Sistemas, matrices y determinantes

1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, hallar las *matrices*

a) $B = (A+I)\left((A-I)\right)^{-1}$, b) $C = (I-A)^3$.

Solución

2.- Comprobar que cualquier *matriz cuadrada* se puede expresar de forma única como suma de dos matrices, una *simétrica* y otra *antisimétrica*.

Solución

3.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$, averiguar para qué valores del *parámetro* λ

la matriz A tiene *inversa*.

Solución

4.- Si la dimensión de las matrices A, B, C, y D son 3x3, 2x2, 3x2 y 3x2 respectivamente. Calcúlese la matriz X en cada una de las siguientes ecuaciones matriciales:

a) [1] $AXB+C=D$. [2] $A^tX=CB$. [3] $XA=DD^t+2CC^t$.

b) Hallar el valor de X en los apartados anteriores siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

5.- Hallar dos *matrices* X e Y de dimensión 2x3 tales que $\begin{cases} 3X+Y=A \\ 4X+2Y=B \end{cases}$.

La misma cuestión para el caso concreto $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución

6.- a) Hallar A^3, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha & 0 & -1 \\ \operatorname{sen}\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Hallar una *matriz* B tal que $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 8 & 38 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$.

c) Hallar C^n, $n \in \mathbb{N}$, donde $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

7.- Estudiar la *compatibilidad* o *incompatibilidad* del siguiente sistema, según los valores del *parámetro* a resolviéndolo cuando sea posible:

$$\begin{cases} -6x - 6y + (11 - a)z + 12 = 0 \\ 3x + (2-a)y - 6z + 3 = 0 \\ (2 - a)x + 3y - 6z + 21 = 0 \end{cases}$$

Solución

8.- Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 3 & \lambda + 2 & 2\lambda + 1 & 3\lambda \\ 3 & 2\lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda & 3\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$.

Solución

9.- Usa el *teorema de Rouché* para explicar qué tipo de sistema de *ecuaciones lineales*:

a) Constituyen las ecuaciones de tres rectas en el plano que determinen un triángulo.

b) Constituyen las ecuaciones de tres planos en el espacio que determinen un tetraedro.

Solución

10.- La matriz A, cuadrada de orden tres verifica la ecuación $A^3 + A = B$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ¿se puede asegurar que la matriz A es *regular*?

Solución

11.- ¿Existe alguna *matriz regular* de orden impar tal que $A^t = -A^3$?

Solución

12.- Calcúlese el *rango* de las siguientes matrices mediante el método de los *menores*. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & -2 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

13.- Sean $A,\ B \in M_4(\mathbb{R})$, con $|A| = 4$ y $|B| = -3$. Calcular los *determinantes* siguientes: $|AB|$, $|A^{-1}|$, $|5A|$, $|A^3|$, $|B^t|$ y $|-B|$.

Solución

14.- Sean B y $(B - I)$ matrices de orden tres *inversibles*.

a) Resolver el siguiente sistema matricial $\begin{cases} BX + Y = 2B \\ B^3X + BY = 0 \end{cases}$.

b) Hallar X e Y para el caso concreto $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución

15.- Sean X, C y D tres matrices de orden 3. Suponiendo que la matriz A-2I es *inversible*, despejar X en la ecuación: $2X + C - A^t = D + (X^tA^t - A)^t$.

Solución

16.- Hallar la *inversa* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y escribir A como producto de *matrices elementales*.

Solución

17.- ¿La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ es invertible?

Solución

18.- Hallar el *rango* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

Solución

19.- Estudiar si existe alguna matriz A de dimensión 3x2 talque $AA^t = I$, donde I es la *matriz unidad* de orden 3.

Solución

20.- Comprobar que el valor de un *determinante de Vandermonde* es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & c & \dots & p \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & p^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (b-a)(c-a)\dots(p-a)\cdot \\ \cdot(c-b)\dots(p-b)\cdot \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Solución

21.- Discutir, en función del *parámetro* a, el siguiente sistema de *ecuaciones lineales* $\begin{cases} x+2y+z = 1 \\ 2x+y+3z = -4 \\ x-y+(a+2)z = -3a-5 \\ 4x+2y+(a+6)z = -3a^2-8 \end{cases}$

Solución

22.- a) Resolver el sistema lineal siguiente $AX = B$ mediante el *método de Gauss*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

b) Hallar $C \in M_3(\mathbb{R})$ tal que CA sea una *matriz triangular superior* equivalente por filas a A.

Solución

23.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 1-a \\ a & ab & 2 \end{pmatrix}$; se pide:

a) Estudiar el *rango* de A en función de los parámetros reales a y b.

b) Para b = 4, consideremos el sistema de *ecuaciones lineales* AX = B, donde $B = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$. Discutir el sistema según los valores del *parámetro* a y resolverlo para a = 0.

c) Calcular la *inversa* de A-2I para a=b=3.

Solución

24.- Sean A y B *matrices cuadradas* de orden n. Probar que si I-AB es *invertible*, entonces I-BA también es invertible y que $(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1}A$. Nota: I es la *matriz unidad* de orden n.

Solución

25.- Sea A una *matriz cuadrada* de orden n tal que $A^2 + 2A + I = 0$. Entonces A es *invertible*.

Solución

26.- Encontrar el conjunto de matrices que *conmutan* con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

27.- Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ verifica la relación:

$A^n = 3^{n-1}A,\ n \in \mathrm{N}$.

Solución

28.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hallar $A^n,\ n \in \mathrm{N}$.

Solución

29.- Hallar p y q para que se verifique la ecuación: $A^2 + pA + qI = (0)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

30.- Resolver la siguiente ecuación matricial C+AX=DB-EX siendo $|A + E| \neq 0$.

Solución

31.- Hallar las *matrices inversas* de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

32.- Probar que AA^t y A^tA son siempre *matrices simétricas*. ¿Es *conmutativo* el producto anterior? Mostrar también que $A + A^t$ es simétrica, si A es *cuadrada*; ¿qué sucede con $A - A^t$?

Solución

33.- a) Si B es una *matriz antisimétrica*, ¿qué se puede decir de $C=A^tBA$?
b) Si A y B son *matrices simétricas*, ¿qué se puede decir de AB-BA?

Solución

34.- a) Hallar la *inversa* de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ b) Escribir A como producto de *matrices elementales*.

Solución

35.- Sabiendo que las matrices A, X e Y son de orden 7 y que el *determinante* de A es igual a k≠0, se pide:

a) Calcular los *determinantes* de A^2, $4A$, A^{-1}, $2A^2A^{-1}$, $A+A$.

b) Suponiendo que A-I sea invertible, resolver el sistema: $\begin{cases} AX + Y = 2A \\ A^3X + AY = (0) \end{cases}$

c) Resolver la siguiente ecuación matricial siendo B, C matrices de orden7: $XA^2 - XA + CA = (X + B)A^2 + 3XA$

Solución

36.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular A^2, A^3 y dar la expresión general de A^n.

b) Comprobar que $A^3 - 3A^2 + 3A = I$.

c) Obtener A^{-1}.

Solución

37.- Sea A una *matriz ortogonal* ($A^{-1}=A^t$). Se pide:

a) Estudiar si A^{-1} y A^t son también matrices ortogonales.

b) Hallar $|A|$.

c) Si B es otra *matriz ortogonal* del mismo orden que A, estudiar si AB es ortogonal.

Solución

38.- Discutir, según los valores de los *parámetros* a y b, el siguiente sistema de ecuaciones. Resolverlo para a = b = 1.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad\qquad -3x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad\qquad + 2x_5 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + a\,x_4 + x_5 = b \end{cases}$$

Solución

39.-a) Resolver el sistema matricial siguiente:

$$\begin{cases} 3AX + 4Y = I_3 \\ 3X + 2Y = O_3 \end{cases}$$

¿Qué condición ha de cumplirse para que el sistema anterior sea *compatible*?

b) La matriz solución X ¿puede verificar $|X| = 0$?

c) Resolver el sistema de *ecuaciones lineales*:

$$\begin{cases} 2x + 0y + 3z + t = 0 \\ 0x + 0y + z - t = 0 \\ x + 0y + 0z + 2t = 0 \end{cases}$$

Solución

40.- a) Estudiar el *rango* de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & a & b \end{pmatrix}$ según los valores de a y b.

b) Resolver el sistema de *ecuaciones lineales* cuya matriz ampliada es M en los casos en que sea *compatible*.

Solución

41.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ hallar:

a) En función de los valores p y q, una matriz X tal que $AX = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

b) Una matriz Y tal que $A^2Y + AY = A$.

c) Un valor de λ tal que $|A - \lambda I| = 0$.

d) El valor de los *determinantes* siguientes:

$$|A^5|,\quad |5A|,\quad |A^{-1}|,\quad |-A|,\quad |A \cdot A^t|,\quad |A + A^t|.$$

Solución

42.- Sean A, B, X, e $Y \in M_n(R)$ matrices *inversibles* que verifican el sistema:

$$\begin{cases} 2AX^{-1} + Y = 0 \\ -3A - YX = (AB)^{-1} X \end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar X eY.

b) Resolverlo para el caso concreto: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

43.- a) Calcular las *matrices cuadradas* de orden 3, X e Y, que satisfacen las ecuaciones siguientes: $2X + Y = B$

$$X - 2Y = C$$

b) Si X e Y son las matrices anteriores, calcular, en función de B y C, la matriz Z definida por:

$$Z = (2X + Y)X - (2X + Y)(2Y)$$

Solución

44.- Sabiendo que las matrices X e Y son de *dimensión* 2x3 y verifican el sistema $\left.\begin{array}{l} 5X - 2Y = A \\ 3X^t + 2Y^t = B \end{array}\right\}$ en el que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, hallar dichas matrices X e Y.

Solución

45.- Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & h+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a. Hallar el *rango* de B para los distintos valores de h

b. Calcular para qué valores de h existe la *matriz inversa* de B.

c. ¿Para qué valores de h la matriz B es *ortogonal*?

d. Para el valor h = 2, resolver el sistema matricial siguiente: $\begin{cases} BX + Y = 2B \\ B^2X + BY = I \end{cases}$

Solución

46.- a) Demostrar que $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, siendo A y B matrices *inversibles* del mismo orden.

b) Consideremos la ecuación matricial $[I-(BA)^t]X-(C-I)^{-1}=DX-A^tB^tX$, siendo A,B,C,D matrices cuadradas de orden n e I la *matriz unidad* del mismo orden.

i) Despejar X.

ii) ¿Qué condición ha sido necesaria para poder despejar X?

iii) Hallar X, si es posible, en cada uno de los siguientes casos.

1) $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución

47.- a) Discutir el siguiente sistema según los distintos valores de a:

$$\begin{cases} (1-a)x + (1+2a)y + 2(a+1)z = a \\ ax + ay = 2(a+1) \\ 2x + (a+1)y + (a-1)z = a^2 - 2a + 9 \end{cases}$$

b) Resolver el sistema para el valor de a que hace al *sistema compatible indeterminado*.

c) Para el valor de a del apartado anterior razonar cuál es el mínimo número de *ecuaciones linealmente independientes* y qué ecuación o ecuaciones son *combinación lineal* del resto. ¿Hay alguna solución en la cual $x = \frac{2}{\sqrt{11}}$?

Solución

48.- Sean A, B, C, X matrices cuadradas de orden n. Se pide resolver la siguiente ecuación matricial indicando, cuando sea preciso, las condiciones que deben cumplir las matrices que vayan surgiendo para poder despejar la incógnita X: $(A + B^t X^t)^t - (A^{-1} B^t)^t = (C - 2X)B - (A^t B^{-1})^{-1}$

Solución

49.- a) Discutir y resolver, según los valores de *m*, el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ mx + y - z = m - 2 \\ 3x + my + z = m - 2 \end{cases}$$

b) Hallar, para $m = 2$, la *solución particular* tal que $y = 1$.

Solución

50.- Dado el sistema

$$\begin{aligned} ax + y + z + t &= 1 \\ x + ay + z + t &= b \\ x + y + az + t &= b^2 \\ x + y + z + t &= b^3 \end{aligned}$$

Se pide:

1) Discutirlo según los valores de a y b.

2) Resolverlo cuando sea *compatible*.

Solución

51. a) Dada la ecuación matricial $B(XA - D) = C + XA$, donde A, B, C, D y X son matrices cuadradas de orden n, obtener la *matriz* X, sabiendo que A, B y (B-I) tienen inversa. Siendo I la *matriz identidad* de orden n.

b) Hallar dos matrices X e Y de *dimensión* 2x3 tales que cumplan que

$$\begin{cases} X + Y = A \\ 4X + \frac{2}{3}Y = B \end{cases}$$

siendo A y B dos matrices cualesquiera de la misma *dimensión* 2x3.

c) Dado el *sistema de ecuaciones lineales* $\begin{cases} nx + 2y + z = 1 \\ -2x - ny + z = 1 \\ 3x - 2z = 2 \end{cases}$ se pide, estudiar las soluciones del sistema en función del parámetro n.

Solución

52.- a) En el siguiente sistema de ecuaciones matriciales formado por matrices cuadradas de orden 3, se pide obtener las matrices X e Y

$$\begin{cases} 3AX + 4Y = I \\ 3X + 2Y = O \end{cases}$$

Siendo I la *matriz identidad* de orden 3 y O la *matriz nula* de orden 3.

b) Dada la ecuación matricial B(XA+D)=-C+3BXA , donde las matrices A,B,C y D son matrices cuadradas inversibles, se pide obtener la matriz X.

c) Dado el *sistema de ecuaciones lineales* $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ -2x-ay+z=0 \\ y=0 \end{cases}$

Discutir las soluciones del sistema en función de los valores del parámetro a.

Solución

53.- La *matriz* A es *nilpotente* de orden 3 ($A^3=0$) y la matriz B = I + A. Demostrar que $B^{-1} = I - A + A^2$.

Solución

54.- Dada la ecuación matricial X A = A^t+X, donde $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, obtener la *matriz* X.

Solución

55.- Probar que si I-AB es *inversible*, entonces la *matriz* I-BA también lo es y verifica:

$$(I-BA)^{-1}=I+B(I-AB)^{-1}A$$

Solución

56.- Sean A, B, C, X *matrices cuadradas* de orden n. Se pide resolver la siguiente ecuación matricial indicando, cuando sea preciso, las condiciones que deben cumplir las matrices que vayan surgiendo para poder despejar la incógnita X:

$$(A + XB) - (A^{-1} B) = (C - 2X)B - (B^{-1}A)^{-1}$$

Solución

1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**, hallar las matrices**

a) $B = (A + I)\left((A - I)\right)^{-1}$**,** **b)** $C = (I - A)^3$**.**

Solución:

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a) $B = (A + I)(A - I)^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$

b) $C = (I - A)^3 = (-1)^3 (A - I)^3 = = -(A - I)^3 = -(A - I)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

2.- Comprobar que cualquier *matriz cuadrada* se puede expresar de forma única como suma de dos matrices, una *simétrica* y otra *antisimétrica*.

Solución:

Sea M = A+B siendo, A una matriz simétrica ($A=A^t$) y B una matriz antisimétrica ($B^t=-B$), por tanto

$M^t=A^t+B^t=A-B$ que resolviendo el sistema $\begin{cases} M = A+B \\ M^t = A-B \end{cases}$ se obtiene

$$A=\left(\frac{M+M^t}{2}\right) \text{ y } B=\left(\frac{M-M^t}{2}\right).$$

Entonces podemos escribir $\boxed{M=\left(\frac{M+M^t}{2}\right)+\left(\frac{M-M^t}{2}\right)}$,

siendo $\left(\frac{M+M^t}{2}\right)$ simétrica, puesto que $\left(\frac{M+M^t}{2}\right)^t=\left(\frac{M^t+\left(M^t\right)^t}{2}\right)=\frac{M+M^t}{2}$ y $\left(\frac{M-M^t}{2}\right)$

antisimétrica, ya que $\left(\frac{M-M^t}{2}\right)^t=\left(\frac{M^t-\left(M^t\right)^t}{2}\right)=-\left(\frac{M-M^t}{2}\right)$.

La descomposición es única:

Si fuera $M=A_1+B_1=A_2+B_2 \Rightarrow \underbrace{A_1-A_2}_{\text{simétrica}} = \underbrace{B_2-B_1}_{\text{antisimétrica}}$, siendo la diferencia de matrices a la vez simétrica y antisimétrica, pero la única matriz simétrica y antisimétrica simultáneamente es la matriz nula. Así pues, $\boxed{A_1=A_2 \text{ y } B_2=B_1}$

Ejemplo. Si $M=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, entonces

$$A=\frac{1}{2}(M+M^t)=\begin{pmatrix} 2 & 7/2 & 5/2 \\ 7/2 & -1 & 3/2 \\ 5/2 & 3/2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B=\frac{1}{2}(M-M^t)=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 5/2 \\ -1/2 & 0 & 9/2 \\ -5/2 & -9/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$, averiguar para qué valores del *parámetro* λ la matriz A tiene *inversa*.

Solución:

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-3) \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda \neq 1 \\ \lambda \neq 3 \end{cases}}$$

4.- Si la dimensión de las matrices A, B, C, y D son 3x3, 2x2, 3x2 y 3x2 respectivamente. Calcúlese la matriz X en cada una de las siguientes ecuaciones matriciales

a) [1] AXB+C=D. [2] $A^tX=CB$. [3] $XA=DD^t+2CC^t$.

b) Hallar el valor de X en los apartados anteriores siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\-2&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\\-1&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\\1&1\end{pmatrix}$$

Solución:

a) Si existen A^{-1} y B^{-1} entonces,

[1] - $\boxed{X=A^{-1}(D-C)B^{-1}}$.

[2] - $\boxed{X=\left(A^t\right)^{-1}CB}$.

[3] - $\boxed{X=(DD^t+2CC^t)A^{-1}}$

b)

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-7/2\\0&1&-1\\0&0&1/2\end{pmatrix}.\quad (D-C)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\\2&0\end{pmatrix}.\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

[1] $\boxed{X=A^{-1}(D-C)B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}&\frac{7}{6}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}}$

$$\left(A^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-7/2&-1&1/2\end{pmatrix}.\quad CB=\begin{pmatrix}-1&4\\-5&2\\-3&0\end{pmatrix}.$$

[2] $X=\left(A^t\right)^{-1}CB=\boxed{\begin{pmatrix}-1&4\\-7&10\\7&-16\end{pmatrix}}$.

$$\left(DD^t+2CC^t\right)=\begin{pmatrix}8&2&2\\2&14&8\\2&8&6\end{pmatrix},$$

[3] $X=(DD^t+2CC^t)A^{-1}=\begin{pmatrix}8&2&2\\2&14&8\\2&8&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-7/2\\0&1&-1\\0&0&1/2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}8&18&-29\\2&18&-17\\2&12&-12\end{pmatrix}}$

5.- Hallar dos matrices X e Y de dimensión 2x3 tales que $\begin{cases} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{cases}$.

La misma cuestión para el caso concreto $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$\begin{cases} 6X + 2Y = 2A \\ 4X + 2Y = B \end{cases} \underset{e_1 - e_2}{\Longrightarrow} 2X = 2A - B \boxed{\Rightarrow X = \frac{1}{2}(2A - B)}.$$

$$\begin{cases} 6X + 2Y = 2A \\ 4X + 2Y = B \end{cases} \underset{-4e_1 + 6e_2}{\Longrightarrow} 4Y = -8A + 6B \boxed{\Rightarrow Y = \frac{1}{4}(-8A + 6B)}.$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \boxed{Y = \begin{pmatrix} 3/2 & 4 & 3 \\ -1 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}}$$

6.- a) Hallar A^3, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & \mathrm{sen}\alpha \\ \cos\alpha & 0 & -1 \\ \mathrm{sen}\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Hallar una matriz B tal que $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 8 & 38 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$.

c) Hallar C^n, $n \in \mathbb{N}$, donde $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & \mathrm{sen}\alpha \\ \cos\alpha & 0 & -1 \\ \mathrm{sen}\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & \mathrm{sen}\alpha \\ \cos\alpha & 0 & -1 \\ \mathrm{sen}\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ -\mathrm{sen}\alpha & \cos^2\alpha - 1 & \cos\alpha\,\mathrm{sen}\alpha \\ \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha\,\mathrm{sen}\alpha & \mathrm{sen}^2\alpha - 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & \mathrm{sen}\alpha \\ \cos\alpha & 0 & -1 \\ \mathrm{sen}\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ -\mathrm{sen}\alpha & \cos^2\alpha - 1 & \cos\alpha\,\mathrm{sen}\alpha \\ \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha\,\mathrm{sen}\alpha & \mathrm{sen}^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Las potencias de una matriz triangular es una matriz triangular.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 4b+ac \\ 0 & 4 & 5c \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^3 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3a & 4b+ac \\ 0 & 4 & 5c \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7a & 13b+6ac \\ 0 & 8 & 19c \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 8 & 38 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \boxed{\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}}.$$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

c) $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$C^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$C^3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$C^4=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&6\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix},$$

Veamos que $\boxed{C^n=\begin{pmatrix}1&n&1+2+3+...+(n-1)\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}}$.

Por inducción.
Se verifica para n=1. Suponemos que se verifica para n, y probamos que se verifica para n+1.

$$C^{n+1}=CC^n=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n+1&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

7.- Estudiar la *compatibilidad* o *incompatibilidad* del siguiente sistema, según los valores del *parámetro* *a* resolviéndolo cuando sea posible:

$$\begin{cases} -6x - 6y + (11-a)z + 12 = 0 \\ 3x + (2\text{-}a)y\text{-}6z + 3 = 0 \\ (2-a)x + 3y\text{-}6z + 21 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Estudiamos la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} -6 & -6 & 11-a \\ 3 & 2-a & -6 \\ 2-a & 3 & -6 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es a^3-15a^2-3a-17 igualando a cero se obtienen las raíces son -1 y 17.

1^{er} caso:

Si a=-1, resulta $r\begin{pmatrix} -6 & -6 & 11-(-1) \\ 3 & 2-(-1) & -6 \\ 2-(-1) & 3 & -6 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow r\begin{pmatrix} -6 & -6 & 12 & -12 \\ 3 & 3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & -6 & -21 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ **incompatible**

2^o caso:

Si a=17, resulta $r\begin{pmatrix} -6 & -6 & 11-(17) \\ 3 & 2-(17) & -6 \\ 2-(17) & 3 & -6 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow r\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 & -12 \\ 3 & -15 & -6 & -3 \\ -15 & 3 & -6 & -21 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ **compatible**

indeterminado. Resolviendo el sistema equivalente: $\begin{cases} -6x - 6y \;\; \text{-}6z + 12 = 0 \\ 3x - 15y \text{ - } 6z + 3 \;\; = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3-\alpha}{2} \\ y = \dfrac{1-\alpha}{2} \\ z = \alpha \end{cases}$

3^{er}caso

Si $a \neq -1$ y $a \neq 17$

$r\begin{pmatrix} -6 & -6 & 11-a \\ 3 & 2-a & -6 \\ 2-a & 3 & -6 \end{pmatrix}$ =3 sistema **compatible determinando**, es decir, solución única $\begin{cases} x = \dfrac{21}{a+1} \\ y = \dfrac{3}{a+1} \\ z = \dfrac{12}{a+1} \end{cases}$

8.- Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 3 & \lambda+2 & 2\lambda+1 & 3\lambda \\ 3 & 2\lambda+1 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 3 & \lambda+2 & 2\lambda+1 & 3\lambda \\ 3 & 2\lambda+1 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda^2 \end{vmatrix} \underset{c_i'=c_i-c_{i-1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda & \lambda^3-\lambda^2 \\ 3 & \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 3 & 2\lambda-2 & \lambda^2-1 & 2\lambda^2-2\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda+1 & 2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\underset{c_i'=c_i-c_1}{=} (\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2\lambda-2 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^6 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}.$$

9.- Usa el *teorema de Rouché* para explicar qué tipo de sistema de ecuaciones lineales:

a) Constituyen las ecuaciones de tres rectas en el plano que determinen un triángulo.

b) Constituyen las ecuaciones de cuatro planos en el espacio que determinen un tetraedro.

Solución:

a) Sean las tres rectas:

$r \equiv a_{11}x + a_{12}y = b_1,\ s \equiv a_{21}x + a_{22}y = b_2,\ t \equiv a_{31}x + a_{32}y = b_3$ con $(a_{i1}, a_{i2}) \neq (0,0)\ \forall i=1,2,3$

En total tenemos tres ecuaciones lineales que forman un sistema incompatible (las 3 rectas no tienen ningún punto en común).

Considerando: $r(A) = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ $r(A^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$

r(A) = 2; y r(A*) = 3 el sistema es incompatible y además todas las submatrices de orden 2x2 son de rango dos. Las rectas se cortan dos a dos.

b) Sean los planos:

$\alpha \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0$ con $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$;

$\beta \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_0$ con $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$;

$\gamma \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_0$ con $(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0)$

$\delta \equiv d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = d_0$ con $(d_1, d_2, d_3) \neq (0,0,0)$

considerando:

$$r(A) = r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \qquad r(A^*) = r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_0 \end{pmatrix}$$

r(A) = 3; y r(A*) = 4 el sistema es incompatible y los cuatro planos no tienen ningún punto en común, además todas las submatrices de orden 3x4 son de rango tres. Los planos se cortan dos a dos.

10.- La matriz A, *cuadrada* de orden tres verifica la ecuación $A^3 + A = B$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ¿se puede asegurar que la matriz A es *regular*?

Solución:

$|B| \neq 0 \Rightarrow |B| = |A^3 + A| \neq 0 \Rightarrow |B| = |A(A^2 + I)| \neq 0 \Rightarrow |B| = |A||A^2 + I| \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$.

Sí

11. ¿Existe alguna *matriz regular* de orden impar tal que $A^t = -A^3$?

Solución:

$A^t = -A^3 \Rightarrow |A^t| = |-A^3| \Rightarrow |A| = -|A^3| = -|A|^3 \Rightarrow 1 = -|A|^2$, y esto, es absurdo en los números reales. **Luego no existe tal matriz A**.

12.- Calcúlese el *rango* de las siguientes matrices mediante el método de los *menores*.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 6 & 7\\ 6 & -3 & 5 & 0\\ 5 & -1 & 7 & -2\\ 2 & 5 & 0 & 3\\ 0 & -5 & 4 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix}2 & 5\\ 0 & -5\end{vmatrix}=-10\,;\quad \begin{vmatrix}5 & -1 & 7\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & -5 & 4\end{vmatrix}=38\,;\quad \begin{vmatrix}6 & -3 & 5 & 0\\ 5 & -1 & 7 & -2\\ 2 & 5 & 0 & 3\\ 0 & -5 & 4 & -1\end{vmatrix}=-434\Rightarrow \boxed{\textbf{rango(A)=4}}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0\,;\ \begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=0\,;\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-7\,;\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\Rightarrow \boxed{\textbf{rango(B)=4}}.$$

13.- Sean A, B $\in M_4(R)$, con $|A| = 4$ y $|B| = -3$. Calcular los *determinantes* siguientes: $|AB|$, $|A^{-1}|$, $|5A|$, $|A^3|$, $|B^t|$ y $|-B|$.

Solución:

$|AB| = |A||B| = \boxed{-12}$.

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$.

$|5A| = 5^4|A| = \boxed{2500}$.

$|A^3| = |A|^3 = \boxed{64}$.

$|B^t| = |B| = \boxed{-3}$.

$|-B| = (-1)^4|B| = \boxed{-3}$.

14.- Sean B y $(B-I)$ matrices de orden cuatro *inversibles*.

a) Resolver el siguiente sistema matricial $\begin{cases} BX+Y=2B \\ B^3X+BY=0 \end{cases}$.

b) Hallar X e Y para el caso concreto $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $\begin{cases} BX+Y=2B \Rightarrow Y=2B-BX & [1] \\ B^3X+BY=0 \underset{\exists B^{-1}}{\Rightarrow} B^2X+Y=0 & [2] \end{cases}$, sustituyendo [1] en [2] se obtiene

$$B^3X+B(2B-BX)=0 \underset{\exists B^{-1}}{\Rightarrow} B^2X+2B-BX=0 \underset{\exists B^{-1}}{\Rightarrow} BX+2I-X=0 \Rightarrow (B-I)X=-2I \underset{\exists (B-I)^{-1}}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{X=-2(B-I)^{-1}}$$

Sustituimos este resultado en la ecuación [1] y obtenemos

$$\boxed{Y=2B\left(I+(B-I)^{-1}\right)}$$

b) $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B-I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \ (B-I)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$X=-2\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$Y=2B\left(I+(B-I)^{-1}\right)=\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

15.- Sean X, C y D tres matrices de orden 3. Suponiendo que la matriz A-2I es *inversible*, despejar X en la ecuación: $2X + C - A^t = D + (X^tA^t - A)^t$.

Solución:

$$2X+C-A^t=D+(X^tA^t-A)^t \Rightarrow 2X+C-A^t=D+AX-A^t \Rightarrow 2X+C=D+AX \Rightarrow$$

$(2I-A)X=D-C$ y como 2I-A es inversible, multiplicando por la izquierda por la matriz $(2I-A)^{-1}$ en la ecuación anterior, se tiene

$$\boxed{X=(2\cdot I-A)^{-1}(D-C)}$$

16.- Hallar la *inversa* de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\2&4&0\\3&5&-1\end{pmatrix}$ **y escribir** A **como producto de *matrices elementales*.**

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\2&4&0&0&1&0\\3&5&-1&0&0&1\end{array}\right) \text{ con } E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ y } E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix} \text{ se obtiene:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\0&-2&4&-2&1&0\\0&-4&5&-3&0&1\end{array}\right) \text{ con } E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ y } E_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix} \text{ se obtiene:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\0&1&-2&1&-1/2&0\\0&0&-3&1&-2&1\end{array}\right) \text{ con } E_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1/3\end{pmatrix} \text{ se obtiene:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\0&1&-2&1&-1/2&0\\0&0&1&-1/3&2/3&-1/3\end{array}\right) \text{ con } E_6=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ y } E_7=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ se obtiene:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1/3&4/3&-2/3\\0&1&0&1/3&5/6&-2/3\\0&0&1&-1/3&2/3&-1/3\end{array}\right) \text{ con } E_8=\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ se obtiene:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2/3&7/6&4/3\\0&1&0&1/3&5/6&-2/3\\0&0&1&-1/3&2/3&-1/3\end{array}\right)$$

y escribir A como producto de matrices elementales.

$$E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow A=(E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1)^{-1}=$$

$$=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}E_7^{-1}E_8^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

17.- ¿La matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & 0\\ -1 & -5 & 6\end{pmatrix}$ es invertible?

Solución:

$$(A\,|\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -5 & 6 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{f_2'=f_2-2f_1\\ f_3'=f_3+f_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[f_3'=f_3-f_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1\end{array}\right),$$

Observamos que la matriz A **no es inversible** pues hay una fila formada por ceros que indica que el determinante de la matriz cuadrada es nulo.

18.- Hallar el *rango* de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&3&2&-1&1&4\\1&4&1&1&2&3\\2&5&5&1&3&7\\2&4&6&-1&2&8\\3&8&7&0&4&11\end{pmatrix}$.

Solución:

$$\begin{pmatrix}1&3&2&-1&1&4\\1&4&1&1&2&3\\2&5&5&1&3&7\\2&4&6&-1&2&8\\3&8&7&0&4&11\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{f_2'=f_2-f_1\\ f_3'=f_3-2f_1\\ f_4'=f_4-2f_1\\ f_5'=f_5-3f_1}]{}\begin{pmatrix}1&3&2&-1&1&4\\0&1&-1&2&1&-1\\0&-1&1&3&1&-1\\0&-2&2&1&0&0\\0&-1&1&3&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&2&-1&1&4\\0&1&-1&2&1&-1\\0&-1&1&3&1&-1\\0&-2&2&1&0&0\\0&-1&1&3&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{f_3'=f_3+f_2\\ f_4'=f_4+2f_2\\ f_5'=f_5+2f_2}]{}\begin{pmatrix}1&3&2&-1&1&4\\0&1&-1&2&1&-1\\0&0&0&5&2&-2\\0&0&0&5&2&-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&2&-1&1&4\\0&1&-1&2&1&-1\\0&0&0&5&2&-2\\0&0&0&5&2&-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[f_4'=f_4-f_3]{}\begin{pmatrix}1&3&2&-1&1&4\\0&1&-1&2&1&-1\\0&0&0&5&2&-2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

por tanto, **rango(A)=3.**

19.- Estudiar si existe alguna matriz A de dimensión 3x2 talque $AA^t = I$, donde I es la *matriz unidad* de orden 3.

Solución:

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+d^2 & ab+de & ac+df \\ ab+de & b^2+e^2 & bc+ef \\ ac+df & bc+ef & c^2+f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2+d^2=1 \\ b^2+e^2=1 \\ c^2+f^2=1 \\ ab+de=0 \\ ac+df=0 \\ bc+ef=0 \end{cases} \Rightarrow \exists \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R / \begin{cases} a=\cos\alpha_1 \\ d=\operatorname{sen}\alpha_1 \\ b=\cos\alpha_2 \\ e=\operatorname{sen}\alpha_2 \\ c=\cos\alpha_3 \\ f=\operatorname{sen}\alpha_3 \end{cases}$$

Además, ab+de=0 $= \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 = \cos(\alpha_1-\alpha_2) \Rightarrow \alpha_1-\alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ ó $\pm\frac{3\pi}{2}$.

Análogamente: $0 = \cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_3 = \cos(\alpha_1-\alpha_3) \Rightarrow \alpha_1-\alpha_3 = \pm\frac{\pi}{2}$ ó $\pm\frac{3\pi}{2}$.

$0 = \cos\alpha_3\cos\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_3\operatorname{sen}\alpha_2 = \cos(\alpha_2-\alpha_3) \Rightarrow \alpha_2-\alpha_3 = \pm\frac{\pi}{2}$ ó $\pm\frac{3\pi}{2}$.

Pero, $\alpha_1-\alpha_3 = (\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3) = \alpha_1-\alpha_3 = \begin{cases} 0 \\ \pm\pi \\ \pm 2\pi \end{cases}$ y no coincide con $\pm\frac{\pi}{2}$ ó $\pm\frac{3\pi}{2}$, absurdo.

Luego no existe tal matriz A.

20.- Comprobar que el valor de un *determinante de Vandermonde* es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & c & \dots & p \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & p^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (b-a)(c-a)\dots(p-a)\cdot \\ \cdot(c-b)\dots(p-b)\cdot \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Solución:

Restando en cada fila la anterior multiplicada por a el determinante queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & c & \dots & p \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & p^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & b-a & c-a & \dots & p-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & \dots & p(p-a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots \\ 0 & b^{n-2}(b-a) & c^{n-2}(c-a) & \dots & p^{n-2}(p-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\dots(p-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & c & \dots & p \\ b^2 & c^2 & \dots & p^2 \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ b^{n-2} & c^{n-2} & \dots & p^{n-2} \end{vmatrix}$$

este último determinante también **es de Vandermonde**; efectuando en él el mismo proceso y así sucesivamente se obtiene el resultado buscado.

21.- Discutir, en función del *parámetro* a, el siguiente sistema de *ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} x+2y+z = 1 \\ 2x+y+3z = -4 \\ x-y+(a+2)z = -3a-5 \\ 4x+2y+(a+6)z = -3a^2-8 \end{cases}$$

Solución:

La matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & a+2 \\ 4 & 2 & a+6 \end{pmatrix}$ de los coeficientes es de orden 4x3 y la matriz ampliada

$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & a+2 & -3a-5 \\ 4 & 2 & a+6 & -3a^2-8 \end{pmatrix}$ de orden 4x4 puede ser de rango 4.

$$\left|A^*\right|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & a+2 & -3a-5 \\ 4 & 2 & a+6 & -3a^2-8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & a+1 & -3a-6 \\ 0 & -6 & a+2 & -3a^2-12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 0 & a & -3a \\ 0 & a & -3a^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 0 & a & -3a \\ 0 & 0 & -3a^2+3a \end{vmatrix}=9a^2(a-1)=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$. Podemos distinguir tres casos:

1. Si $\boxed{a\neq 0}$ y $a\neq 1\Rightarrow$ r(A*)=4>r(A) **SISTEMA INCOMPATIBLE**.

2. Si $\boxed{\mathbf{a=0}}\Rightarrow r\left(A^*\right)=r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 6 & -8 \end{pmatrix}=2;\ r\left(A\right)=r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}=2$ <número de incógnitas.
   SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

3. Si $\boxed{\mathbf{a=1}}\Rightarrow r\left(A^*\right)=r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & -8 \\ 4 & 2 & 7 & -11 \end{pmatrix}=3;\ r\left(A\right)=r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}=3$ =número de incógnitas. **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**.

22.- a) Resolver el *sistema lineal* siguiente $AX = B$ mediante el *método de Gauss*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

b) Hallar $C \in M_3(R)$ tal que CA sea una *matriz triangular superior* equivalente por filas a A.

Solución:

a) $E_1\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & -2 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 & 17 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right)$ siendo $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv f_2 - 2f_1$

$E_2\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 & 17 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 & 17 \\ 0 & 5 & 10 & 30 \end{array}\right)$ siendo $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv f_3 - 4f_1$

$E_3\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 & 17 \\ 0 & 5 & 10 & 30 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$ siendo $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{5}f_3$

$E_4\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 17 \end{array}\right)$ siendo $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv f_2 \leftrightarrow f_3$

$E_5\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 17 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$ siendo $E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \equiv f_3 - 3f_2$

Por tanto, el sistema equivalente: $\begin{cases} x - 3z = -5 \\ y + 2z = 6 \\ -z = -1 \end{cases}$, cuya solución será $\boxed{x=-2;\ y=4;\ z=1}$

b) Si llamamos A a la matriz de los coeficientes del sistema anterior, hallar una matriz C tal que CA sea una matriz triangular superior equivalente en filas a A.

$$E_5E_4E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C = E_5E_4E_3E_2E_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

23.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 1-a \\ a & ab & 2 \end{pmatrix}$**; se pide:**

a) Estudiar el *rango* de A en función de los parámetros reales a y b.
b) Para b = 4, consideremos el sistema de *ecuaciones lineales* AX = B, donde $B = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$**. Discutir el sistema según los valores del parámetro a y resolverlo para a = 0.**
c) Calcular la *inversa* de A-2I para a=b=3.

Solución:

a) Para resolver el calculo del rango obtenemos el valor del determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 1-a \\ a & ab & 2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 2a & 1-a \\ ab & 2 \end{vmatrix} = a(4a - ab + a^2 b)$$ e igualamos a cero

$$|A| = a(4a - ab + a^2 b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b - ab = 4 \underset{a\neq 1}{\Rightarrow} b = \dfrac{4}{1-a} \end{cases}$$. Podemos distinguir los siguientes casos:

2. Si $a \neq 0, b \neq \dfrac{4}{1-a} \Rightarrow \boxed{r(A)=3}$.
3. Si a=0 $\Rightarrow |A| = 0; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A)=2}$.
4. Si $b = \dfrac{4}{1-a} \Rightarrow |A| = 0; A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 1-a \\ a & a\dfrac{4}{1-a} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{r(A)=2}$.

b) Para b=4 el sistema queda: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 1-a \\ a & 4a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$. Por el apartado anterior:

- Si $a \neq 0 \Rightarrow$ r(A)=3 y la matriz ampliada $r(A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & a \\ 1 & 2a & 1-a & 2 \\ a & 4a & 2 & a \end{array}\right) = 3$ el sistema es compatible determinado.

• Si a=0 $\Rightarrow$r(A)=2 y la matriz ampliada $r(A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\1&0&1&2\\0&0&2&0\end{array}\right)=2<$nº de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

El sistema para a=0 es $\begin{cases} x+z=2 \\ 2z=0\Rightarrow z=0\end{cases}\Rightarrow x=2\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}2\\y\\0\end{pmatrix}}$.

c) Para a=b=3 queda $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&6&-2\\3&9&2\end{pmatrix}$ y la matriz $A-2I=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&4&-2\\3&9&0\end{pmatrix}$ con $|A-2I|=18\neq 0$ tiene inversa y por adjuntos tenemos que:

$$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{|A-2I|}\begin{pmatrix}(A-2I)_{11}&(A-2I)_{21}&(A-2I)_{31}\\(A-2I)_{12}&(A-2I)_{22}&(A-2I)_{32}\\(A-2I)_{13}&(A-2I)_{23}&(A-2I)_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}4&-2\\9&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\9&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\4&-2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&-2\\3&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\3&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&-2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&4\\3&9\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\3&9\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\1&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\boxed{\frac{1}{18}\begin{pmatrix}18&0&0\\-6&0&2\\-3&-9&4\end{pmatrix}}$$

24.- Sean A y B *matrices cuadradas* de orden n. Probar que si I-AB es invertible, entonces I-BA también es *invertible* y que
$(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1}A$.
Nota: I es la matriz unidad de orden n.

Solución:

Demostremos que: $(I-BA)^{-1}(I-BA)=I$.

$(I-BA)^{-1}(I-BA)=\left(I+B(I-AB)^{-1}A\right)(I-BA)=(I-BA)+B(I-AB)^{-1}A(I-BA)=$
$=(I-BA)+B(I-AB)^{-1}(A-ABA)==(I-BA)+B(I-AB)^{-1}(I-AB)A=I-BA+BA=I$.

Puesto que $(I-BA)^{-1}(I-BA)=I$, podemos asegurar que $|I-BA|\neq 0$, luego **existe inversa** y por ser única, se cumple $(I-BA)(I-BA)^{-1}=I$.

25.- Sea A una *matriz cuadrada* de orden n tal que $A^2 + 2A + I = 0$. Entonces A es *invertible*.

Solución:

De la ecuación $A^2 + 2A + I = 0$ se tiene que $A^2 + 2A = 0 - I \Leftrightarrow A(A + 2I) = -I$ y tomando determinantes en la ecuación anterior $|A||A + 2I| = |-I| = (-1)^n = \pm 1 \neq 0$ y por tanto $|A| \neq 0$ y $|A + 2I| \neq 0$. **Luego A es una matriz invertible**.

26.- Encontrar el conjunto de matrices que *conmutan* con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Buscaremos matrices cuadradas X tales que AX=XA.

$$\text{Si } X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ se tiene que:}$$

$$AX = XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix},$$

dé donde resulta el sistema $\begin{cases} a = a + c \\ c = c \\ a + b = b + d \\ c + d = d \end{cases}$ cuya solución es d=a y c=0 y las matrices que conmutan con A son de la forma $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, es decir $\boxed{X = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in R \right\}}$

27.- Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ verifica la relación:

$A^n = 3^{n-1}A,\ n \in \mathbb{N}$.

Solución:

Utilizaremos el método de inducción, evidentemente se cumple para n=1 y para n=2 ocurre que: $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3^{2-1}A$.

Supuesto que se cumple para n, $A^n = 3^{n-1}A, n \in N$, se demuestra para n+1:

$$\boxed{A^{n+1} = A^n A = 3^{n-1}AA = 3^{n-1}3A = 3^n A}.$$

28.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hallar A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

Para n=2 se tiene que: $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para n=3 se tiene que: $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ahora podemos suponer que $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1}-1 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ y demostrar para n+1 que sigue la regla anterior,

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1}-1 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n & 2^n-1 \\ 2^n & 2^n & 2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

29.- Hallar p y q para que se verifique la ecuación: $A^2 + pA + qI = (0)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Sustituyendo en la ecuación $A^2 + pA + qI = (0)$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 + p\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2p & 1p \\ 1p & 2p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1q & 0 \\ 0 & 1q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5+2p+q & 4+p \\ 4+p & 5+2p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+2p+q=0 \\ 4+p=0 \\ 4+p=0 \\ 5+2p+q=0 \end{cases}$$

y resolviendo el sistema se obtiene p=-4 y q=3.

30.- Resolver la siguiente ecuación matricial C+AX=DB-EX siendo $|A+E| \neq 0$.

Solución:

En la ecuación C+AX=DB-EX agrupamos las expresiones que tienen la incógnita X quedando AX+EX=DB-C, aplicando la propiedad distributiva por la derecha (A+E)X=DB-C; por hipótesis $|A+E| \neq 0 \Leftrightarrow \exists (A+E)^{-1}$ y multiplicando por la inversa por la izquierda en la última ecuación $(A+E)^{-1}$(A+E)X=$(A+E)^{-1}$(DB-C)$\Leftrightarrow$ $\boxed{X=(A+E)^{-1}(DB-C)}$.

31.- Hallar las matrices *inversas* de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}\cos x & -\text{sen}x\\ \text{sen}x & \cos x\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Solución:

Primeramente calculamos el determinante de la matriz dada,

$$|A|=\begin{vmatrix}\cos x & -\text{sen}x\\ \text{sen}x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x-(-\text{sen}^2 x)=\cos^2 x+\text{sen}^2 x=1\neq 0,\ \forall x$$

Luego existe la matriz inversa de A y será: $\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos x & \text{sen}x\\ -\text{sen}x & \cos x\end{pmatrix}}$ que en este caso ocurre que $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos x & \text{sen}x\\ -\text{sen}x & \cos x\end{pmatrix}=A^t$ y se dice que A es una matriz ortogonal.

$|B|=\begin{vmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{vmatrix}=-1\neq 0$. En este caso utilizaremos el método de Gauss para obtener la inversa mediante combinaciones lineales de las filas de la matriz dada B. Consideramos la matriz B ampliada con la matriz unidad de orden 3 que es la que se quiere conseguir: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&7&1&0&0\\6&3&4&0&1&0\\5&-2&-3&0&0&1\end{array}\right)$, si multiplicamos la fila primera por 3 y se resta a la segunda y en la tercera fila le restamos los 5/2 de la primera obtenemos: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&7&1&0&0\\0&-12&-17&-3&1&0\\0&-\frac{29}{2}&-\frac{41}{2}&-\frac{5}{2}&0&1\end{array}\right)$; ahora es la tercera fila –29/24 por la fila segunda $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&7&1&0&0\\0&-12&-17&-3&1&0\\0&0&\frac{1}{24}&\frac{9}{8}&-\frac{29}{24}&1\end{array}\right)$; la fila tercera por 24 quedando $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&7&1&0&0\\0&-12&-17&-3&1&0\\0&0&1&27&-29&24\end{array}\right)$; en lugar de la segunda fila se pone 17 veces la fila tercera más la segunda fila $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&7&1&0&0\\0&-12&0&456&-492&408\\0&0&1&27&-29&24\end{array}\right)$; dividiendo por –12 la segunda fila $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -38 & 41 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & 27 & -29 & 24 \end{array}\right)$; primera menos 7 veces tercera $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 0 & -188 & 203 & -168 \\ 0 & 1 & 0 & -38 & 41 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & 27 & -29 & 24 \end{array}\right)$;

primera menos 5 veces segunda $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -38 & 41 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & 27 & -29 & 24 \end{array}\right)$; y por último dividiendo por 2 la

primera $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -38 & 41 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & 27 & -29 & 24 \end{array}\right)$. Resultando la matriz inversa de B:

$$\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}}.$$

Para $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ utilizaremos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right);\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right);\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right);\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\boxed{C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

32.- Probar que AA^t y A^tA son siempre *matrices simétricas*. ¿Es *conmutativo* el producto anterior? Mostrar también que $A + A^t$ es simétrica, si A es *cuadrada*; ¿qué sucede con $A - A^t$?

Solución:

Por definición X es una matriz simétrica si $X^t = X$, para AA^t se tiene que: $\left(AA^t\right)^t = \left(A^t\right)^t A^t = AA^t$ y para A^tA resulta que $\left(A^tA\right)^t = A^t\left(A^t\right)^t = A^tA$.

En general **no es conmutativo** el producto anterior, baste considerar un contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ pues resulta $$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ y

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ que evidentemente no pueden ser iguales.

Ahora la matriz A es cuadrada para poder efectuar la suma con su transpuesta A^t, en cuyo caso $\left(A + A^t\right)^t = A^t + \left(A^t\right)^t = A^t + A = A + A^t$ luego $A+A^t$ es simétrica; y $\left(A - A^t\right)^t = A^t - \left(A^t\right)^t = A^t - A = -(A - A^t)$ cumple que la transpuesta coincide con la opuesta que significa que **A-A^t es antisimétrica**.

33.- a) Si B es una *matriz antisimétrica*, ¿qué se puede decir de C=A^{t}BA?
b) Si A y B son *matrices simétricas*, ¿qué se puede decir de AB-BA?

Solución:

a) B es antisimétrica $\Leftrightarrow B^t = -B$. Y como C=A^{t}BA tenemos que:
$C^t = (A^tBA)^t = A^tB^t\left(A^t\right)^t = A^tB^tA \underset{\text{B es antisimétrica}}{=} A^t(-B)A = -A^tBA = -C$ luego **C es antisimétrica**.

b) Por ser A y B matrices simétricas se cumple que A^t=A y B^t=B y entonces
$(AB-BA)^t = B^tA^t - A^tB^t = BA - AB = -(AB-BA)$ $\Rightarrow AB-BA$ **es antisimétrica**.

34.- a) Hallar la *inversa* de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ b) Escribir A como producto de *matrices elementales*.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2+2f_1 \\ f_3-f_1}}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_3-f_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

luego **A no es invertible** y no puede escribirse como producto de matrices elementales.

35.- Sabiendo que las matrices A, X e Y son de orden 7 y que el determinante de A es igual a k≠0, se pide:

a) Calcular los *determinantes* de A^2, 4A, A^{-1}, $2A^2A^{-1}$, A+A.

b) Suponiendo que A-I sea *invertible*, resolver el sistema: $\begin{cases} AX + Y = 2A \\ A^3X + AY = (0) \end{cases}$

c) Resolver la siguiente ecuación matricial siendo B, C matrices de orden 7: $XA^2 - XA + CA = (X + B)A^2 + 3XA$

Solución:

a) $|A^2| = |A|^2 = \boxed{k^2}$;

$|4A| = 4^7|A| = \boxed{4^7 k}$;

$|A^{-1}| = |A|^{-1} = \boxed{k^{-1}}$;

$|2A^2A^{-1}| = 2^7|A|^2|A^{-1}| = 2^7k^2k^{-1} = \boxed{2^7 k}$;

$|A + A| = |2A| = \boxed{2^7 k}$.

b) Sabemos que A es invertible pues $|A| = k \neq 0$. En el sistema multiplicamos por la matriz A la primera ecuación: $\begin{cases} AX + Y = 2A \\ A^3X + AY = (0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(AX + Y) = A2A \\ A^3X + AY = (0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2X + AY = 2A^2 \\ A^3X + AY = (0) \end{cases}$ restamos las ecuaciones $A^2X - A^3X = 2A^2 - 0 \Rightarrow A^2(X - AX) = 2A^2 \Rightarrow (I - A)X = 2I \Rightarrow X = 2(I - A)^{-1}$. Ahora de la segunda ecuación: $A^3X + AY = 0 \Rightarrow Y = -A^2X = -A^2 2(I - A)^{-1} = 2A^2(A - I)^{-1}$

c) En la ecuación $XA^2 - XA + CA = (X + B)A^2 + 3XA$ desarrollamos el paréntesis $XA^2 - XA + CA = XA^2 + BA^2 + 3XA$ agrupamos los sumandos con incógnitas $XA^2 - XA - XA^2 - 3XA = BA^2 - CA$ quedando $-4XA = BA^2 - CA$ sacando factor común A tenemos $-4XA = (BA - C)A$ y como A es invertible multiplicando por la inversa de A $-4XAA^{-1} = (BA - C)AA^{-1} \Rightarrow -4X = BA - C$ y, por último, despejando X

$$\boxed{X = -\frac{1}{4}(BA - C) = \frac{1}{4}(C - BA)}.$$

36.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular A^2, A^3 y dar la expresión general de A^n.
b) Comprobar que $A^3 - 3A^2 + 3A = I$.
c) Obtener A^{-1}.

Solución:

a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Para generalizar debemos considerar la sucesión 1+2+3+4+….+n=(n+1)n/2 entonces:

$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ utilizando la demostración por inducción: consideramos que se cumple para n y lo demostramos para n+1:

$$A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)n}{2}+n+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 - 3A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I$

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_2-f_3}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_1-f_3}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\underset{f_1-f_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, luego $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

37.- Sea A una matriz ortogonal ($A^{-1}=A^{t}$). Se pide:
a) Estudiar si A^{-1} y A^{t} son también *matrices ortogonales*.
b) Hallar $|A|$.
c) Si B es otra matriz ortogonal del mismo orden que A, estudiar si AB es ortogonal.

Solución:

a) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=\left(A^{t}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{t}\Rightarrow A^{-1}$ **es ortogonal**. $\left(A^{t}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{-1}=A=\left(A^{t}\right)^{t}\Rightarrow A^{t}$ **es también ortogonal**.

b) $|A|=\left|A^{t}\right|=\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}\Rightarrow|A|^{2}=1\Rightarrow\boxed{|A|=\pm 1}$.

c) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=B^{t}A^{t}=(AB)^{t}\Rightarrow$ **AB es una matriz ortogonal**.

38.- Discutir, según los valores de los *parámetros* a y b, el siguiente sistema de ecuaciones. Resolverlo para a = b = 1.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad\qquad -3x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad\qquad + 2x_5 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + a\,x_4 + x_5 = b \end{cases}$$

Solución:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & a & 1 & b \end{array}\right),\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,\quad \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & -2 \end{vmatrix} = 4(a-1) = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 & 0 \end{vmatrix} = -2(a-1) = 0 \Rightarrow a = 1$$

Caso 1:

$\mathbf{a \neq 1} \Rightarrow r(A) = 4 = r(A^*) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema Compatible Indeterminado**.

Caso 2: $\mathbf{a = 1} \Rightarrow r(A) = 3$, ¿cuál es el $r(A^*)$?

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & b-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & b-8 \end{vmatrix} = -6(b-1) = 0 \Rightarrow b = 1$$

Caso 2a: a = 1 y $\mathbf{b \neq 1} \Rightarrow r(A) = 3$ y $r(A^*) = 4 \Rightarrow$ **Sistema Incompatible**.

Caso 2b: a = 1 y $\mathbf{b = 1} \Rightarrow r(A) = 3 = r(A^*) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ **Compatible Indeterminado**.

Solución para el caso a = 1 y b =1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & 2-2x_1+x_2 \\ 1 & 2 & 2 & 3+x_1-x_2 \\ 3 & 0 & 2 & 6-x_1-x_2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3+x_1-x_2 \\ 0 & -3 & -1 & 2-2x_1+x_2 \\ 0 & -6 & -4 & -3-4x_1+2x_2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3+x_1-x_2 \\ 0 & -3 & -1 & 2-2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_5 = -7 & \Rightarrow x_5 = \dfrac{7}{2} \\ -3x_4 = 2 - 2x_1 + x_2 + x_5 & \Rightarrow x_4 = -\dfrac{11}{6} + \dfrac{2}{3}x_1 - \dfrac{1}{3}x_2 \\ x_3 = 3 + x_1 - x_2 - 2x_4 - 2x_5 & \Rightarrow x_3 = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}x_1 - \dfrac{1}{3}x_2 \end{cases}$$

39.-a) Resolver el sistema matricial siguiente:

$$\begin{cases} 3AX + 4Y = I_3 \\ 3X + 2Y = O_3 \end{cases}$$

¿Qué condición ha de cumplirse para que el sistema anterior sea *compatible*?

b) La matriz solución X ¿puede verificar $|X| = 0$?

c) Resolver el sistema de *ecuaciones lineales*:

$$\begin{cases} 2x + 0y + 3z + t = 0 \\ 0x + 0y + z - t = 0 \\ x + 0y + 0z + 2t = 0 \end{cases}$$

Solución:

a) $\begin{cases} 3AX + 4Y = I_3 \\ 3X + 2Y = O_3 \end{cases}$, despejando en la segunda ecuación $Y = -\frac{3}{2}X$ y sustituyendo en la primera $3AX-6X=I_3$, por tanto $(3A-6I_3)X=I_3$, si suponemos que existe $(3A-6I_3)^{-1}$ obtenemos:

$$\begin{cases} X = (3A\text{-}6I_3)^{-1} \\ Y = -\frac{3}{2}(3A\text{-}6I_3)^{-1} \end{cases}$$

b) $|X| = |(3A\text{-}6I_3)^{-1}| = \dfrac{1}{|3A\text{-}6I_3|} \neq 0$; **No**

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-\frac{1}{2}f_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+\frac{3}{2}f_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

por tanto, **z = t, x=-2t para cualquier valor de y**.

40.- a) Estudiar el *rango* de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & a & b \end{pmatrix}$ **según los valores de a y b.**

b) Resolver el sistema de *ecuaciones lineales* cuya matriz ampliada es M en los casos en que sea *compatible*.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & b+1 \end{pmatrix}$

Si b = -1 entonces **rango(M)=2.**

Si b $\neq$ -1 entonces **rango(M)=3.**

b)

La solución al sistema cuya matriz ampliada sea M es:

$$\begin{cases} x+z=-1 \\ 2z=0 \\ (a-1)z=b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

41.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ **hallar:**

a) En función de los valores p y q, una matriz X tal que $AX = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

b) Una matriz Y tal que $A^2Y + AY = A$.

c) Un valor de λ tal que $|A - \lambda I| = 0$.

d) El valor de los *determinantes* siguientes:

$|A^5|$, $|5A|$, $|A^{-1}|$, $|-A|$, $|A \cdot A^t|$, $|A + A^t|$.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $|A| = 2$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{7}{2}p - \frac{3}{2}q \\ -2p + q \end{pmatrix}}$

b) $A^2Y + AY = A \Rightarrow A(A+I)Y = A \Rightarrow (A+I)Y = I \Rightarrow Y = (A+I)^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$

c) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{2}}$.

d)

$|A| = \boxed{2}$,

$|A^5| = |A|^5 = \boxed{32}$.

$|5A| = 25|A| = \boxed{50}$.

$|A^{-1}| = \boxed{2^{-1}}$

$|-A| = (-1)^2|A| = \boxed{2}$

$|AA^t| = |A||A^t| = \boxed{4}$,

$|A + A^t| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 14 \end{vmatrix} = \boxed{7}$

42.- Sean A, B, X, e Y$\in M_n(\mathbb{R})$ matrices *inversibles* que verifican el sistema:

$$\begin{cases} 2AX^{-1} + Y = 0 \\ -3A - YX = (AB)^{-1}X \end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar X e Y.

b) Resolverlo para el caso concreto: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{cases} 2AX^{-1} + Y = 0 \\ -3A - YX = (AB)^{-1}X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = -2AX^{-1} \\ -3A - (-2AX^{-1})X = (AB)^{-1}X \end{cases} \Rightarrow -3A + 2A\underbrace{X^{-1}X}_{I} = (AB)^{-1}X$

$$\Rightarrow -A = (AB)^{-1}X \Rightarrow -(AB)A = \underbrace{(AB)(AB)^{-1}}_{I}X = X \Rightarrow \boxed{X = -ABA}$$

$$Y = -2AX^{-1} = -2A(-ABA)^{-1} = 2AA^{-1}B^{-1}A^{-1} = \boxed{2B^{-1}A^{-1}}$$

b)

$$X = -ABA = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y = 2B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

43.- a) Calcular las *matrices cuadradas* de orden 3, X e Y, que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$2X + Y = B$$
$$X - 2Y = C$$

b) Si X e Y son las matrices anteriores, calcular, en función de B y C, la matriz Z definida por:

$$Z = (2X + Y)\,X - (2X + Y)(2Y)$$

Solución:

a) Multiplicando la primera ecuación por 2 y sumando las ecuaciones

$$\begin{array}{l} 4X+2Y=2B \\ \underline{\;X-2Y=C\quad} \\ 5X \quad = \;2B+C \;\Rightarrow \end{array}$$

$$\boxed{X=\frac{2}{5}B+\frac{1}{5}C}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -2 y sumando las ecuaciones

$$\begin{array}{l} \;\;2X+Y=B \\ \underline{-2X+4Y=-2C} \\ \qquad 5Y \;=\; B-2C \;\Rightarrow \end{array}$$

$$\boxed{Y=\frac{1}{5}B-\frac{2}{5}C}$$

b)

$$Z=\left(2X+Y\right)X-\left(2X+Y\right)\left(2Y\right)=\left(2X+Y\right)\left(X-2Y\right)=$$

$$=\left(\underbrace{\frac{4}{5}B+\frac{2}{5}C}_{2X}+\underbrace{\frac{1}{5}B-\frac{2}{5}C}_{Y}\right)\left(\underbrace{\frac{2}{5}B+\frac{1}{5}C}_{X}\underbrace{-\frac{2}{5}B+\frac{4}{5}C}_{-2Y}\right)=\boxed{BC}.$$

44.- Sabiendo que las matrices X e Y son de *dimensión* 2x3 y verifican el sistema $\left.\begin{array}{l} 5X - 2Y = A \\ 3X^t + 2Y^t = B \end{array}\right\}$ **en el que** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$**, hallar dichas matrices X e Y.**

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 5X - 2Y = A \\ 3X^t + 2Y^t = B \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 5X - 2Y = A \\ 3X + 2Y = B^t \end{array}\right\} \Rightarrow X = \frac{1}{8}\left(A + B^t\right)$$

$$X = \frac{1}{8}\left(A + B^t\right) \Rightarrow Y = \frac{1}{2}(5X - A) = \frac{1}{2}\left(5\frac{1}{8}\left(A + B^t\right) - A\right) = -\frac{3}{16}A + \frac{5}{16}B^t$$

en nuestro caso: $\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$, $\boxed{Y = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$

45.- Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & h+1 \end{pmatrix}$**, se pide:**

a. Hallar el *rango* de B para los distintos valores de h

b. Calcular para qué valores de h existe la *matriz inversa* de B.

c. ¿Para qué valores de h la matriz B es *ortogonal*?

d. Para el valor h = 2, resolver el sistema matricial siguiente: $\begin{cases} BX + Y = 2B \\ B^2X + BY = I \end{cases}$

Solución:

a)

$$|B| = \begin{vmatrix} h+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & h+1 \end{vmatrix} = h^3(h+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} h = 0 \\ h = -4 \end{cases}$$

Si h es distinto de -4 o distinto de 0, entonces r(B)=4

Si h=-4, entonces $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(B) = \text{rango}\begin{pmatrix} -4+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4+1 \end{pmatrix} = \boxed{3}$

Si h=0, entonces $\text{rango}(B) = \text{rango}\begin{pmatrix} 0+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0+1 \end{pmatrix} = \boxed{1}$

b) Si **h es distinto de -4 o distinto de 0**, entonces existe la matriz inversa, ya que

$$|B| = \begin{vmatrix} h+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & h+1 \end{vmatrix} = h^3(h+4) \neq 0$$

c) B es una matriz ortogonal si y sólos $B \cdot B^t = I$

$$BB^t=\begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & h+1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & h+1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & h+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & h+1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & h+1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & h+1\end{pmatrix}^t=$$

$$=\begin{pmatrix} h^2+2h+4 & 2(h+2) & 2(h+2) & 2(h+2)\\ 2(h+2) & h^2+2h+4 & 2(h+2) & 2(h+2)\\ 2(h+2) & 2(h+2) & h^2+2h+4 & 2(h+2)\\ 2(h+2) & 2(h+2) & 2(h+2) & h^2+2h+4\end{pmatrix}=I\Rightarrow$$

$$\begin{cases} h^2+2h+4=1\Rightarrow \text{¡IMPOSIBLE!}\\ 2(h+2)=0\Rightarrow h=-2\end{cases}$$

Para ningún valor de h puedes ser B una matriz ortogonal.

d)

$\begin{cases} BX+Y=2B\\ B^2X+Y=I\end{cases}$ restamos las ecuaciones

$$BX-B^2X=2B^2-I\Rightarrow (B-B^2)X=2B^2-I\Rightarrow X=(B-B^2)^{-1}\left(2B^2-I\right).$$

Ahora de la segunda ecuación: $B^2X+Y=I\Rightarrow Y=I-B^2X=I-B^2(B-B^2)^{-1}\left(2B^2-I\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} X&=(B-B^2)^{-1}\left(2B^2-I\right)\\ Y&=I-B^2(B-B^2)^{-1}\left(2B^2-I\right)\end{aligned}}$$

Para el valor de h=2:

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow B^2=\begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 & 8\\ 8 & 12 & 8 & 8\\ 8 & 8 & 12 & 8\\ 8 & 8 & 8 & 12\end{pmatrix}\Rightarrow B-B^2=\begin{pmatrix} -9 & -7 & -7 & -7\\ -7 & -9 & -7 & -7\\ -7 & -7 & -9 & -7\\ -7 & -7 & -7 & -9\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left(B-B^2\right)^{-1}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix} -23 & 7 & 7 & 7\\ 7 & -23 & 7 & 7\\ 7 & 7 & -23 & 7\\ 7 & 7 & 7 & -23\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\frac{1}{60}\begin{pmatrix} -73 & 17 & 17 & 17\\ 17 & -73 & 17 & 17\\ 17 & 17 & -73 & 17\\ 17 & 17 & 17 & -73\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{Y=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 44 & 9 & 9 & 9\\ 9 & 44 & 9 & 9\\ 9 & 9 & 44 & 9\\ 9 & 9 & 9 & 44\end{pmatrix}}$$

46.- a) Demostrar que $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, siendo A y B matrices *inversibles* del mismo orden.

b) Consideremos la ecuación matricial $[I-(BA)^t]X-(C-I)^{-1}=DX-A^tB^tX$, siendo A,B,C,D *matrices cuadradas* de orden n e I la matriz unidad del mismo orden.

i) Despejar X.

ii) ¿Qué condición ha sido necesaria para poder despejar X?

iii) Hallar X, si es posible, en cada uno de los siguientes casos.

1) $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$

b)

i) $X - A^tB^tX - (C-I)^{-1} = DX - A^tB^tX \Leftrightarrow (I-D)X = (C-I)^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (I-D)^{-1}(C-I)^{-1}}$

ii) **Ha sido necesario que la matriz I-D sea inversible**.

iii) Caso 1:

$$I-D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}}$$

Caso 2:

$\boxed{I-D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ no es inversible}}$ por tener determinante nulo, luego no es posible despejar X.

47.- a) Discutir el siguiente sistema según los distintos valores de *a*:

$$\begin{cases}(1-a)x+(1+2a)y+2(a+1)z=a\\ ax+ay=2(a+1)\\ 2x+(a+1)y+(a-1)z=a^2-2a+9\end{cases}$$

b) Resolver el sistema para el valor de *a* que hace al *sistema compatible indeterminado*.

c) Para el valor de *a* del apartado anterior razonar cuál es el mínimo número de *ecuaciones linealmente independientes* y qué ecuación o ecuaciones son *combinación lineal* del resto. ¿Hay alguna solución en la cual $x=\frac{2}{\sqrt{11}}$?

Solución:

a)

$$\begin{cases}(1-a)x+(1+2a)y+2(a+1)z=a\\ ax+ay=2(a+1)\\ 2x+(a+1)y+(a-1)z=a^2-2a+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1-a & -1+2a & 2(a+1)\\ a & a & 0\\ 2 & a+1 & a-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ 2(a+1)\\ a^2-2a+9\end{pmatrix}$$

Aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius para discutir el sistema.

$$\begin{vmatrix}1-a & -1+2a & 2(a+1)\\ a & a & 0\\ 2 & a+1 & a-1\end{vmatrix}=a(1-a)(a-2)=0\Rightarrow a=\begin{cases}0\\ 1\\ 2\end{cases}$$

Para a = 0, las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$a=0\Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=2 \text{ y rango}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 9\end{array}\right)=3$$

Luego para **a= 0 el sistema es incompatible**.

Para a = 1, las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$a=1\Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}=2 \text{ y rango}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 4\\ 2 & 2 & 0 & 8\end{array}\right)=2$$

Luego para **a= 1 el sistema es compatible indeterminado** con un grado de libertad.

Para a = 2, las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$a=2\Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix}-1 & 5 & 6\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=2 \text{ y rango}\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 5 & 6 & 2\\ 2 & 2 & 0 & 6\\ 2 & 3 & 1 & 5\end{array}\right)=3$$ Luego para a= 2 el sistema es incompatible.

Para el resto, es decir, para **$a\neq 0$,y $a\neq 1$ y $a\neq 2$** el rango de A es 3 y por tanto, **compatible determinado**.

b)

$$\begin{cases} 3y+4z=1 \\ x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+4z=1 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=4-t \\ y=t \\ z=\dfrac{1-3t}{4} \end{cases}}$$

c)

En el apartado a) hemos obtenido que para a=1 el rango de la matriz de los coeficientes = rango de la matriz ampliada =2, luego el máximo número de ecuaciones linealmente independientes es 2.

Observamos que la tercera ecuación es 2 veces la segunda, luego el sistema es equivalente al formado por las dos primeras ecuaciones.

Sustituimos el valor de x en el sistema equivalente y resolvemos el sistema en y, z.

$$\begin{cases} 3y+4z=1 \\ x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+4z=1 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+4z=1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{11}}+y=4 \Rightarrow y=4-\dfrac{2}{\sqrt{11}} \end{cases} \Rightarrow z=\frac{1-3y}{4}=\frac{3\sqrt{11}}{22}-\frac{11}{4}$$

$$\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ y=4-\dfrac{2\sqrt{11}}{11} \\ z=\dfrac{3\sqrt{11}}{22}-\dfrac{11}{4} \end{cases}}$$

48.- Sean A, B, C, X *matrices cuadradas* de orden n. Se pide resolver la siguiente ecuación matricial indicando, cuando sea preciso, las condiciones que deben cumplir las matrices que vayan surgiendo para poder despejar la incógnita X:

$$(A + B^t X^t)^t - (A^{-1} B^t)^t = (C - 2X)B - (A^t B^{-1})^{-1}$$

Solución:

Aplicaremos las siguientes propiedades

$(A + B)C = AC + BC$

$(AB)^t = B^tA^t$, $(A^t)^t = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1}$

$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Suponemos que existen tanto $\mathbf{A^{-1}}$ como $\mathbf{B^{-1}}$

Aplicando las propiedades correspondientes mencionadas quitamos los paréntesis en la ecuación dada y se obtiene:

$A^t + XB - B(A^{-1})^t = CB - 2XB - B(A^t)^{-1}$ y como $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

$A^t + XB = CB - 2XB$, sumando 2XB a ambos miembros y restando A^t

$3XB = CB - A^t$, multiplicando por B^{-1} a la derecha de ambos miembros

$3XBB^{-1} = CBB^{-1} - A^tB^{-1} \Rightarrow 3X = C - A^tB^{-1}$ y multiplicando por 1/3 ambos miembros:

$$\boxed{X = (C - A^tB^{-1})/3}$$

49.- a) Discutir y resolver, según los valores de *m*, el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ mx + y - z = m - 2 \\ 3x + my + z = m - 2 \end{cases}$$

b) Hallar, para *m* = 2, la *solución particular* tal que *y* =1.

Solución:

a) Discutir según los valores de m, el sistema propuesto:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ mx+y-z=m-2 \\ 3x+my+z=m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m-2 \\ m-2 \end{pmatrix}$$

Al tratarse de un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas hallamos, en primer lugar, el determinante de la matriz A de los coeficientes (llamaremos A|B a la matriz ampliada)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 8 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} -2 \\ 2 \end{cases}$$

Discusión:

i) Para **m≠-2** y **m≠2** rango (A) = 3 = rango (A|B), luego el sistema es **compatible determinado** y su solución es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m-2 \\ m-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ m-2 \\ m-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m-2}{m+2} \\ \frac{m-2}{m+2} \\ \frac{2-m}{m+2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{m-2}{m+2} \\ y = \frac{m-2}{m+2} \\ z = \frac{2-m}{m+2} \end{cases}}$$

ii) Si **m = -2**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \\ r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) = 3 \end{cases}$$

, luego para m=-2 el sistema es **incompatible**.

iii) Si **m = 2**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, rango (A) = 2 = rango (A*) < número de incógnitas, luego el sistema es

compatible indeterminado y su solución es: $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{5}{3}t \\ z = \frac{1}{3}t \end{cases}$

b) Para y=1

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

50.- Dado el sistema

$$\begin{aligned} ax + y + z + t &= 1\\ x + ay + z + t &= b\\ x + y + az + t &= b^2\\ x + y + z + t &= b^3 \end{aligned}$$

Se pide:

1) Discutirlo según los valores de a y b.

2) Resolverlo cuando sea *compatible*.

Solución:

1)

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z+t=0\\ x+ay+z+t=0\\ x+y+az+t=0\\ x+y+z+t=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ b\\ b^2\\ b^3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que la matriz de los coeficientes es: $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Si **a distinto de 1** entonces rango (A) = rango (A|B) = 4 y el sistema es **compatible determinado** para todo b.

Si a = 1, se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ b\\ b^2\\ b^3 \end{pmatrix} \Rightarrow A\,|\,B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & b\\ 1 & 1 & 1 & 1 & b^2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & b^3 \end{array}\right)$$

Rango de A =1 para cualquier b.
Distinguimos:
Si **b es distinto de 1**, en este caso, el rango de A|B es 2 y por tanto el sistema es **incompatible**.
Si **b = 1**. Para este valor rango A = rango A|B = 1, luego el sistema es **compatible indeterminado**.

2) Resolución si a es distinto de 1 por la Regla de Cramer

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ b & a & 1 & 1\\ b^2 & 1 & a & 1\\ b^3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{1-b^3}{a-1}}$$

$$y=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & b & 1 & 1\\ 1 & b^2 & a & 1\\ 1 & b^3 & 1 & 1\end{vmatrix}=\boxed{\frac{b(1-b^2)}{a-1}}$$

$$z=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & b & 1\\ 1 & 1 & b^2 & 1\\ 1 & 1 & b^3 & 1\end{vmatrix}=\boxed{\frac{b^2(1-b)}{a-1}}$$

$$t=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & b\\ 1 & 1 & a & b^2\\ 1 & 1 & 1 & b^3\end{vmatrix}=\boxed{\frac{(a+2)b^3-b^2-b-1}{a-1}}$$

51. a) Dada la ecuación matricial B (X A - D)= C+ X A, donde A, B, C, D y X son matrices cuadradas de orden n, obtener la *matriz* X, sabiendo que A, B y (B-I) tienen inversa. Siendo I la *matriz identidad* de orden n.

b) Hallar dos matrices X e Y de *dimensión* 2x3 tales que cumplan que

$$\begin{cases} X + Y = A \\ 4X + \frac{2}{3}Y = B \end{cases}$$

siendo A y B dos matrices cualesquiera de la misma *dimensión* 2x3.

c) Dado el *sistema de ecuaciones lineales* $\begin{cases} nx + 2y + z = 1 \\ -2x - ny + z = 1 \\ 3x - 2z = 2 \end{cases}$ **se pide, estudiar las soluciones del sistema en función del parámetro n.**

Solución

a) De la ecuación matricial dada B(XA-D)= C+ XA

Quitamos paréntesis: BXA-BD=C+ XA ; BXA- XA=C+BD ;(BX- X)A=C+BD

multiplicamos por A^{-1} en ambos lados: BX- X=(C+BD)A^{-1}

Sacamos X factor común (derecha): (B-I)X=(C+BD)A^{-1} Donde I es la matriz unidad

Multiplicamos $(B-I)^{-1}$ a ambos lados (izquierda): **$X=(B-I)^{-1}\cdot(C+BD)A^{-1}$**

b) En el sistema dado:
Multiplicamos por 2/3 la primera ecuación y le restamos la segunda

$$\begin{cases} \frac{2}{3}X + \frac{2}{3}Y = \frac{2}{3}A \\ 4X + \frac{2}{3}Y = B \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{3} - 4\right)X = \frac{2}{3}A - B$$

$$-\frac{10}{3}X = \frac{2}{3}A - B \Rightarrow X = -\frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}A - B\right) = \boxed{-\frac{1}{5}A + \frac{3}{10}B = X}$$

$$\Rightarrow Y = A - X \Rightarrow Y = A - \left(-\frac{1}{5}A + \frac{3}{10}B\right) = \boxed{\frac{6}{5}A - \frac{3}{10}B = Y}$$

c)
Si A es la matriz de coeficientes, |A| = $2n^2+3n-2$. Sus raíces son n=-2 y n=1/2.

Para cualquier otro valor el sistema es **compatible determinado**
Para **n=-2** rango(A)=2 = rango (A*), **sistema compatible indeterminado**
Para **n=1/2**, rango(A) = 2 pero rango (A*) = 3 **sistema incompatible**

52.- a) En el siguiente sistema de ecuaciones matriciales formado por matrices cuadradas de orden 3, se pide obtener las matrices X e Y

$$\begin{cases} 3AX + 4Y = I \\ 3X + 2Y = O \end{cases}$$

Siendo I la *matriz identidad* de orden 3 y 0 la *matriz nula* de orden 3.

b) Dada la ecuación matricial B(XA+D)=-C+3BXA , donde las matrices A,B,C y D son matrices cuadradas inversibles, se pide obtener la matriz X.

c) Dado el *sistema de ecuaciones lineales* $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ -2x - ay + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Discutir las soluciones del sistema en función de los valores del parámetro a.

Solución

a) Multiplicando la segunda ecuación por 2 y restándola a la primera queda

3AX+6X=I de donde (3A-6I)X = I quedando $\mathbf{X = 3(A-2I)^{-1}}$

Sustituyendo ahora en la segunda ecuación queda $3(3(A-2I)^{-1})+2Y = 0$ despejando

$$\mathbf{Y = -(9/2)\,(A-2I)^{-1}}$$

b) Operando, BXA+BD = -C+3BXA por tanto, BD+C = 2BXA y despejando la matriz X

$$\mathbf{X = (1/2)B^{-1}(BD+C)A^{-1}}$$

c)

La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ -2 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ por tanto, |A|=-2-a

Así pues cuando **a≠-2** rango (A)=3 y el sistema es **compatible y determinado**
Cuando **a =- 2**, |A|=0 y el sistema queda:

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 1 \\ -2x + 2y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Que, viendo las dos primeras ecuaciones, es un **sistema incompatible**.

53.- La *matriz* A es *nilpotente* de orden 3 ($A^3=0$) y la matriz B = I + A. Demostrar que $B^{-1} = I - A + A^2$.

Solución:

Ya que existe B^{-1}, se cumple $I=B.B^{-1} =(I+A)(I-A+A^2)=I-A+A^2+A-A^2+A^3=I+0=I$

Análogamente se cumple: $(I-A+A^2)\ (I+A)=I$

54.- Dada la ecuación matricial X A = A^t+X, donde $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$**, obtener la** ***matriz*** **X.**

Solución:

Dada la ecuación matricial **X A = A^t+X** de la cual podemos despejar X de la siguiente manera

X A - X= A^t.

Por la propiedad distributiva **X (A – I) = A^t.**

Observamos que $|A-I|=\left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=2\neq 0$

luego existe $(A\text{-}I)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y podemos multiplicar por la derecha

$$\mathbf{X\,(A - I)\,(A - I)^{-1} = A^t\,(A - I)^{-1}}$$

Simplificando $\boxed{\mathbf{X = A^t\,(A - I)^{-1}}}$

En nuestro caso

$$X=A^t(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

55.- Probar que si I-AB es *inversible*, entonces la *matriz* I-BA también lo es y verifica:

$$(I-BA)^{-1}=I+B(I-AB)^{-1}A$$

Solución:

En efecto:

$(I-BA)(I-BA)^{-1}=(I-BA)(I+B(I-AB)^{-1}A)=$

$=(I-BA)+ (I-BA)B(I-AB)^{-1}A=$

$=(I-BA)+B(I-AB)^{-1}A-BAB(I-AB)^{-1}A=(I-BA)+(B-BAB)\ (I-AB)^{-1}A=$

$=I-BA+B(I-AB)(I-AB)^{-1}A=I-BA+BA=I$

Análogamente sería $(I-BA)^{-1}(I-BA)=I$

56.- Sean A, B, C, X matrices cuadradas de orden n. Se pide resolver la siguiente ecuación matricial indicando, cuando sea preciso, las condiciones que deben cumplir las matrices que vayan surgiendo para poder despejar la incógnita X:

$$(A + XB) - (A^{-1} B) = (C - 2X)B - (B^{-1}A)^{-1}$$

Solución:

$$(A + XB) - (A^{-1} B) = (C - 2X)B - (B^{-1}A)^{-1}$$

$$(A + XB) - (A^{-1} B) = (C - 2X)B - A^{-1}B$$

$$A + XB = (C - 2X)B$$

$$A + XB = CB - 2XB$$

$$3XB = CB-A$$

$$\mathbf{X=1/3(CB-A)B^{-1}}$$

Es necesario que **exista la matriz inversa de B**, que por otra parte, ya aparece en el enunciado.

Matriz.

Una **matriz** es un conjunto de elementos de un cuerpo K ordenados en filas y columnas.

Si la matriz tiene m filas y n columnas, se escribe así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

Matriz cuadrada

Una **matriz** es **cuadrada** cuando su número de filas coincide con el número de columnas $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

Matriz inversa de una matriz cuadrada

Sea $A \in M_n(K)$. **Matriz inversa de A** es la matriz $A^{-1} \in M_n(K)$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, siempre que dicha matriz exista.

Sistemas de ecuaciones lineales

Se llama **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** a un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$S \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde los **coeficientes** $\mathbf{a_{ij}}$, i=1,...,m, j=1,...,n, y los **términos independientes** $\mathbf{b_i}$, i=1,...,m, son escalares de un cuerpo K y $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ son las **incógnitas**.

Matriz nilpotente

Una **matriz** $A \in M_n(K)$ es: **nilpotente** si para algún número natural k, $A^k = 0$.
La matriz A es un divisor de cero.

Compatible

- **Ecuación compatible** es aquella que tiene alguna solución. Puede ser, a su vez, **compatible determinada** cuando tiene una única solución, y **compatible indeterminada** cuando tiene más de una solución (en este caso tendrá infinitas soluciones).
- **Sistema compatible** es aquél que tiene alguna solución. Puede ser, a su vez, **compatible determinado** cuando tiene una única solución, y **compatible indeterminado** cuando tiene más de una solución (en este caso tendrá infinitas soluciones).

Matriz unidad

La **matriz unidad de orden n** tiene nulos todos sus elementos excepto los de la diagonal principal que son unos; se denota por $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$

Dimensión

El número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial se denomina **dimensión** del espacio vectorial. Escribiremos dim(V).

La **dimensión** de un espacio afín es la dimensión del espacio vectorial asociado.

Se dice que la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ tiene **dimensión** $m \times n$; si m = n, diremos que A es una matriz de **orden n**.

Solución general

La **solución general** (ó simplemente la solución) de una ecuación es el conjunto formado por todas las soluciones particulares.
La **solución general** (ó simplemente la solución) de un sistema es el conjunto formado por todas las soluciones particulares.

Solución particular

Una **solución particular** de una ecuación lineal es una n-upla de escalares $(c_1, c_2, ..., c_n)$ tal que $a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n = b$.
Una **solución particular** de un sistema de ecuaciones lineales es una n-upla de escalares $(c_1, c_2, ..., c_n)$ que sea solución de cada una de las m ecuaciones del sistema.

Matriz nula

La **matriz nula** de dimensión m $\times$ n es la que tiene nulos todos sus elementos.

Rango de un sistema de vectores

Rango de un sistema de vectores es igual al número máximo de vectores linealmente independientes que contiene.

Rango de una aplicación lineal

Rango de la aplicación lineal f es la dimensión del subespacio Imagen de f.

Rango de una matriz

Rango de la matriz A es el orden del menor de mayor orden no nulo de A. Lo denotaremos por r(A) o bien por rg(A).

En Estadística

Rango o recorrido de una variable estadística

Es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable estadística.

Matriz Ortogonal

Una matriz $A \in M_n$ es **ortogonal** cuando su inversa coincide con su traspuesta, es decir, $A^{-1} = A^t$.

Linealmente independientes

Sean f_1, f_2,…,f_k filas de una matriz cualquiera A. Las filas f_1, f_2,…,f_k son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $(0) = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros, se deduce obligatoriamente que $\lambda_i = 0, \ \forall i$.

Sean $\vec{\mathbf{a}}_1, ..., \vec{\mathbf{a}}_n$ vectores de V. Los vectores $\vec{\mathbf{a}}_1, ..., \vec{\mathbf{a}}_n \in \mathbf{V}$ son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $\vec{\mathbf{0}} = \lambda_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + ... + \lambda_n \vec{\mathbf{a}}_n$ .se deduce obligatoriamente que $\lambda_i = \mathbf{0}, \ \forall \mathbf{i}$. También se dice que constituyen un sistema ***libre***.

Los puntos A, B, C y D son **linealmente independientes** si lo son los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Combinación lineal

Sean $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vectores de V. Llamaremos **combinación lineal** *d*e los vectores $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n \in V$ a todo vector $\vec{v} \in V$ de la forma $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, siendo $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$.

Ecuación lineal

Se llama **ecuación lineal** a una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$, así como el término independiente b, son escalares de un cuerpo conmutativo K, y $x_1, x_2, ..., x_n$ son las incógnitas.

Determinante de una matriz cuadrada de orden 2.

El **determinante de la matriz** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$ es el escalar $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$; se escribe así: $|A| = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Determinante de una matriz cuadrada de orden 3.

El **determinante de la matriz** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(K)$ es el escalar: $a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$; se escribe:

$$|A| = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden n

Si $A \in M_n(K)$, se define el **determinante de A**, y se denota como antes, a la suma de los productos de los elementos de la primera fila de A por sus correspondientes adjuntos (que serán determinantes de orden n-1).

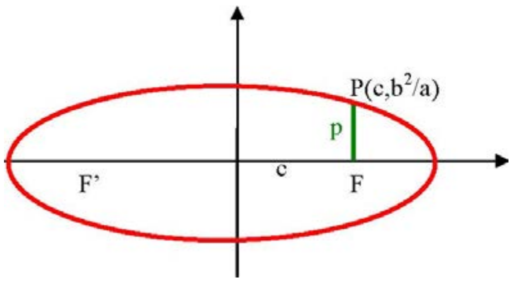
i) $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$, **desarrollo del determinante de A por los elementos de la fila i-ésima**.

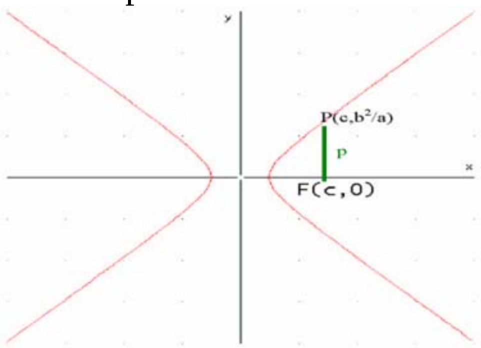
ii) $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$, **desarrollo del determinante de A por los elementos de la columna j-ésima**.

Parámetro

- Símbolo que representa una constante en un problema cuyo valor puede variar de unos casos a otros.
- Variable que interviene en las ecuaciones de algunos lugares geométricos.

En las cónicas con centro el **parámetro** focal es la semicuerda que pasa por el foco perpendicular al eje focal, cuyo valor es: $p = b^2/a$





En la parábola es la distancia del foco a la directriz.

Matriz elemental

Una **matriz elemental** es la que se obtiene efectuando operaciones elementales en las filas de la matriz unidad. Estas operaciones elementales son:

(1) Intercambiar entre sí las filas i y j:
$$I(i,j)=\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

(2) Multiplicar la fila i por un escalar α no nulo:
$$I(\alpha\, i)=\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

(3) Sumar a la fila i, la fila j multiplicada por un escalar α no nulo:

$$I(i+\alpha j)=\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

matrices elementales que se obtienen al aplicar a la matriz unidad las operaciones elementales (1), (2) y (3), respectivamente.

Nota: Las operaciones elementales entre las columnas de una matriz $A \in \mathbf{M}_n$, se pueden expresar de manera análoga, como producto, a la derecha de A, por matrices elementales, las cuales se obtienen aplicando a la matriz identidad I_n la operación elemental correspondiente.

Matriz simétrica

Una **matriz** cuadrada es **simétrica** cuando $A^t = A$, es decir, $A=(a_{ij})$ tal que $a_{ij} = a_{ji}$, siendo i,j=1, 2, ..., n.

Matriz antisimétrica

Una **matriz** cuadrada es **antisimétrica** cuando $A^t = -A$, es decir, $A=(a_{ij})$ tal que $a_{ij} = -a_{ji}$, i,j=1, 2, ..., n.

Método de Gauss-Jordan

Se trata de transformar un sistema de ecuaciones lineales S, mediante operaciones elementales y siempre que sea posible, en un sistema S’ de la siguiente forma que denominaremos **diagonal**:

$$S' \equiv \begin{cases} x_1 \qquad\qquad = b'_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_n = b'_n \end{cases}$$

Método de Gauss para el cálculo de la matriz inversa

Sea $A \in M_n(K)$ invertible. Si encontramos $E_1, E_2, \dots, E_m$ matrices elementales tales que $E_m \dots E_2\, E_1\, A = I$, entonces, $E_m \dots E_2\, E_1\, A\, A^{-1} = I\, A^{-1}$ y, por tanto, $E_m \dots E_2\, E_1\, I = A^{-1}$.

Luego, efectuando en las filas de la matriz unidad las mismas operaciones elementales que efectuadas sobre las filas de A nos la transforman en la matriz unidad, obtenemos la matriz inversa de A. En esto consiste precisamente el método de Gauss cuya forma práctica de realización viene dada por el siguiente esquema:

$$(A|I) \to \underset{\dots}{\overset{\text{operaciones elementales}}{}} \to (I|A^{-1})$$

Método de Gauss para la resolución de sistemas.

Sea S un sistema de ecuaciones lineales, el método de Gauss consiste en transformar S, mediante operaciones elementales, en un sistema S’ de forma escalonada o triangular cuya resolución es inmediata o sea evidente que sea incompatible.

Matriz triangular inferior

Matriz triangular inferior es la que tiene nulos todos los elementos por encima de la diagonal principal.

Matriz triangular superior

Matriz triangular superior es la que tiene nulos todos los elementos por debajo de la diagonal principal.

Determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Se puede generalizar

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & c & \dots & p \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & p^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (b-a)(c-a)\dots(p-a)\cdot \\ \cdot(c-b)\dots(p-b)\cdot \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Incompatible

- **Ecuación incompatible** es aquella que no tiene ninguna solución:
  $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = c$, con $c \neq 0$.

Sistema incompatible es aquél que no tiene ninguna solución

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea $S \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$ un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, siendo A la matriz de los coeficientes y A^* la matriz ampliada ($A^*=A\,|\,B$). Bajo estas hipótesis se verifica que:

1) S es compatible si y sólo si $r(A)=r(A^*)$.
2) Si, $r(A)=r(A^*)=n$ entonces S es compatible determinado.
3) Si $r(A)=r(A^*)<n$ entonces S es compatible indeterminado.

Matriz regular

Una **matriz** $A \in M_n(K)$ es: **Regular** cuando $|A| \neq 0$.

Menor complementario del elemento a_{ij}

Si $A = (a_{ij}) \in M_3(K)$, **menor complementario del elemento a_{ij}**, se le denota por α_{ij}, y es el determinante de la submatriz de orden dos de A que se obtiene eliminando la fila **i** y la columna **j**.

Menor de orden h de A

Sea la matriz $A \in M_{m\times n}(K)$. Un **menor de orden h de A** es el determinante de una submatriz cuadrada de orden h de A. Evidentemente, ha de ser $h \leq m, n$.

Conmutativa

Sea V un conjunto donde hemos una operación interna, que designaremos por "+" $V \xrightarrow{+} V$

Conmutativa: A+B=B+A para cualesquiera $A, B \in V$.

Sea V un conjunto donde hemos una operación interna, que designaremos por "." $V \xrightarrow{\cdot} V$

Conmutativa: A.B=B.A para cualesquiera $A, B \in V$.

Escalar

Cada elemento de un cuerpo K, generalmente el de los números reales. Constituyen las coordenadas de un vector respecto de una base de un espacio vectorial.
Los escalares $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ tales que $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + ... + \lambda_n\vec{e}_n$ son las **coordenadas del vector** $\vec{v}$ **respecto de la base** $B = \{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$ del espacio vectorial V.