

Cálculo de la recta s perpendicular común a r y a r':

$s = \pi \cap \pi'$; siendo $\pi \equiv$ plano que contiene a la recta r y su vector característico es perpendicular a los vectores $\vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ y $\pi' \equiv$ plano que contiene a la recta r' y su vector característico es perpendicular a los vectores $\vec{v}'$ y $\vec{v} \wedge \vec{v}'$.

Simétrico

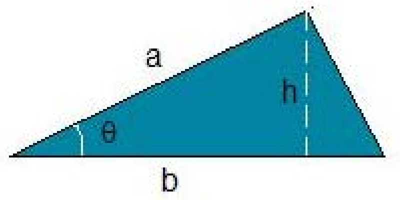
- **Simétrico:** que tiene simetría, puede ser respecto de un punto (central), de una recta (axial), de un plano (especular) o de otro elemento.

- **Elemento simétrico**: el que, operado con su **elemento** correspondiente, da como resultado el **elemento** neutro. En la suma se llama **opuesto** y en el producto **inverso**.

- Un endomorfismo f del espacio vectorial euclídeo V es **simétrico** cuando se verifica la siguiente igualdad entre productos escalares:

$$\vec{x}\cdot f\left(\vec{y}\right)=\vec{y}\cdot f\left(\vec{x}\right),\ \forall \vec{x},\vec{y}\in V.$$

Área del triángulo



$$Área = \frac{1}{2}bh$$

$$Área = \frac{1}{2}absen\theta$$

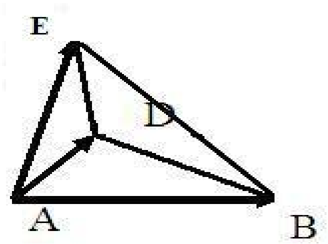
El **área** de un triángulo de vértices $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ y $C(c_1,c_2)$ es:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

El área del triángulo ABC es ½ del área del paralelogramo ABCD, luego:

Área del triángulo ABC$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|$.

Volumen del tetraedro



El **volumen del tetraedro** ABDE es un 1/6 del volumen del paralelepípedo viene dado por:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 1 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

siendo $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $D = (d_1, d_2, d_3)$, y $E = (e_1, e_2, e_3)$

Ángulo

Ángulo figura geométrica constituida por dos semirrectas que tienen en común el origen.

Ángulo de dos vectores

Ángulo de dos vectores: si los vectores $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ e $y = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$ están referidos a una base ortonormal, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de V^3 entonces:

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

Ángulo entre dos planos

Ángulo entre dos planos es el menor de los ángulos diedros que dichos planos forman al cortarse. Sean los planos $\begin{cases} \pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ \pi' \equiv a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases}$. Se verifica, entonces, que:

$$\cos(\pi, \pi') = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

Ángulo entre dos rectas

Ángulo entre dos rectas es el menor de los ángulos que forman sus paralelas por un punto cualquiera. Es el ángulo entre sus vectores directores.

Sean las rectas $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y $r' \equiv \frac{x_1 - p'_1}{v'_1} = \frac{x_2 - p'_2}{v'_2} = \frac{x_3 - p'_3}{v'_3}$. Se verifica, entonces, que: $\cos(r, r') = \frac{|v_1v_1' + v_2v_2' + v_3v_3'|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2}}$

Ángulo entre recta y plano

Ángulo entre recta y plano es el ángulo entre dicha recta y su proyección ortogonal sobre el plano.

Sean la recta $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y el plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$. Se verifica, entonces, que: $\operatorname{sen}(r, \pi) = \frac{|v_1a + v_2b + v_3c|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Base

Lado o cara horizontal a partir del cual se mide la altura de una figura plana o de un sólido.

Base de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que sea sistema generador y libre.

Subespacio vectorial

Sea (V,+,.) un **K**-espacio vectorial y F una parte no vacía de V, diremos que F es un ***subespacio vectorial*** de V si y sólo si (F,+,.) en un **K**-espacio vectorial.

Sea F una parte no vacía del K-espacio vectorial V. F es un **subespacio vectorial** de V con las operaciones + y · inducidas por V si y sólo si se verifica:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathrm{K}, \forall \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathrm{F} \Rightarrow \lambda \vec{\mathbf{a}} + \mu \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{F}$$

Distancia de un punto a una recta

En el plano: Distancia de un punto $P(x_0,y_0)$ a una recta $ax+by+c=0$:

$$d(P,r)=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

En el espacio: Distancia de un punto $P=(p_1,p_2,p_3)$ a la recta $r\equiv\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$ (un punto cualquiera $A(x_0,y_0,z_0)$ y el vector director $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ de la recta):

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}=\left|\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}p_2-y_0 & p_3-z_0\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}p_3-z_0 & p_2-y_0\\ v_3 & v_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}p_1-x_0 & p_2-y_0\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}\right|$$

Nota: En vez de aplicar la fórmula anterior, si se traza por P un plano π perpendicular a r, la distancia buscada es d=d(P,Q), siendo Q el punto en el que el plano π corta a r.

Espacio vectorial euclídeo

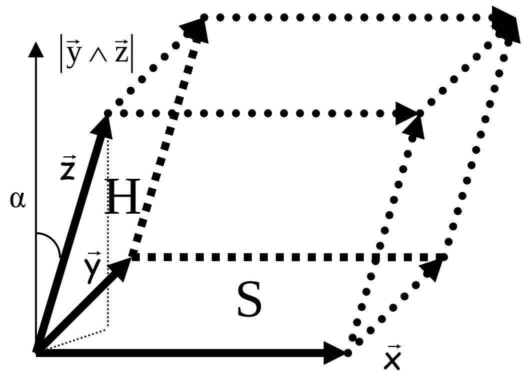
Un espacio vectorial V^3 en el que se ha definido el producto escalar se dice que es un **espacio vectorial euclídeo.**

Paralelepípedo

Poliedro cuyas caras son todas paralelogramos.

El **volumen del paralelepípedo** se obtiene mediante el producto mixto: sea $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base ortonormal de V^3. Sean $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V^3$ tales que $\vec{x}=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+x_3\vec{u}_3$; $\vec{y}=y_1\vec{u}_1+y_2\vec{u}_2+y_3\vec{u}_3$ y $\vec{z}=z_1\vec{u}_1+z_2\vec{u}_2+z_3\vec{u}_3$. Entonces:

$$\text{Volumen} = [\vec{x},\vec{y},\vec{z}] = \vec{x}\cdot(\vec{y}\wedge\vec{z}) = \left(x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+x_3\vec{u}_3\right)\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$



$$V = S.H = \begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$

Ecuaciones implícitas o cartesianas

Ecuaciones cuyas incógnitas son coordenadas. Relativo a las ecuaciones de un subespacio vectorial las ecuaciones cartesianas forman el sistema homogéneo que define dicho subespacio.

Base canónica

Base canónica, B_c, es la base: $B_c = \{\vec{e}_1 = (1,0,...,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \vec{e}_n = (0,0,...,0,1)\}$ del espacio vectorial V.

Suma de subespacios vectoriales

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Llamaremos ***suma de E_1 y E_2*** al subespacio vectorial generado por $E_1 \cup E_2$.

$$E_1 + E_2 = < E_1 \cup E_2 >$$

Suma directa

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Llamaremos **suma directa de E_1 y E_2** a la suma cuando $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ y se escribe $E_1 \oplus E_2$.

Intersección de subespacios vectoriales

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V, entonces $E_1 \cap E_2$ (E_1 **intersección** E_2) es un subespacio vectorial del espacio vectorial V.

Endomorfismo o **transformación lineal**

Endomorfismo o **transformación lineal** es una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo.

Diagonalizable

Una matriz $A \in M_n(K)$ es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal semejante a ella.

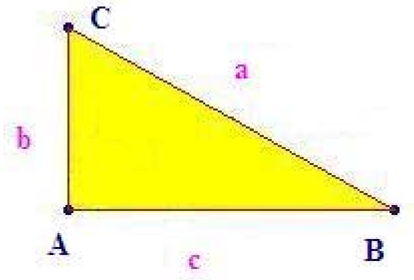
Una transformación lineal de V es **diagonalizable** si su matriz asociada es diagonalizable.

Coplanarias

Pertenecientes a un mismo plano.

Triángulo Rectángulo

Rectángulo si tiene un ángulo recto.



Eje

Eje es la recta del plano o del espacio que sirve de referencia a los puntos de ese plano o de ese espacio o bien a una figura o a una transformación**.**
La elipse y la hipérbola tienen dos **ejes de simetría**; la parábola solamente uno que pasa por su vértice.

Eje de coordenadas: cada una de las rectas mediante las que se define un sistema de coordenadas cartesianas en el plano o en el espacio.
Eje de abscisas: eje de coordenadas, generalmente horizontal, en un sistema de coordenadas cartesianas del plano y que se denomina X.
Eje de ordenadas: eje de coordenadas, generalmente vertical, en un sistema de coordenadas cartesianas del plano y que se denomina Y.

Eje focal: en una cónica es el eje de simetría que contiene a los focos.

- **Eje mayor** en la elipse corresponde al eje focal
- **Eje menor** en la elipse corresponde al eje no focal

Eje polar en coordenadas cartesianas polares es la semirrecta que parte del polo.

Eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de las dos circunferencias.

Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones en las que intervienen parámetros.

- Ecuaciones paramétricas de una **curva** plana son ecuaciones de la forma x=x(t), y=(t) donde el parámetro t recorre los valores del campo de existencia.
- Ecuaciones paramétricas de un **subespacio vectorial** son las coordenadas de un vector del subespacio vectorial como combinación lineal de los vectores de una base.
- Ecuaciones paramétricas de una **recta**:

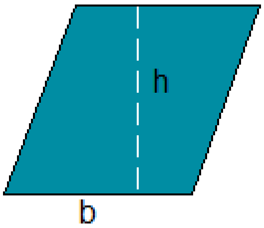
En el **plano**: siendo $P(x_0,y_0)$ un punto cualquiera y $\vec{v}=\left(v_1,v_2\right)$ un vector director.

Ecuaciones paramétricas de la recta: $\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$

En el **espacio**: Siendo $P=(p_1,p_2,p_3)$ un punto cualquiera y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ un vector director de la recta.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 \end{cases}$.

Área del paralelogramo



Paralelogramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos entre sí.

$$\text{Área} = b \cdot h$$

El área del paralelogramo cuyos vértices son $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$, $C=(c_1,c_2,c_3)$ y $D=(d_1,d_2,d_3)$, puede calcularse mediante la fórmula:

$$\text{Área} = \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_3-a_3 & b_1-a_1 \\ d_3-a_3 & d_1-a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 \end{vmatrix}^2}$$

Baricentro

Baricentro o lugar donde se cortan las medianas de un triángulo, corresponde al centro de gravedad.

Ortocentro

Ortocentro o lugar donde se cortan las alturas de un triángulo.

Circuncentro

Circuncentro o lugar donde se cortan las mediatrices de un triángulo o centro de la circunferencia circunscrita.