Espacio Vectorial

1.- Se considera R^3 con la suma habitual y con el producto por un escalar que se indica en los casos siguientes. Prueba que en ninguno de ellos, $(R^3,+,\cdot)$ es *espacio vectorial* señalando alguna propiedad del producto que no se cumpla:

a) $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, z)$

b) $\lambda(x,y,z) = (0,0,0)$

c) $\lambda(x,y,z) = (3\lambda x, 3\lambda y, 3\lambda z)$

Solución

2.- Definimos en R^2 las operaciones siguientes:

$$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y'+1)$$

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y + \lambda - 1)$$

Determinar, para la suma, el elemento neutro y el elemento opuesto de (x, y)

Probar que R^2 con dichas operaciones es un *espacio vectorial*.

Solución

3.- En cada caso, determinar si F es un *subespacio vectorial* de R^3. En caso afirmativo, buscar una *base* y unas *ecuaciones implícitas* y *paramétricas* de F.

a) $F = \{ (1,\alpha,\beta) \in R^3 / \alpha,\beta \in R\}$

b) $F = \{ (0,\alpha,\beta) \in R^3 / \alpha,\beta \in R\}$

c) $F = \{ (x,y,z) \in R^3 / -x+3y+2z = 0\}$

d) $F = \{ (2\alpha,-\beta^2,\gamma) \in R^3 / \alpha,\beta,\gamma \in R\}$

e) $F = \{(x,y,z)\in R^3 / x+2y+z = 0,\ z = y-x \}$

f) $F = \{(x,y,z)\in R^3 / x,\ y,\ z\geq 0\}$

g) $F = \{(x,y,z)\in R^3 / \text{máx}(x,y,z)<1\}$

Solución

4.- Sea $A=\{(2,1,3), (-1,2,3), (-3,1,0), (5,0,3)\}$. Indicar si son correctas o falsas las siguientes cuestiones:

a) A es *libre*.

b) A es *sistema generador* de un *subespacio vectorial*.

c) A es una *base* de R^3.

d) *rango*(A)=4.

e) El vector (2,1,3) es *combinación lineal* de los vectores de A.

f) El vector $(1,1,1)\in\langle A\rangle$.

Solución

5.- ¿Qué valores deben tener m y n para que el *vector*

$(-3,m,n,2m-n)\in\langle\{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}\rangle$?

Solución

6.- Sea $P_n(x)$ el *espacio vectorial* de los polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual que n. Demostrar que el polinomio x^n y sus n primeras derivadas forman una *base* de $P_n(x)$ e indicar las *coordenadas* del polinomio $1+x+x^2$ en esta base.

Solución

7.- Determinar si los conjuntos siguientes G_1 y G_2 generan el mismo *subespacio vectorial* de R^3 o subespacios distintos $G_1=\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ y $G_2 = \{(1,1,-2), (2,1,-3), (0,1,-1)\}$

Solución

8.- Sea el *subespacio vectorial* E formado por el conjunto de matrices cuadradas que *permutan* con la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Y sea el *subespacio vectorial* F= $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} / a, b, c \in R \right\}$ Se pide:

a) Demostrar que E es un *subespacio vectorial*.

b) Una *base* de E.

c) Los *subespacios vectoriales* $E \cap F$ y E+F.

Solución

9.- a) ¿Para qué valores de x los siguientes sistemas de vectores son *bases* de R^3? $B_1 = \{(1,-1,0),\ (x,1,0),\ (0,2,3)\}$; $B_2 = \{(2,x,1),\ (1,0,1),\ (0,1,3)\}$

b) Para x = 0, escribir las ecuaciones de *cambio de base* de B_1 a la *canónica*, de la *canónica* a B_1, de B_1 a B_2 y de B_2 a B_1.

Solución

10.- Hallar las coordenadas del vector $\vec{u} = (x, y, z)$ en la base $B' = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right\}$ donde $\vec{v}_1 = (1,2,0)$, $\vec{v}_2 = (-3,-7,1)$ y $\vec{v}_3 = (0,2,-1)$. ¿Cuál es la matriz de *cambio de la base* B' a la *canónica*?

Solución

11.-a) Probar que los sistemas de vectores G_1 y G_2 generan el mismo *subespacio vectorial* F de R^4.

$G_1= \{(1,2,-1,0), (4,8,-4,-3), (0,1,3,4), (2,5,1,4)\}$

$G_2= \{(1,-2,-13,-1), (1,1,-4,-5), (2,3,-5,-2), (1,1,-4,-1)\}$

b) Hallar la *dimensión*, una *base* "escalonada", unas *ecuaciones paramétricas* y las *ecuaciones cartesianas* de F.(Vamos a llamar bases "escalonadas" de F a aquellas cuyos vectores se pueden disponer como las filas de una matriz escalonada)

c) Sea H = {(x, y, z, t) $\in$ R^4 tales que x + y + z = 0, x + z -3 t = 0}. Se pide:

1. Hallar la *dimensión* y una *base* de H, de F + H y de F $\cap$ H respectivamente.
2. Unas *ecuaciones cartesianas* de F + H y de F$\cap$H.

d) ¿Es H un *subespacio suplementario* de F? En caso contrario halla un *subespacio suplementario* de F.

Solución

12.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ de *cambio de base* de B a B', siendo $B = \left\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_4\right\}$ y $B' = \left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_4\right\}$. Escribir $\vec{u}_2$ en función de los vectores de la *base* B'. Hallar la *matriz de cambio de base* de B' a B.

Solución

13.- Comprobar que B= {(1,2,1), (1,1,0), (3,1,1)} y B'= {(1,3,1), (0,1,1), (2,1,0)} son bases de R^3 y calcular las ecuaciones matriciales de *cambio*

a) de la base B a la *base canónica* B_C
b) de la base B' a B_C
c) de la base B a B'
d) de la base B' a B.

Solución

14.- Se consideran los tres subespacios de R^4 siguientes:

$F_1 = \{ \ (\alpha, \beta, 0, 0) \ \ / \ \alpha, \beta \in R\}$

$F_2 = < (0,1,0,0), \ (0,0,1,0) >$

$F_3 = < (1,0,0,0) >$

a) Hallar $F_1 + F_2$

b) Hallar $F_3 + F_2$

c) Las sumas anteriores ¿son *sumas directas*? Cuando así ocurra, escribir la descomposición única de cada vector de la suma en suma de dos vectores uno de cada subespacio.

Solución

15.- Dados los *subespacios vectoriales* F determinado por las *ecuaciones cartesianas* $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ y G por las *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_4 = \lambda_1 + \lambda_3 \\ x_5 = \lambda_1 + \lambda_3 \end{cases}$ del espacio vectorial R^5, se pide: *bases* de F, G, F+G y $F \cap G$.

Solución

16.- Determinar, en cada caso, si los vectores dados generan y/o *libre* de R^4.

a) $\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$

b) $\{(1,3,-5,0),(-2,1,0,0),(0,2,1,-1),(1,-4,5,0)\}$

c) $\{(1,0,-2,5),(2,1,0,-1),(1,1,2,1)\}$

Solución

17.- Escribir cada uno de los siguientes polinomios como *combinación lineal* de $x+1$, x^2+x, x^2+2.

a) x^2+3x+2

b) $2x^2-3x+1$

c) x^2+1

d) x

Solución

18.- Determinar si los conjuntos siguientes G_1 y G_2 generan el mismo *subespacio vectorial* de R^3 o subespacios distintos

a. $G_1=\{(1,0,-1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ y $G_2 = \{(2,1,-1), (1,2,1)\}$

b. $G_1=\{(1,0,-1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ y $G_2 = \{(2,1,-1), (1,-1,0)\}$

Solución

19.- Si $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{z}\}$ es *libre*, ¿cuáles de los siguientes conjuntos también lo son?

a) $\{\vec{u}-\vec{v},\vec{v}-\vec{w},\vec{w}-\vec{u}\}$

b) $\{\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{u}\}$

c) $\{\vec{u}-\vec{v},\vec{v}-\vec{w},\vec{w}-\vec{z},\vec{z}-\vec{u}\}$

d) $\{\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{z},\vec{z}+\vec{u}\}$

Solución

20.- En $V = R^3$, sea $F = \{ (x,y,z) \ / \ 2x+y+z=0\}$. Buscar un *subespacio suplementario* de F.

Solución

21.- Sean F_1 y F_2 los siguientes *subespacios vectoriales* de R^5:

$$F_1 = \left\{ \vec{x} \ / x_1 + \ldots + x_5 = 0 \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \vec{x} \ / x_1 = \ldots = x_5 \right\}$$

Analizar si F_1 y F_2 son *subespacios suplementarios* de R^5 obteniendo la descomposición de cualquier vector $\vec{u} \in R^5$ en suma $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, donde $\vec{u}_1 \in F_1$ y $\vec{u}_2 \in F_2$.

Solución

22.- En cada caso, encontrar una *base* de V que contenga a $\vec{v}$ y/ó $\vec{w}$:

a) $V = R^3$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$

b) $V = R^4$, $\vec{v} = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{w} = (0, 1, 0, 1)$

c) $V = P_3$, $\vec{v} = x^2 + 1$, $\vec{w} = x^2 + x$

Solución

23.- Sea el subespacio vectorial F generado por los siguientes vectores de espacio vectorial R^4: $\vec{u}_1 = (2, 3, 1, 0); \vec{u}_2 = (1, 0, 1, 0); \vec{u}_3 = (0, 3, -1, 0)$. Se pide:

a) *Rango* de $H = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\}$. ¿Qué clase de sistema es H? ¿Existe alguna relación de dependencia entre los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$?

b) *Dimensión* y una *base* F.

c) Las *coordenadas* de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ respecto de la base obtenida en el apartado anterior.

d) Unas *ecuaciones paramétricas* de F.

e) Unas *ecuaciones cartesianas* o *implícitas* de F.

f) A partir de las *ecuaciones cartesianas* otras *ecuaciones paramétricas* distintas del apartado d).

g) ¿El vector (1,0,0,0) pertenece o no a F?

h) Una *base* B* del espacio vectorial R^4 que contenga a los vectores de una base de F.

i) Las ecuaciones del *cambio de base* de la base B* (del apartado anterior) a la *base canónica* B_c de R^4.

j) Las ecuaciones del *cambio de la base* B_c a la base B*

k) La expresión analítica del vector $\vec{e}_2$ de la *base canónica* respecto de la base B*.

Solución

24.- Si F y G son *subespacios* de V, demostrar que $F \cup G$ es subespacio de V si y solo si $F \subset G$ ó $G \subset F$.

Solución

25.- Sea V el *espacio vectorial* de las funciones reales de variable real. Sea $F_1 = \{f \in V / f \text{ es par}\}$ y $F_2 = \{g \in V / g \text{ es impar}\}$. Demostrar:

a) F_1 y F_2 son *subespacios vectoriales* de V.

b) $V = F_1 \oplus F_2$ (Nota: $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$).

Solución

26.- Consideremos el conjunto R^2 formado por todas las parejas (x,y) de números reales. Se define en R^2 la operación interna (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') y una de las operaciones externas siguientes:

a) $\lambda(x,y)=(\lambda x,0)$
b) $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$
c) $\lambda(x,y)=(\lambda+\lambda x-1,\lambda+\lambda y-1)$
d) $\lambda(x,y)=(\lambda y,\lambda y)$

para $\lambda \in R$. Decir, para cada uno de los cuatro casos, si se obtiene o no una estructura de *espacio vectorial* en R^2.

Solución

27.- Comprobar que el conjunto {(1,1,0), (1,0,2), (0,1,2)} forma una *base* del espacio R^3. Hallar las *coordenadas* del vector (2,5,10) en dicha *base*.

Solución

28.- Demostrar que los vectores (1,0,-2,1), (1,3,2,-2) y (2,3,4,1) son *linealmente independientes*. Construir, a partir de la *base canónica*, una base que contenga a estos tres *vectores*.

Solución

29.- Encontrar una *base* del subespacio F de R^3 engendrado por los vectores (1,2,3) (-1,5,2) y (1,9,8). ¿Qué valor hay que dar a x para que el vector (x,16,13) sea de este *subespacio*?

Solución

30.- Si los números 1,3 y 5 son las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en la base {(1,1,0),(0,1,1), (1,0,1)}, hallar las *coordenadas* del vector $\vec{v}$ en la *base canónica*.

Solución

31.- Sean $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $B' = \{\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$ dos bases de R^3, tales que $\vec{u}' = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v}' = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{w}' = \vec{u} + \vec{w}$. Hallar las ecuaciones del *cambio de la base* B a B' y de la base B' a B.

Solución

32.- Dadas las bases de R^3, $B=\{\vec{u}_1 = (2,1,0),\ \vec{u}_2 = (-1,0,1),\ \vec{u}_3 = (0,1,-2)\}$ y $B'=\{\vec{v}_1 = (0,1,1),\ \vec{v}_2 = (1,0,0),\ \vec{v}_3 = (2,0,1)\}$. a) Hallar la expresión analítica del *cambio de base* de B a B´, de B´a B y de B´a la *base canónica*. b) Si $\vec{a} = (1,1,1)$ respecto de B ¿cuáles son sus coordenadas respecto de B'? c) Si $\vec{b} = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$, escribir la expresión de $\vec{b}$ respecto de B.

Solución

33.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ de *cambio de base* de B a B', siendo $B=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B'=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Escribir el *vector* $\vec{u}_2$ en función de los vectores de B'. Hallar la matriz del *cambio de base* de B' a B.

Solución

34.- Consideremos las *bases* de V^3:

$B_1=\left\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\right\}$,

$B_2=\left\{\vec{u}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right), \vec{u}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{u}_3=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)\right\}$.

a) Hallar el *cambio de base* de B_1 a B_2 b) Hallar el conjunto F de vectores que tienen las mismas *coordenadas* respecto de B_1 y de B_2. Demostrar que F es *subespacio* de V^3 y hallar una *base* de F.

Solución

35.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 17 & -7 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. b) Hallar una *base* del subespacio engendrado por los vectores fila de la matriz A. c) Hallar unas ecuaciones vectoriales, *paramétricas* e *implícitas* de dicho subespacio.

Solución

36.- Hallar una *base* del subespacio vectorial F formado por las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar un *subespacio suplementario* de F.

Solución

37.- Sea F el subespacio vectorial F = < (1,-1,0), (0,6,2), (1,5,2), (3,3,2) >. Se pide:

a) Una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de F.

b) Un *subespacio G suplementario* del subespacio F.

c) Sea $\vec{x} = (3,-1,-3)$. Indicar si $\vec{x} \in F$ ó $\vec{x} \in G$ ó $\vec{x} \in F+G$. Descomponer el vector $\vec{x}$ en suma de dos vectores, uno paralelo y otro perpendicular al vector $\vec{u} = (1,-1,0) \in F$.

d) Una *base* B_1 del espacio vectorial F+G.

e) Una superficie en R^3 tiene de ecuación $3x^2+2xy-2xz+3y^2+2yz+3z^2=1$. Determinar la ecuación (lo más simplificada posible) de esta superficie, respecto de la nueva *base*: $B_2 = \left\{\vec{u} = \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right), \vec{v} = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right), \vec{w} = \left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$.

f) Ecuaciones del *cambio de base* de B_1 a B_2.

g) El conjunto H de vectores que tienen las mismas *coordenadas* respecto de B_1 y B_2.

h) Demostrar que H es un *subespacio vectorial* del espacio vectorial R^3.

Solución

38.- Se considera el espacio vectorial R^4. Se pide:

a) Determinar si los siguientes conjuntos de vectores generan V:

$$F = \left\{\vec{u_1} = (1,1,1,1), \vec{u_2} = (0,1,1,1), \vec{u_3} = (0,0,1,1), \vec{u_4} = (0,0,0,1)\right\}$$

$$H = \left\{\vec{v_1} = (1,3,-5,0), \vec{v_2} = (-2,1,0,0), \vec{v_3} = (0,2,1,-1), \vec{v_4} = (1,-4,5,0)\right\}$$

¿Cuál de ellos es, pues, una *base* de R^4, que llamaremos B?

b) Sean $S = \left\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right\}$ y $T = \left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right\}$ donde:

$$\vec{x} = (1,2,5,3) \qquad \vec{u} = (2,1,4,-3)$$
$$\vec{y} = (3,1,5,-6) \qquad \vec{v} = (3,1,3,-2)$$
$$\vec{z} = (1,1,3,0) \qquad \vec{w} = (9,2,3,-1)$$

Sea $U = \langle S \rangle$ y $V = \langle T \rangle$. Hallar la *dimensión* y una *base* de cada uno de los *subespacios* U, V, U + V y $U \cap V$.

c) Completar la base de U + V obtenida en el apartado anterior para formar una base B' de R^4. Escribir las ecuaciones de *cambio de base* de B a B' y de B' a B.

Solución

39.- a) Demostrar que si los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ son *base* de R^3 y el vector $\vec{u}$ es tal que $\vec{u} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$ con $\lambda_2 \neq 0$ entonces los vectores $\vec{e}_1, \vec{u}, \vec{e}_3$ son *base* de R^3.

b) Generalizar el resultado anterior: Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ son una *base* de un *espacio vectorial* V y $\vec{u} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n$, con $\lambda_i \neq 0$, entonces los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_{i-1}, \vec{u}, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_n$ son también *base* de V.

Solución

40.- Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ una *base* de un *espacio vectorial* E. Demostrar que los n vectores de E siguientes:
$\vec{w}_1 = \vec{v}_1, \vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \ldots, \vec{w}_n = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n$ son *base* de E.

Solución

41.- a) Hallar la suma y la intersección de los *subespacios vectoriales* E y F definidos por los siguientes sistemas generadores:

$$E=\langle(1,1,1), (1,0,1), (2,6,2)\rangle; \; F=\langle(2,0,1), (1,-1,3), (0,2,-5)\rangle$$

b) ¿Son E y F *suplementarios*?

c) Sean B_1={(1,1,1), (1,0,1), (0,0,1)} y B_2={(2,0,1), (0,1,0), (1,-1,1)} dos bases de R^3. Hallar el *cambio de base* de B_1 a B_2 y las *coordenadas* respecto de B_1 y de B_2 del vector de *coordenadas* (1,0,0) en la *base canónica*.

Solución

42.- En R^3 se considera el *subespacio vectorial* S engendrado por los vectores {(1,0,1), (1,1,0), (1,-1,2)} y el *hiperplano* H de ecuación $\{x + y = 0\}$ respecto de la *base canónica* de R^3.

Se pide:

1. *Ecuaciones paramétricas* e *implícitas* de S y de H
2. Obtener las *bases* de $S \cap H$ y S+H

Solución

43.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) Sea F el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores fila de la matriz A. Hallar una *base* de F.

c) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de F.

d) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de F.

e) Sea C el subespacio vectorial de R^3 engendrado por los vectores columna de la matriz A. Hallar una base de C.

f) Encontrar una relación de dependencia lineal existente entre los vectores columna de la matriz A.

g) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de C.

h) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de C.

i) ¿F y C son *hiperplanos* distintos?

j) Calcular una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de $F \cap C$.

Solución

44.- Sea G el subconjunto de vectores de .4 formado por los vectores {(2,3,2,0), (4,6,4,1), (1,0,1,0), (0,0,0,6)} y sea S el *subespacio vectorial* generado por dichos vectores. Se pide:

a) Obtener una *base* de S

b) *Ecuaciones paramétricas e implícitas* de S

c) Valores de los *parámetros* a y b para que los vectores (a,a,2,2) y (1,b,1,b) pertenezcan ambos a S.

Solución

45.- Se consideran en R^4 los *subespacios vectoriales* S = < (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)> y T = < (1, 1 ,0, 1), (1, 2, -1, 2), (3, 5, -2, 5)>

a) Hallar la *dimensión* y unas *ecuaciones implícitas* del subespacio S + T.

b) Hallar la *dimensión* y unas *ecuaciones paramétricas* del subespacio $S \cap T$.

Solución

46.- Dadas las bases $B_1 = \left\{\vec{u}_1 = (1,0,0), \vec{u}_2 = (1,1,0), \vec{u}_3 = (1,0,-1)\right\}$ y $B_2 = \left\{\vec{v}_1 = (2,1,0), \vec{v}_2 = (3,2,-1), \vec{v}_3 = (0,0,1)\right\}$ del espacio vectorial R^3. Se pide:

a) Ecuación matricial del *cambio de base* de B_1 a la base B_2.

b) Ecuación matricial del *cambio de base* de B_2 a la base B_1.

c) Si el vector tiene *coordenadas* (1,1,1) respecto de la base B_1 ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de la base B_2?

Solución

47.- Sea el *subespacio vectorial* F de R^4 generado por los siguientes vectores:

$\vec{u}_1 = (1,1,2,0)$; $\vec{u}_2 = (2,-1,0,1)$; $\vec{u}_3 = (5,-1,2,2)$. Se pide:

a) Una *base* de F.

b) *Ecuaciones paramétricas* de F.

c) Una *base* B' de R^4 que contenga la base de F obtenida en el apartado a).

d) Las ecuaciones del cambio de base de la canónica B_c de R^4 a la base B' (del apartado anterior).

Solución

48.- En el espacio vectorial real R^4, se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$$S = \left\{ \vec{u} = (2,3,1,-5), \vec{v} = (0,2,-1,3), \vec{w} = (4,0,5,-19), \vec{t} = (-2,1,-3,11) \right\}$$

$$T = \left\{ \vec{p} = (2,5,0,-1), \vec{q} = (2,1,2,-7) \right\}$$

Sean F y G los subespacios engendrados por S y T, respectivamente, es decir: $F = \langle S \rangle$ y $G = \langle T \rangle$.

a) Hallar los *rangos* de S y de T.

b) Hallar a y b para que el vector (2, a, 3, -b) $\in F$.
c) Dar unas *ecuaciones implícitas* de F y de G.
d) Calcular la *dimensión* y una base de cada uno de los subespacios siguientes: F, G, F+G y $F \cap G$. ¿Es F+G suma directa?
e) Hallar una base B de $\Re^4$ que contenga a los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}\}$. Escribir las ecuaciones de *cambio de base* de B a la *base canónica* y de la base canónica a B.

Solución

49.- Sea A = {(1, 3, -1, 4), (3, 8, -5, 7), (2, 9, 4, 23)}$\subset R^4$. Se pide:
a) Estudiar si A es un *sistema libre* o *ligado*.
b) Si F es el *subespacio vectorial* de R^4 generado por A, hallar a partir de A, una *base* B_F, unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* de F.
c) Hallar una *base* B_S de un subespacio S, que sea suplementario de F, tal que $B_F \cup B_S$ sea una *base escalonada* de R^4.
d) Sean B = {(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 2, 3)} y B' = {(-1, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 1)} $\subset R^3$. Comprobar que B y B' son bases de R^3 y hallar las ecuaciones del cambio de B a B'.

Solución

50.- Sean los subespacios vectoriales:

$$E = \{(\alpha + \gamma, \beta + \gamma, \alpha + \beta + 2\gamma) / \alpha, \beta, \gamma \in R\}; \; F = \{(x, y, z) \in R^3 / x - y + 2z = 0\}$$

Se pide:

a) *Bases* de E, F, E+F y $E \cap F$.

b) *Ecuaciones implícitas* de $E \cap F$.

Solución

51.- Sea el vector $\vec{a} = (1,2,3)$ expresado en la *base* B=$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ del espacio vectorial R^3. Hallar las *coordenadas* de $\vec{a}$ en la *base* $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, sabiendo que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_1 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \end{array}\right\}$$

Solución

52.- Dado el espacio vectorial R^3:
a) Hallar una *base* del subespacio vectorial generado por los vectores:
S= $\{\vec{a} = (2,4,0), \vec{b} = (1,2,1), \vec{c} = (3,2,1), \vec{d} = (3,4,1)\}$ y expresar el vector $\vec{d}$ en dicha base.

b) Encontrar un *vector* común al subespacio E generado por los vectores $\vec{u}_1 = (1,2,3)$ y $\vec{u}_2 = (3,2,1)$ y al subespacio F generado por los vectores $\vec{v}_1 = (1,0,1)$ y $\vec{v}_2 = (3,4,3)$.

c) Indicar si los *subespacios vectoriales* $H = \{(x,y,z)/2x+y-z=0; x+y=0\}$ y $G=\{(\alpha-\beta+2\gamma, \beta-\alpha-2\gamma, \alpha-\beta+2\gamma)/\alpha,\beta,\gamma\in R\}$ son iguales.

d) Sean $B=\{\vec{u}=(2,1,0), \vec{v}=(-1,0,1), \vec{w}=(0,1,-2)\}$ y $B'=\{\vec{u}'=(0,1,1), \vec{v}'=(-1,0,0), \vec{w}'=(2,0,1)\}$. Hallar la *matriz del cambio de base* de B a B'.

Solución

53.- a) Dados los subespacios vectoriales de R^4 siguientes:

$$F \equiv \begin{cases} x = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 - \lambda_2 \\ z = \lambda_2 \\ t = -\lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \quad \lambda_1,\ \lambda_2 \in R \qquad G \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - t = 0 \end{cases}$$

Se pide calcular sendas bases de F, G, F + G, $F \cap G$.

b) Dadas las *bases* de R^3 siguientes:

B = {(1,1,1), (1,1,0), (1,0, 0)} y B' = {(2,1,2), (1,0,3), (-1,4,2)}

Se pide hallar la ecuación matricial del *cambio de la base* B a la base B'.

Solución

54.- En R^4 consideramos los subespacios vectoriales:

$$A = \{(x,y,z,t) \in R^4 \text{ tales que } x\text{-}y = z\text{-}t = 3z\text{-}x = 0\}$$

$$B = \langle (3,1,2,0),\ (1,1,0,-1),\ (3,1,3,-2),\ (1,1,-1,1) \rangle$$

$$C = \{(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\gamma, \gamma, \beta) \in R^4 \text{ tales que } \alpha,\beta,\gamma \in R\}.$$ Se pide:

a) *Dimensión* y una *base* del subespacio $B \cap C$. b) *Dimensión* y una *base* del subespacio A+C. c) Determinar un *subespacio* A' tal que $A \oplus A' = R^4$.

Solución

55.- Encontrar los *escalares* que permiten escribir el vector de R^4, (8, 4, 2, 0) como *combinación lineal* de los vectores (1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (2, 1, 1, 0).

Solución

56.- Se consideran los vectores $\vec{a}_1$=(2,1,0,0), $\vec{a}_2$=(1,1,-1,0), $\vec{a}_3$=(3,1,1,0) y $E = <\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3>$ y $G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 / x_2 = -x_3\}$ subespacios vectoriales de R^4. Se pide: a) *Dimensión* y *bases* de E y G. b) *Dimensión* y una *base* de un *suplementario* de E que se denominará F. c) *Ecuaciones implícitas* de E. d) *Dimensión* y una *base* de $E \cap G$. e) Formar una nueva *base* de R^4, B' formada por los vectores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y los restantes vectores pertenecientes a G. f) Encontrar las *coordenadas de los vectores* $\vec{a}_1$ y $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$ en la base B', siendo $B = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \}$ la *base canónica*.

Solución

57.- En el espacio vectorial R^3 se tienen las siguientes bases:

$B = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $B' = \{ (1,1,0), (0,-1,0), (1,0,1)\}$ y

$B^* = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Sean (x, y, z), (x', y', z') y (x^*, y^*, z^*) las *coordenadas de un vector* en las *bases* B, B' y B^* respectivamente.

a.- Escribir la ecuación matricial del *cambio de base* de B a B'.

b.- Sabiendo que $\begin{cases} x = x^* + z^* \\ y = y^* - z^* \\ z = -x^* + z^* \end{cases}$, dar las *coordenadas de los vectores* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ respecto de B y de B'.

Solución

58.- Se considera un subespacio F de ecuaciones $\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$.

a.- Obtener una *base* de F.

b.- Si G es el subespacio generado por el sistema $\{(1,1,-1),(1,1,0)\}$,

b.1.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio G.

b.2.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio $F \cap G$.

Solución

59.- En el espacio vectorial R^3 se tienen las siguientes bases:

$B = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $B' = \{ (1,0,1), (1,1,0), (0,-1,0) \}$ y

$B^* = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Sean (x, y, z), (x', y', z') y (x^*, y^*, z^*) las *coordenadas de un vector* en las *bases* B, B' y B^* respectivamente.

a.- Escribir la ecuación matricial del *cambio de base* de B a B'.

b.- Sabiendo que $\begin{cases} x = y^* + z^* \\ y = x^* - z^* \\ z = -y^* + z^* \end{cases}$, dar las *coordenadas de los vectores* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ respecto de B y de B'.

Solución

60.- Se considera un subespacio F de ecuaciones $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha - \beta \\ z = \beta \end{cases}$.

a.- Obtener una *base* de F.

b.- Si G es el subespacio generado por el sistema $\{(1,-1,-1),\ (1,2,0)\}$,

b.1.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio G.

b.2.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio $F \cap G$.

Solución

61.- En un espacio vectorial V, sea la *base canónica* $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Se considera el subespacio S_1 de ecuación cartesiana en x = y-z.

a) Obtener una *base* de S_1 formada por *vectores unitarios*.

b) Si S_2 es el subespacio engendrado por el sistema $\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$, hallar unas *ecuaciones paramétricas y cartesianas* del subespacio S_2.

c) Hallar una *base* de cada uno de los *subespacios vectoriales* $S_1 \cap S_2$ y S_1+S_2.

Solución

62.- Dado el espacio vectorial R^4 consideremos los *subespacios*:

$V_1 = \langle(1, 2, 0, 1)\rangle$

$V_2 = \{(x, y, z, t)\ /\ x-y+z+t = 0,\ y-z = 0\}$

$$V_3 = \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \mu \end{cases}$$

a) Hallar una *base* de cada uno de los *subespacios* anteriores.

b) ¿Pertenece el vector v = (2, 4, 0, 2) a V_1 ó V_2 ó V_3? En caso afirmativo calcular sus *coordenadas* respecto de la *base* correspondiente obtenida en el apartado a).

Solución

63.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*

$$A = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid x = y = z\},$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in R^4 / \ x = \alpha + \beta + \gamma + \mu, y = \alpha + \beta + 2\mu, z = \gamma + \mu, t = \beta + \gamma\}$$

a) Calcular una *base* y *dimensión* de A y de B.

b) Calcular una *base* y *dimensión* de $A \cap B$ y de $A + B$.

c) Determinar un *subespacio* F *suplementario* de A.

Solución

64.- En el *espacio vectorial* real de *dimensión* cuatro. Se dan las *bases* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ las cuales están relacionadas por

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= 2\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + 2\vec{v}_4 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 &= 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_4 &= -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3 + 3\vec{v}_4 \end{aligned}$$

1º Se considera el vector $\vec{x} \in R^4$ cuyas *coordenadas* respecto de la *base* B son $\vec{x} = (1, 2, 0, 0)$. Determinar sus *coordenadas* respecto de la *base* B'.

2º Se considera el vector $\vec{y} \in R^4$ cuyas *coordenadas* respecto de la *base* B' son $\vec{y} = (-1, 2, 0, 1)$. Determinar sus *coordenadas* respecto de la *base* B.

Solución

65.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*:

$$F = \{(x, y, z, t) \in R^4 \text{ tales que } x = y = z\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in R^4 \text{ tales que } x = \alpha + \beta + \gamma, y = \alpha + 2\gamma, z = \gamma, t = \beta\}$$

a) Calcular una *base* y la *dimensión* de los subespacios *F*, *G*, $F \cap G$ y de *F+G*.

b) Determinar un subespacio *F'* para que $F \oplus F' = R^4$.

Solución

66.- Dadas las *bases* de R^3,

$$B = \left\{ \vec{u} = (1,\ 0,\ 0), \vec{v} = (0,\ 1,\ 1), \vec{w} = (1,\ 0,\ 1) \right\} ,$$

$$B' = \left\{ \vec{u}' = (0,\ 0,\ 1), \vec{v}' = (0,\ 1,\ 2), \vec{w}' = (1,\ 1,\ 0) \right\}$$

a) Hallar la ecuación matricial de cambio de *base* de B a B'.

b) Si $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$ respecto de la *base* B, ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de B'?

c) ¿Cuáles son las *coordenadas* del vector $\vec{w}$ respecto de la *base* B?

Solución

67.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*:

$$A = \langle (2,0,1,1)\ \ (1,1,1,1)\ \ (1,-3,-1,-1)\ \ (3,-7,-2,2) \rangle$$

$$E = \left\{ (x,y,z,t) \in R^4 \text{ tales que } x + y + 2z = 0,\quad 2x-y-2z = 0 \right\}$$

a) Calcular una *base* y la *dimensión* de los subespacios *A, E,* $A \cap E$ y de *A+E*.

b)Determinar un subespacio *A'* para que $A \oplus A' = R^4$.

Solución

68.- Dadas las bases de R^3, $B = \left\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right\}$ y $B' = \left\{ \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}' \right\}$ sabiendo que:

$$\vec{u} = 2 \cdot \vec{u}' - \vec{v}';\quad \vec{v} = \vec{u}' - \vec{w}';\quad \vec{w} = \vec{v}' + 2 \cdot \vec{w}'$$

a) Hallar la ecuación matricial de *cambio* de *base* de B' a B.

b) Si $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$ respecto de la base B', ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de B?

c) ¿Cuáles son las *coordenadas* del vector $\vec{w}$ respecto de la *base* B y respecto de la *base* B'?

Solución

69.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*:

$$S = \left\{ (x,y,z,t) \in R^4 \text{ tales que } -2x + 3y + 2z + t = 0 \right\}$$

$$T = \langle (3,1,2,0);\ (1,1,0,-1);\ (3,1,3,-2);\ (1,a,-1,1) \rangle$$

a) Calcular el valor de "a" para que *T* tenga *dimensión* 3.

b) Con el valor de a determinado, hallar la *dimensión* y una *base* de los subespacios $S \cap T$ y de *S+T*.

c) Determinar un subespacio *S'* para que $S \oplus S' = R^4$.

Solución

70.- Se consideran dos *bases* de R:

$$B = \left\{ \vec{u} = (1,1,1), \vec{v} = (-1,1,0), \vec{w} = (1,2,1) \right\} \text{ y}$$

$$B' = \left\{ \vec{u}' = (1,0,0), \vec{v}' = (3,7,-2), \vec{w}' = (0,4,1) \right\}$$

a) Hallar la ecuación matricial de *cambio* de *base* de B a B'.

b) Si $\vec{a} = (1, -1, 1)$ respecto de la *base* B, ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de B'?

c) ¿Cuáles son las *coordenadas* del vector $\vec{w}$ respecto de la *base* B, respecto de la *base* B' y respecto de la *base* canónica?

Solución

1.- Se considera R^3 con la suma habitual y con el producto por un escalar que se indica en los casos siguientes. Prueba que en ninguno de ellos, $(R^3, +, \cdot)$ es *espacio vectorial* señalando alguna propiedad del producto que no se cumpla:

a) $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, z)$

b) $\lambda(x, y, z) = (0, 0, 0)$

c) $\lambda(x, y, z) = (3\lambda x, 3\lambda y, 3\lambda z)$

Solución:

a)

[A6] $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \quad \forall\lambda,\mu \in K$ y $\forall\vec{a} \in R^3$.

$(\lambda+\mu)\vec{a} = (\lambda+\mu)(x,y,z) = ((\lambda+\mu)x,(\lambda+\mu)y,z) = ((\lambda x+\mu x),(\lambda y+\mu y),z)$

$\lambda\vec{a}+\mu\vec{a} = \lambda(x,y,z)+\mu(x,y,z) = (\lambda x,\lambda y,z)+(\mu x,\mu y,z) = ((\lambda x+\mu x),(\lambda y+\mu y),2z)$

$(\lambda+\mu) \neq \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

No se cumple la condición A6

b)

[A8] $1.\vec{a} = \vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in R^3$.

$1\vec{a} = 1(x,y,z) = (0,0,0) \neq \vec{a}$

$1\cdot\vec{a} \neq \vec{a}$.

No se cumple la condición A8

c)

[A8] $1.\vec{a} = \vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in R^3$.

$1\vec{a} = 1(x,y,z) = (3x,3y,3z) \neq \vec{a}$

$1\cdot\vec{a} \neq \vec{a}$.

No se cumple la condición A8

2.- Definimos en R^2 las operaciones siguientes:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'+1)$$

$$\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y+\lambda-1)$$

Determinar, para la suma, el elemento neutro y el elemento opuesto de (x, y)
Probar que R^2 con dichas operaciones es un *espacio vectorial*.

Solución:

Previamente comprobemos que R^2 con la suma tiene estructura de grupo abeliano:

[A1] **Asociativa**: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\ \ \forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in R^2$.

Sean $\vec{a}=(x,y),\vec{b}=(x',y'),\vec{c}=(x'',y'')\in R^2$ entonces:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=((x,y)+(x',y'))+(x'',y'')=(x+x',y+y'+1)+(x'',y'')=((x+x')+x'',(y+y')+y''+2)$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(x,y)+((x',y')+(x'',y''))=(x,y)+(x'+x'',y'+y''+1)=(x+(x'+x''),y+(y'+y'')+2)\ .$$

Por ser R un cuerpo se cumple la asociativa y se tiene que $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(x+x'+x'',y+y'+y''+2)\ =\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ y se verifica la propiedad asociativa $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

[A2] **Existencia de elemento neutro**: Existe un elemento el vector nulo, que designaremos $\vec{\mathbf{0}}=\mathbf{(0,-1)}$ que verifica que $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a}\in R^2$.

En efecto: $\vec{a}+\vec{0}=(x,y)+(0,-1)=(x+0,y-1+1)=(x,y)=\vec{a}$ y por otra parte $\vec{0}+\vec{a}=(0,-1)+(x,y)=(0+x,-1+y+1)=(x,y)=\vec{a}$ luego $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ y $\vec{0}=(0,0)$ es el vector nulo.

[A3] **Existencia de elemento simétrico**: Para cualquier $\vec{a}\in R^2$ existe un único elemento de R^2, que designaremos por $-\vec{a}=-(x, y)=$ **(-x, -2-y)** tal que $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

El elemento $-\vec{a}=(-x,-y-2)$ es el elemento opuesto del vector $\vec{a}=(x,y)\in R^2$ ya que $\vec{a}+(-\vec{a})=(x,y)+(-x,-y-2)=(x-x,y-y-2+1)=(0,-1)=\vec{0}$ y que $(-\vec{a})+\vec{a}=(-x,-y-2)+(x,y)=(-x+x,-y-2+y+1)=(0,-1)=\vec{0}$ y se cumple $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

[A4] **Conmutativa**: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\ \ \forall\vec{a},\vec{b}\in R^2$

Sean $\vec{a}=(x,y),\vec{b}=(x',y')\in R^2$ entonces: $\vec{a}+\vec{b}=(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'+1)$ y permutando $\vec{b}+\vec{a}=(x',y')+(x,y)=(x'+x, y'+y+1)$ y por ser conmutativo R $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Por tanto, es $(R^2,+)$ un **grupo conmutativo**.

$\lambda(x,y)=(\lambda x, \lambda y+\lambda-1)$

Vamos a estudiar las cuatro condiciones:

[A5] $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}\ \ \lambda\in K\ \ \forall\vec{a},\vec{b}\in R^2$

En efecto: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda((x,y)+(x',y'))=\lambda(x+x',y+y'+1)\ =$

$=(\lambda x+\lambda x',\lambda y+\lambda y'+\lambda+\lambda-1)=(\lambda x,\lambda y+\lambda-1)+(\lambda x',\lambda y'+\lambda-1)=\ \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

[A6] $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}\quad \forall\lambda,\mu\in K$ y $\forall\vec{a}\in R^2$.

En este caso:

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=(\lambda+\mu)(x,y)=((\lambda+\mu)x,(\lambda+\mu)y+(\lambda+\mu)-1)=((\lambda x+\mu x),(\lambda y+\mu y+\lambda+\mu-1))=$$

$$=(\lambda x+\mu x,\lambda y+\lambda-1+\mu y+\mu-1+1)=(\lambda x,\lambda y+\lambda-1)+(\mu x,\mu y+\mu-1)=\lambda(x,y)+\mu(x,y)=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

[A7] $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}\quad \forall\lambda,\mu\in K$ y $\forall\vec{a}\in R^2$.

Ahora:

$$\lambda(\mu\vec{a})=\lambda(\mu(x,y))=\lambda(\mu x,\mu y+\mu-1)=(\lambda\mu x,\lambda\mu y+\lambda\mu-\lambda+\lambda-1)=(\lambda\mu)(x,y)=(\lambda\mu)\vec{a}$$

[A8] El elemento unidad del cuerpo K, que designaremos por 1, verifica $1.\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a}\in R^2$.

Por último: $1.\vec{a}=1(x,y)=(1x,1y+1-1)=(x,y)=\vec{a}$.

Cumple las ocho condiciones y con estas operaciones R^2 es un espacio vectorial sobre K.

3.- En cada caso, determinar si F es un *subespacio vectorial* de R^3. En caso afirmativo, buscar una *base* y unas *ecuaciones implícitas* y *paramétricas* de F.

a) $F = \{ (1, \alpha, \beta) \in R^3 \ / \ \alpha, \beta \in R \}$

b) $F = \{ (0, \alpha, \beta) \in R^3 \ / \ \alpha, \beta \in R \}$

c) $F = \{ (x, y, z) \in R^3 \ / -x + 3y + 2z = 0 \}$

d) $F = \{ (2\alpha, -\beta^2, \gamma) \in R^3 \ / \ \alpha, \beta, \gamma \in R \}$

e) $F = \{(x,y,z) \in R^3 \ / \ x+2y+z = 0, \ z = y-x \}$

f) $F = \{(x,y,z) \in R^3 \ / \ x, \ y, \ z \geq 0\}$

g) $F = \{(x,y,z) \in R^3 \ / \ \text{máx}(x,y,z) < 1\}$

Solución:

a) No es subespacio, pues $\vec{0} \notin F$.

b) Sí es subespacio; una base es $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$; implícitas: $x = 0$.

c) Sí es subespacio; una base es $\{(3,1,0),(2,0,1)\}$.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3\alpha + 2\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$; implícitas: $-x+3y+2z = 0$.

d) No es subespacio; $(-1)\vec{x} \notin F$, en general.

e) En este caso, el sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ z = y - x \end{cases}$ se puede escribir $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abreviadamente AX=0 y el subconjunto F={X/AX=0} siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{a}, \vec{b} \in F \Rightarrow \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \in F$ se cumple, puesto que $\begin{cases} \vec{a} = X \in F \Rightarrow AX = 0 \\ \vec{b} = X' \in F \Rightarrow AX' = 0 \end{cases}$ y resulta que $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \lambda X + \mu X' \in F$ ya que $A(\lambda X) + B(\mu X') = \lambda(AX) + \mu(AX') = \lambda 0 + \mu 0 = 0 + 0 = 0$. Tenemos un subespacio vectorial, por ser un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

Para obtener una base resolvemos dicho sistema quedando $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=0 \\ z=-\alpha \end{array}\right.$ y una base posible {(1,0,-1)}.

f) En este caso: F = {(x,y,z) $\in R^3$ / x, y, z ≥ 0} basta con considerar un vector (1,0,0) del subconjunto F y observar que su opuesto (-1)(1,0,0) = (-1,0,0) ya no es un vector del subconjunto F , ya que $-1<0$ y no se cumple $x \geq 0$. Por tanto F no es un subespacio vectorial.

g) F = {(x,y,z) $\in R^3$ / máx(x,y,z)<1} es un caso análogo al anterior, tomando al vector (1/2,0,0) del subconjunto F y se le multiplica por 3 se obtiene 3(1/2,0,0)=(3/2,0,0) con 3/2>1 y por consiguiente $(3/2,0,0) \notin F$, luego F no es un subespacio vectorial.

4.- Sea A={(2,1,3), (-1,2,3), (-3,1,0), (5,0,3)}. Indicar si son correctas o falsas las siguientes cuestiones:

a) A es *libre*.

b) A es *sistema generador* de un *subespacio vectorial*.

c) A es una *base* de R^3.

d) *rango* (A)=4.

e) El vector (2,1,3) es *combinación lineal* de los vectores de A.

f) El vector (1,1,1) $\in < A >$.

Solución:

a) Falso, el sistema A de cuatro vectores de un espacio vectorial de dimensión 3 es siempre ligado, puesto que el mayor número de vectores linealmente independientes es 3.

b) Verdadero, cualquier sistema de vectores genera un subespacio vectorial.

c) Falso, por no ser libre.

d) Falso, no hay menores de orden 4; $r = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2$.

e) Verdadero, es uno de los vectores de A.

f) Falso, no se puede poner como combinación lineal de los vectores de A, $r = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$

5.- ¿Qué valores deben tener m y n para que el *vector* (-3,m,n,2m-n)$\in<\{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}>$?

Solución:

Es obvio, que (1,1,1,1)=(1,0,0,0)+(0,1,1,1), luego el subespacio generador por los tres vectores es el mismo que el generado por los dos primeros.

$$(-3,m,n,2m-n)\in<\{(1,0,0,0),(0,1,1,1)\}>\Leftrightarrow(-3,m,n,2m-n)=\lambda(1,0,0,0)+\mu(0,1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} -3=\lambda \\ m=\mu \\ n=\mu \\ 2m-n=\mu \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{m=n}$$

6.- Sea $P_n(x)$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual que n. Demostrar que el polinomio x^n y sus n primeras derivadas forman una base de $P_n(x)$ e indicar las *coordenadas* del polinomio $1+x+x^2$ en esta *base*.

Solución:

Derivando $Q_n(x)=x^n$ $Q_n'(x)=nx^{n-1}$; $Q_n''(x)=n(n-1)x^{n-2}$;…; $Q_n^{n)}(x)=n!$

Tenemos que $\{Q_n(x), Q_n'(x), Q_n''(x),\ldots, Q_n^{n)}(x)\}$ que demostrar que es una base de $P_n(x)$.

El espacio vectorial $P_n(x)=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n / a_i\in R\right\}$ es de dimensión n+1.

Es suficiente con demostrar que cualquier vector se puede poner como combinación lineal de las sucesivas derivadas:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=\lambda_0Q_n(x)+\lambda_1Q_n'(x)+\lambda_2Q_n''(x)+\ldots+\lambda_nQ_n^{n)}(x)=$$
$$\lambda_0x^n+\lambda_1nx^{n-1}+\lambda_2n(n-1)x^{n-2}+\ldots+\lambda_nn!\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0=a_n\\ \lambda_1n=a_{n-1}\\ \lambda_2n(n-1)=a_{n-2}\\ .\\ .\\ \lambda_nn!=a_0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda_0=a_n\\ \lambda_1=\dfrac{a_{n-1}}{n}\\ \lambda_2=\dfrac{a_{n-2}}{n(n-1)}\\ .\\ .\\ \lambda_n=\dfrac{a_0}{n!}\end{array}\right\}$$

El sistema formado por las sucesivas derivadas es sistema generador de cualquier polinomio y el número de polinomios coinciden con la dimensión, por tanto, forma una base.

En particular, $1+x+x^2=1x^2+\frac{1}{2}(2x)+\left(\frac{1}{2}\right)2$, entonces **(1,1/2,1/2) son las coordenadas** respecto de la base $\{x^2,2x,2\}$

7.- Determinar si los conjuntos siguientes G_1 y G_2 generan el mismo *subespacio vectorial* de R^3 o subespacios distintos $G_1=\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ y $G_2 = \{(1,1,-2), (2,1,-3), (0,1,-1)\}$

Solución:

Ecuación cartesiana del subespacio vectorial generado por G_1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$$

Ecuación cartesiana del subespacio vectorial generado por G_2

$$r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -3 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$$

Son iguales, luego son subespacios idénticos.

8.- Sea el subespacio vectorial E formado por el conjunto de matrices cuadradas que *permutan* con la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Y sea el subespacio vectorial $F=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix} / a,b,c\in R\right\}$ Se pide:

a) Demostrar que E es un *subespacio vectorial*.

b) Una *base* de E.

c) Los *subespacio vectorial* $E\cap F$ y E+F.

Solución:

a) $E=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in M_2 / \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}z & t\\ -x & -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y & x\\ -t & z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}z=-y\\ t=x\end{cases}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\in M_2 / \alpha,\beta\in R\right\}$$

E es un subespacio vectorial $\Leftrightarrow \forall\lambda,\mu\in K, \forall\vec{a},\vec{b}\in E\Rightarrow \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\in E$

En este caso $\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\in E$ y $\vec{b}=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ -\beta' & \alpha'\end{pmatrix}\in E$, luego

$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\lambda\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ -\beta' & \alpha'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha+\mu\alpha' & \lambda\beta+\mu\beta'\\ -(\lambda\beta+\mu\beta') & \lambda\alpha+\mu\alpha'\end{pmatrix}\in E$

Siendo E un subespacio vectorial de dimensión 2.

b) $\boxed{B_E=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}}$

c) El subespacio intersección, $E\cap F$ será:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=a\\ \beta=b\\ -\beta=c\\ \alpha=-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=a=0\\ \beta=b=-c\end{cases}$$

$\boxed{E\cap F=\left\{\begin{pmatrix}0 & \beta\\ -\beta & 0\end{pmatrix}\in M_2 / \beta\in R\right\}}$ con $\dim E\cap F=1$

Aplicando la fórmula $\dim(E+F)=\dim E+\dim F-\dim(E\cap F)=2+3-1=4$

E+F es el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden 2.

9.- a) ¿Para qué valores de x los siguientes sistemas de vectores son *bases* de R^3? $B_1 = \{(1,-1,0),\ (x,1,0),\ (0,2,3)\}$; $B_2 = \{(2,x,1),\ (1,0,1),\ (0,1,3)\}$

b) Para x = 0, escribir las ecuaciones de *cambio de base* de B_1 a la *canónica*, de la canónica a B_1, de B_1 a B_2 y de B_2 a B_1.

Solución:

a1) Para cualquier número real x ≠ -1, en efecto:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3+3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

a2) Para cualquier número real x ≠ -1/3, en efecto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1-3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{3}$$

b) Cambio de B_1 a la canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_c = x_1 \\ y_c = -x_1 + y_1 + 2z_1 \\ z_c = 3z_1 \end{cases}}$$

Cambio de la canónica a B_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = x_c \\ y_1 = x_c + y_c - \frac{2}{3}z_c \\ z_1 = \frac{1}{3}z_c \end{cases}}$$

Cambio de B_2 a la canónica:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

igualando las ecuaciones matriciales del cambio de base de B_1 a Bc y de B_2 a Bc del sistema matricial anterior podemos responder al cambio de base de B_1 a B_2 y de B_2 a B_1, simplemente despejando:

Cambio de B_1 a B_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 3y_1 + 3z_1 \\ y_2 = 5x_1 - 6y_1 - 6z_1 \\ z_2 = -x_1 + y_1 + 2z_1 \end{cases}}$$

Cambio de B_2 a B_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 2x_2 + y_2 \\ y_1 = \dfrac{4}{3}x_2 + \dfrac{1}{3}y_2 - z_2 \\ z_1 = \dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{1}{3}y_2 + z_2 \end{cases}}$$

10.- Hallar las *coordenadas* del vector $\vec{u} = (x, y, z)$ en la base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{v}_2 = (-3, -7, 1)$ y $\vec{v}_3 = (0, 2, -1)$. ¿Cuál es la matriz de *cambio de la base* B' a la *canónica*?

Solución:

Escribimos el vector $\vec{u} = (x, y, z)$ como combinación lineal de los vectores de la base B':

$$\vec{u} = (x, y, z) = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 =$$

$$= \lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(-3, -7, 1) + \lambda_3(0, 2, -1) = (\lambda_1 - 3\lambda_2, 2\lambda_1 - 7\lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3) \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_1 - 3\lambda_2 \\ y = 2\lambda_1 - 7\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ z = \lambda_2 - \lambda_3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -5x + 3y + 6z \\ \lambda_2 = -2x + y + 2z \\ \lambda_3 = 2x - y - z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{u} = (-5x + 3y + 6z, -2x + y + 2z, 2x - y - z)_{B'}}$$

Cambio de B' a la canónica:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & .1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}_{B_c}}$$

11.-a) Probar que los sistemas de vectores G_1 y G_2 generan el mismo *subespacio vectorial* F de R^4.

$$G_1 = \{(1,2,-1,0), (4,8,-4,-3), (0,1,3,4), (2,5,1,4)\}$$
$$G_2 = \{(1,-2,-13,-1), (1,1,-4,-5), (2,3,-5,-2), (1,1,-4,-1)\}$$

b) Hallar la *dimensión*, una *base* "*escalonada*", unas *ecuaciones paramétricas* y las *ecuaciones cartesianas* de F.(Vamos a llamar bases "escalonadas" de F a aquellas cuyos vectores se pueden disponer como las filas de una matriz escalonada)

c) Sea H = $\{(x, y, z, t) \in R^4$ tales que $x + y + z = 0,\ x + z - 3t = 0\}$. Se pide:

1.- Hallar la *dimensión* y una *base* de H, de F + H y de F ∩ H respectivamente.

2.- Unas *ecuaciones cartesianas* de F + H y de F∩H.

d) ¿Es H un *subespacio suplementario* de F? En caso contrario halla un *subespacio suplementario* de F.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & x \\ 2 & 8 & 1 & y \\ -1 & -4 & 3 & z \\ 0 & -3 & 4 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -21x + 9y - 3z = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -13 & -4 & -5 & -4 \\ -1 & -5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -13 & -4 & -5 & -4 \\ -1 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -13 & -4 & -5 & -4 \\ -1 & -5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-196x + 84y - 28z = 0 \Rightarrow -7x + 3y - z = 0$$

Observamos que se obtiene la misma ecuación -7x+3y-z=0, luego G_1 y G_2 **generan el mismo subespacio** F de **R^4**.

b) La **dimensión** de F es 3 (el número de vectores no nulos obtenidos en la reducción por Gauss)

Una **base escalonada** de F está formada por los vectores no nulos obtenidos en la reducción por Gauss del apartado anterior

$$B_F = \{(1,0,-7,0), (0,1,3,0), (0,0,0,1)\}$$

Unas **ecuaciones paramétricas** de F son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -7\lambda + 3\mu \\ t = \gamma \end{cases},\ \lambda,\mu,\gamma \in R$

Ecuación cartesiana de F: **7x - 3y + z =0**, ya que todo vector (x, y, z, t) de F depende linealmente de los vectores de B_F

c) 1. Para hallar una base de H resolvemos el sistema dado por sus ecuaciones cartesianas

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z-3t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=-\lambda-\mu, \quad \lambda,\mu\in R \\ t=-\dfrac{1}{3}\mu \end{cases}$$

Por tanto, **una base de H** es B_H = {(1,0,-1,0), (0,1,-1,-1/3)} y su **dimensión** es 2.

Un sistema generador del subespacio F + H está formado por los vectores de B_F y de B_H. Para hallar una base de F + H calculamos el rango del sistema formado por los 5 vectores:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 3 & -1 & -1 \\ \underbrace{0 \quad -3 \quad 4}_{B_F} & & & \underbrace{0 \quad -1/3}_{B_H} & \end{pmatrix}=4$$

luego F + H = $\mathbf{R}^4$ **(dimensión 4)** y **una base es, por ejemplo, la base canónica {(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)}**

F∩H es el subespacio formado por los vectores comunes a F y H, luego dichos vectores deben verificar las ecuaciones de F y las de H. Unas ecuaciones paramétricas de F∩H se obtienen al resolver el sistema formado por las ecuaciones de F y H

$$\begin{matrix} F\equiv -7x+3y-z=0 \\ H\equiv\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z-3t=0 \end{cases} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{3}{2}\lambda \\ z=-\dfrac{5}{2}\lambda, \quad \lambda\in R \\ t=-\dfrac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

uego la dimensión de F ∩ H es 1 y una **base** es **{(2, 3, -5, -1)}**

2. Como F + H = $\mathbf{R}^4$ no tiene **ecuaciones cartesianas,** pues la única condición para que (x, y, z, t) ∈ $\mathbf{R}^4$ es que x, y, z, t ∈ **R**

Unas **ecuaciones cartesianas** de F ∩ H ≡ $\begin{cases} 7x-3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+z-3t=0 \end{cases}$ pero podemos hallar más.

Para hallar otras **ecuaciones cartesianas** de F∩H partimos de que todo vector (x,y,z,t) de F∩H depende linealmente de su base luego rango$\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 2 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$=1, en consecuencia, los menores de orden 2 son todos nulos y como dim(F∩H)=1, necesitamos 4-1= 3 ecuaciones cartesianas linealmente independientes,

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} x & z \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} x & t \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ F\cap H \equiv \boxed{\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 5x+2z=0 \\ x+2t=0 \end{cases}}$$

d) H no es un suplementario de F porque $F\cap H \neq \{\vec{0}\}$

Todo subespacio suplementario de F tiene dimensión = dim $\mathbf{R^4}$ - dimF= 4-3 = 1.

Un subespacio S **suplementario** de F se construye a partir de un vector $\vec{u}\notin$F, por ejemplo S = $\langle(0,1,1,0)\rangle$ ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

y en consecuencia F + S = $\mathbf{R^4}$ y $F\cap S = \{\vec{0}\}$

12.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ **de cambio de base de B a B', siendo** $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_4\}$ **y** $B' = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_4\}$**. Escribir** $\vec{u}_2$ **en función de los vectores de la base B'. Hallar la** ***matriz de cambio de base*** **de B' a B.**

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

La segunda columna de A son las coordenadas de u_2 en la base B', luego:

$$\boxed{\vec{u}_2 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 4\vec{v}_3 + 5\vec{v}_4}$$

Matriz de cambio de base de B' a B:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{1}{20} & -\frac{13}{30} & \frac{31}{60} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{20} & \frac{1}{15} & \frac{1}{60} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & -\frac{4}{15} & \frac{11}{60} \end{pmatrix}}$$

13.- Comprobar que B= {(1,2,1), (1,1,0), (3,1,1)} y B'= {(1,3,1), (0,1,1), (2,1,0)} son *bases* de R^3 y calcular las ecuaciones matriciales de *cambio*:

a) de la base B a la *base canónica* B_C

b) de la base B' a B_C

c) de la base B a B'

d) de la base B' a B.

Solución:

B= {(1,2,1), (1,1,0), (3,1,1)} y B'= {(1,3,1), (0,1,1), (2,1,0)} son bases de $\mathbf{R}^3$ porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

a) Ecuación de **cambio de la base** B a la base canónica B_C

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b) Ecuación de **cambio de la base** B' a la base canónica B_C

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Operando, tenemos que

c) Ecuación de **cambio de la base** B a B' $\equiv$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

d) Ecuación de **cambio de la base** B' a B $\equiv$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

14.- Se consideran los tres subespacios de R^4 siguientes:

$F_1 = \{ (\alpha,\beta,0,0) \ / \ \alpha,\beta \in R\}$

$F_2 =< (0,1,0,0), \ (0,0,1,0) >$

$F_3 =< (1,0,0,0) >$

a) Hallar $F_1 + F_2$

b) Hallar $F_3 + F_2$

c) Las sumas anteriores ¿son *sumas directas*? Cuando así ocurra, escribir la descomposición única de cada vector de la suma en suma de dos vectores uno de cada subespacio.

Solución:

a) Bases de F_1, F_2 y F_3 son: $B_1 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$, $B_2 = \{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$, y $B_3 = \{(1,0,0,0)\}$, respectivamente.

Una base B_{12} de $F_1 + F_2$ está constituida por los vectores linealmente independientes de $B_1 \cup B_2 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$, es decir:
$B_{12} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$
Por tanto, $\boxed{F_1 + F_2 = \{(\alpha,\beta,\gamma,0) \ / \ \alpha,\beta,\gamma \in R\}}$

b) Una base B_{23} de $F_2 + F_3$ está constituida por los vectores linealmente independientes de $B_2 \cup B_3 = \{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(1,0,0,0)\}$, es decir:
$B_{23} = \{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(1,0,0,0)\}$
Por tanto, $\boxed{F_2 + F_3 = \{(\alpha,\beta,\gamma,0) \ / \ \alpha,\beta,\gamma \in R\} = F_1 + F_2}$

c)
$F_1 + F_2$ **no es suma directa** pues $B_1 \cap B_2 = \{(0,1,0,0)\} \neq \phi$

$F_2 + F_3$ **sí es suma directa** pues $B_2 \cap B_3 = \phi$

Descomposición única de un vector de $F_2 + F_3$:
$\boxed{(\alpha,\beta,\gamma,0) = (0,\beta,\gamma,0) + (\alpha,0,0,0)}$

15.- Dados los subespacios vectoriales F determinado por las *ecuaciones cartesianas* $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ **y G por las *ecuaciones paramétricas*** $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_4 = \lambda_1 + \lambda_3 \\ x_5 = \lambda_1 + \lambda_3 \end{cases}$ **del espacio vectorial R^5, se pide: *bases* de F, G, F+G y $F \cap G$.**

Solución:

a) Una base del subespacio vectorial F debe tener tres vectores de F linealmente independientes, puesto que la dimensión de F es la dimensión del espacio vectorial R^5 menos el número de ecuaciones linealmente independientes de F. Los tres vectores necesarios son soluciones particulares del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha + \beta \\ x_4 = \gamma \\ x_5 = \alpha + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

luego una base de F puede ser $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$.

b) En el caso del subespacio vectorial G tenemos las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_4 = \lambda_1 + \lambda_3 \\ x_5 = \lambda_1 + \lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; una base: $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

c) Una base del subespacio suma sale de la unión de los vectores de cada base quitando los que sean combinación lineal de los restantes, para ello calculamos el rango de la siguiente matriz $r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$, la matriz que identifica el rango indica los vectores linealmente independientes y por lo tanto la base, $\boxed{\{(1,0,1,0,1),(0,1,1,0,0),(0,0,0,1,1),(1,1,1,1,1)\}}$. Si queremos escribir las ecuaciones del subespacio F+G, podemos escribir el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & x_5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

d) Para obtener las ecuaciones del subespacio vectorial $F \cap G$ solamente debemos juntar las ecuaciones cartesianas de cada subespacio vectorial F $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ y G; de las ecuaciones paramétricas de G obtenemos las ecuaciones $x_2 = x_3; x_4 = x_5$.

Por tanto, $x_1=0$; $x_2 = x_3; x_4 = x_5$ cuya dimensión es 2.

Una base de $F \cap G$ puede ser $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$.

16.- Determinar, en cada caso, si los vectores dados generan y/o libre de R^4.

a) $\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$

b) $\{(1,3,-5,0),(-2,1,0,0),(0,2,1,-1),(1,-4,5,0)\}$

c) $\{(1,0,-2,5),(2,1,0,-1),(1,1,2,1)\}$

Solución:

a) Sí son un sistema generador (libre con 4 vectores), en efecto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

b) No son un sistema generador, ni libre:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

c) No son un sistema generador, pues solamente hay tres, pero si es libre:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

17.- Escribir cada uno de los siguientes polinomios como *combinación lineal* de $x+1$, x^2+x, x^2+2.

a) x^2+3x+2

b) $2x^2-3x+1$

c) x^2+1

d) x

Solución:

a) $x^2+3x+2=\lambda_1(x+1)+\lambda_2(x^2+x)+\lambda_3(x^2+2)=(\lambda_2+\lambda_3)x^2+(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1+2\lambda_3$

$$\Rightarrow\begin{cases}1=\lambda_2+\lambda_3\\3=\lambda_1+\lambda_2\\2=\lambda_1+2\lambda_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=2\\\lambda_2=1\\\lambda_3=0\end{cases}$$

$$\boxed{x^2+3x+2=2(x+1)+1(x^2+x)+0(x^2+2)}$$

b) $2x^2-3x+1=\lambda_1(x+1)+\lambda_2(x^2+x)+\lambda_3(x^2+2)=(\lambda_2+\lambda_3)x^2+(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1+2\lambda_3$

$$\Rightarrow\begin{cases}2=\lambda_2+\lambda_3\\-3=\lambda_1+\lambda_2\\1=\lambda_1+2\lambda_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=-3\\\lambda_2=0\\\lambda_3=2\end{cases}$$

$$\boxed{2x^2-3x+1=-3(x+1)+0(x^2+x)+2(x^2+2)}$$

c) $x^2+1=\lambda_1(x+1)+\lambda_2(x^2+x)+\lambda_3(x^2+2)=(\lambda_2+\lambda_3)x^2+(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1+2\lambda_3$

$$\Rightarrow\begin{cases}1=\lambda_2+\lambda_3\\0=\lambda_1+\lambda_2\\1=\lambda_1+2\lambda_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=-\dfrac{1}{3}\\\lambda_2=\dfrac{1}{3}\\\lambda_3=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$$\boxed{x^2+1=-\frac{1}{3}(x+1)+\frac{1}{3}(x^2+x)+\frac{2}{3}(x^2+2)}$$

d) $x=\lambda_1(x+1)+\lambda_2(x^2+x)+\lambda_3(x^2+2)=(\lambda_2+\lambda_3)x^2+(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1+2\lambda_3$

$$\Rightarrow\begin{cases}0=\lambda_2+\lambda_3\\1=\lambda_1+\lambda_2\\0=\lambda_1+2\lambda_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{2}{3}\\\lambda_2=\dfrac{1}{3}\\\lambda_3=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$\boxed{x=\frac{2}{3}(x+1)+\frac{1}{3}(x^2+x)-\frac{1}{3}(x^2+2)}$$

18.- Determinar si los conjuntos siguientes G_1 y G_2 generan el mismo *subespacio vectorial* de R^3 o subespacios distintos:

a) $G_1=\{(1,0,-1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ y $G_2 = \{(2,1,-1), (1,2,1)\}$
b) $G_1=\{(1,0,-1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ y $G_2 = \{(2,1,-1), (1,-1,0)\}$

Solución:

a) Ecuación cartesiana del subespacio **vectorial generado por G_1**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z = 0$$

Ecuación cartesiana del subespacio **vectorial generado por G_2**

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 1 & 2 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3x - 3y + 3z = 0$$

Son iguales, luego son subespacios idénticos.

b) Ecuación cartesiana del subespacio vectorial generado por G_2

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = -x - y - 3z = 0$$

Son ecuaciones distintas.

19.- Si $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\right\}$ es *libre*, ¿cuáles de los siguientes conjuntos también lo son?

a) $\left\{\vec{u}-\vec{v}, \vec{v}-\vec{w}, \vec{w}-\vec{u}\right\}$

b) $\left\{\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}+\vec{u}\right\}$

c) $\left\{\vec{u}-\vec{v}, \vec{v}-\vec{w}, \vec{w}-\vec{z}, \vec{z}-\vec{u}\right\}$

d) $\left\{\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{u}\right\}$

Solución:

a) No es libre: $\lambda_1\left(\vec{u}-\vec{v}\right)+\lambda_2\left(\vec{v}-\vec{w}\right)+\lambda_3\left(\vec{w}-\vec{u}\right)=\vec{0}\Rightarrow$

$$(\lambda_1-\lambda_3)\vec{u}+(-\lambda_1+\lambda_2)\vec{v}+(-\lambda_2+\lambda_3)\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1-\lambda_3=0\\-\lambda_1+\lambda_2=0\\-\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$$

b) Sí es libre: $\lambda_1\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\lambda_2\left(\vec{v}+\vec{w}\right)+\lambda_3\left(\vec{w}+\vec{u}\right)=\vec{0}\Rightarrow$

$$(\lambda_1+\lambda_3)\vec{u}+(\lambda_1+\lambda_2)\vec{v}+(\lambda_2+\lambda_3)\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\\lambda_1+\lambda_2=0\\\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

c) No es libre: $\lambda_1\left(\vec{u}-\vec{v}\right)+\lambda_2\left(\vec{v}-\vec{w}\right)+\lambda_3\left(\vec{w}-\vec{z}\right)+\lambda_4\left(\vec{z}-\vec{u}\right)=\vec{0}\Rightarrow$

$$(\lambda_1-\lambda_4)\vec{u}+(-\lambda_1+\lambda_2)\vec{v}+(-\lambda_2+\lambda_3)\vec{w}+(-\lambda_3+\lambda_4)\vec{z}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda_4=0\\-\lambda_1+\lambda_2=0\\-\lambda_2+\lambda_3=0\\-\lambda_3+\lambda_4=0\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$$

d) No es libre: $\lambda_1\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\lambda_2\left(\vec{v}+\vec{w}\right)+\lambda_3\left(\vec{w}+\vec{z}\right)+\lambda_4\left(\vec{z}+\vec{u}\right)=\vec{0}\Rightarrow$

$$(\lambda_1+\lambda_4)\vec{u}+(\lambda_1+\lambda_2)\vec{v}+(\lambda_2+\lambda_3)\vec{w}+(\lambda_3+\lambda_4)\vec{z}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_4=0\\\lambda_1+\lambda_2=0\\\lambda_2+\lambda_3=0\\\lambda_3+\lambda_4=0\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=-\lambda_2=\lambda_3=-\lambda_4$$

20.- En $V = R^3$, sea $F = \{ (x,y,z) \ / \ 2x + y + z = 0 \}$. Buscar un *subespacio suplementario* de F.

Solución:

F es un plano vectorial de R^3. Un subespacio suplementario de F es cualquier recta vectorial no contenida en él.

Por ejemplo: $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha}$ que es ortogonal al plano (de hecho es su subespacio ortogonal)

21.- Sean F_1 y F_2 los siguientes *subespacios vectoriales* de R^5:

$$F_1 = \left\{ \vec{x} \ / x_1 + \ldots + x_5 = 0 \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \vec{x} \ / x_1 = \ldots = x_5 \right\}$$

Analizar si F_1 y F_2 son *subespacios suplementarios* de R^5 obteniendo la descomposición de cualquier vector $\vec{u} \in R^5$ en suma $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$, donde $\vec{u_1} \in F_1$ y $\vec{u_2} \in F_2$.

Solución:

Sea $\vec{u} \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow \vec{u} = (x_1,\ldots,x_5)$ con $x_1 + \ldots + x_5 = 0$ y $x_1 = \ldots = x_5$, es decir, $\vec{u} = (x,\ldots,x)$, con $5x = 0$ y, por tanto, $\vec{u} = \vec{0}$. Luego, $F_1 \cap F_2 = \left\{ \vec{0} \right\}$.

$F_1 + F_2 = V$. En efecto:

$$\vec{u} \in V,\ \vec{u} = (x_1,\ldots,x_5) = \underbrace{(y_1,\ldots,y_5)}_{\in F_1} + \underbrace{(t,\ldots,t)}_{\in F_2} = (y_1 + t,\ldots,y_5 + t) \Rightarrow$$

$$x_1 + \ldots + x_5 = (y_1 + t) + \ldots + (y_5 + t) = (y_1 + \ldots + y_5) + 5t = 5t \Rightarrow t = \frac{x_1 + \ldots + x_5}{5}$$

$$x_i = y_i + t \Rightarrow y_i = x_i - t = x_i - \frac{x_1 + \ldots + x_5}{5},\ i = 1,\ldots,5$$

Queda demostrado que $V = F_1 \oplus F_2$, es decir, que $\boxed{F_1 \text{ y } F_2 \text{ son subespacios suplementarios}}$.

22.- En cada caso, encontrar una base de V que contenga a $\vec{v}$ y/ó $\vec{w}$:

a) $V = R^3$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$

b) $V = R^4$, $\vec{v} = (1,-1,1,-1)$, $\vec{w} = (0,1,0,1)$

c) $V = P_3$, $\vec{v} = x^2 + 1$, $\vec{w} = x^2 + x$

Solución:

a) $\dim R^3=3$, necesitamos dos vectores linealmente independientes entre sí y con el vector dado:

B = {(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)}

Efectivamente, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

b) $\dim R^4=4$, necesitamos dos vectores linealmente independientes entre sí y con los vectores dados:

B = {(1,-1,1,-1),(0,1,0,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)}

Efectivamente, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

c) $\dim P_3=4$, necesitamos dos vectores linealmente independientes entre sí y con los vectores dados:

B = $\{x^2 + 1, x^2 + x, 1, x^3\}$

Obsérvese las coordenadas de cada polinomio en la base $\{1, x, x^2, x^3\}$

$x^2+1= 1+0\,x+1\,x^2+0\,x^3=(1,0,1,0)$

$x^2+x= 0+1\,x+1\,x^2+0\,x^3=(0,1,1,0)$

$1= 1+0\,x+0\,x^2+0\,x^3=(1,0,0,0)$

$x^3= 0+0\,x+1\,x^2+1\,x^3=(0,0,0,1)$

Luego, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

23.- Sea el subespacio vectorial F generado por los siguientes vectores de espacio vectorial R^4: $\vec{u}_1 = (2,3,1,0); \vec{u}_2 = (1,0,1,0); \vec{u}_3 = (0,3,-1,0)$. Se pide:

a) *Rango* de $H = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\}$. ¿Qué clase de sistema es H? ¿Existe alguna relación de dependencia entre los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$?

b) *Dimensión* y una *base* F.

c) Las *coordenadas* de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ respecto de la base obtenida en el apartado anterior.

d) Unas *ecuaciones paramétricas* de F.

e) Unas *ecuaciones cartesianas* o *implícitas* de F.

f) A partir de las *ecuaciones cartesianas* otras *ecuaciones paramétricas* distintas del apartado d).

g) ¿El vector (1,0,0,0) pertenece o no a F?

h) Una *base* B* del espacio vectorial R^4 que contenga a los vectores de una base de F.

i) Las ecuaciones del *cambio de base* de la base B* (del apartado anterior) a la *base canónica* B$_c$ de R^4.

j) Las ecuaciones del *cambio de base* B$_c$ a la base B*

k) La expresión analítica del vector $\vec{e}_2$ de la *base canónica* respecto de la base B*.

Solución:

a) El rango del sistema de vectores H se halla como rango de la matriz formada por dichos vectores $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ que es 2, entonces $\boxed{\mathbf{r(H)=2}}$

El sistema H es **ligado** y la relación de dependencia existente es $\boxed{\vec{u}_1 = 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3}$, como se comprueba fácilmente.

b) Ya que $H = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\}$ es ligado se cumple $F = \langle H \rangle = \langle \vec{u}_2; \vec{u}_3 \rangle$. Tenemos que B$_F$=$\boxed{\{\vec{u}_2; \vec{u}_3\}}$ es una base del espacio vectorial F y su $\boxed{\textbf{dimensión es 2}}$, el cardinal de cualquier base.

c) De la relación $\boxed{\vec{u}_1 = 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3}$ resulta $\boxed{\vec{u}_1 = 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (2,1)_{B_F}}$ coordenadas respecto de la base B$_F$ y para $\boxed{\vec{u}_2 = 1\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 = (1,0)_{B_F}}$ y $\boxed{\vec{u}_3 = 0\vec{u}_2 + 1\vec{u}_3 = (0,1)_{B_F}}$

d) Veamos, unas ecuaciones paramétricas de V. Como $\forall \vec{x} \in F \subset R^4$ se tiene que $\vec{x} = \lambda\vec{u}_2 + \mu\vec{u}_3 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(1,0,1,0) + \mu(0,3,-1,0) \Leftrightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = 3\mu \\ x_3 = \lambda - \mu \\ x_4 = 0 \end{array}\right\}}$, o bien,

$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ **Ecuaciones paramétricas** del subespacio vectorial F, pues dando valores a los parámetros λ, μ se obtiene las coordenadas de los vectores de F, siendo la dimensión de F el número de parámetros linealmente independientes que tienen sus ecuaciones paramétricas.

e) Eliminando los parámetros obtenemos las ecuaciones cartesianas o implícitas de F.

$r(H) = r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ y por el teorema de Rouche-Fröbenius $r\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 3 \\ x_3 & 1 & -1 \\ x_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ luego todos los menores de orden 3 son nulos $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 3 \\ x_3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 3 \\ x_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{-3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \text{ y } x_4=0}$ son las **ecuaciones cartesianas o implícitas** que identifica a F; las coordenadas de cualquier vector de F cumplen la ecuación anterior. Podemos observar que la dim F=dim R^4 - número de ecuaciones linealmente independientes. Cuando F=R^4 no hay ecuaciones cartesianas.

f) Se puede pasar de las ecuaciones cartesianas a las ecuaciones paramétricas, simplemente resolviendo el sistema de ecuaciones. En nuestro caso, con la ecuación $-3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$ se despeja una incógnita $x_2 = 3x_1 - 3x_3$ quedando en función de las otras dos $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 3\alpha - 3\beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = 0 \end{cases}$ otras ecuaciones paramétricas de F.

g) Las ecuaciones permiten saber que vectores son del subespacio vectorial F. Sustituyendo las coordenadas en las ecuaciones -3.1+0+3.0=0 y 0=0, evidentemente no se cumple, por tanto la respuesta es que $\boxed{(1,0,0,0) \not\in F}$.

h) Ampliamos la base de F del apartado b) $\{\vec{u}_2; \vec{u}_3\}$ con el vector del apartado e) puesto que no es de F y conseguimos $\{\vec{u}_2; \vec{u}_3; (1,0,0,0)\}$ tres vectores linealmente independientes, basta conseguir otro, por ejemplo (0,0,0,1) puesto que evidentemente no pertenece a F y que no sea combinación lineal de los otros tres. Por tanto, una base del espacio vectorial R^4 es **B*=$\{\vec{u}_2; \vec{u}_3;(1,0,0,0);(0,0,0,1)\}$**, ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

i) Las ecuaciones del cambio de la base B* a la base B_c son: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

j) Las ecuaciones del cambio de la base B_c a la base B* son:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{pmatrix}}$$

k) La expresión analítica del vector $\vec{e}_2$ se obtiene de la segunda columna de la matriz del cambio de base de B_c a la base B*, es decir, $\vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{u}_2 + \frac{1}{3}\vec{u}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_1$

24.- Si F y G son *subespacios* de V, demostrar que $F \cup G$ es subespacio de V si y solo si $F \subset G$ ó $G \subset F$.

Solución:

$\Rightarrow$) Supongamos que $F \bigcup G$ es subespacio vectorial de V. Razonemos por el absurdo y supongamos que $F \not\subset G$ y que $G \not\subset F$. Existen entonces dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tales que $\vec{x} \in F$, pero, $\vec{x} \notin G$ y, viceversa, $\vec{y} \in G$, pero, $\vec{y} \notin F$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} \in F \Rightarrow \vec{x} \in F \bigcup G \\ \vec{y} \in G \Rightarrow \vec{y} \in F \bigcup G \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F \bigcup G \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{x} + \vec{y} \in F \\ \text{ó} \\ \vec{x} + \vec{y} \in G \end{array}\right.$$

Si $\vec{x} + \vec{y} \in F$, entonces, $\left(\vec{x} + \vec{y}\right) - \vec{x} = \vec{y} \in F$, por ser F un subespacio; absurdo, pues $\vec{y} \notin F$.

Si $\vec{x} + \vec{y} \in G$, entonces, $\left(\vec{x} + \vec{y}\right) - \vec{y} = \vec{x} \in G$, por ser G un subespacio; absurdo, pues $\vec{x} \notin G$.

$\Leftarrow$) El recíproco es inmediato: Si $F \subset G$ o $G \subset F$, entonces $F \bigcup G = G$ o $F \bigcup G = F$, respectivamente, y $F \bigcup G$ es subespacio por serlo F y G.

25.- Sea V el espacio vectorial de las funciones reales de variable real. Sea $F_1 = \{f \in V / f \text{ es par}\}$ y $F_2 = \{g \in V / g \text{ es impar}\}$. Demostrar:

a) F_1 y F_2 son *subespacios vectoriales* de V.

b) $V = F_1 \oplus F_2$ (Nota: $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$).

Solución:

a) Sean f, g $\in F_1$ y $\lambda,\mu \in R$; $\lambda f + \mu g \in F_1$. En efecto:
$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) \underset{f,g\in F_1}{=} \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$, luego $\lambda f + \mu g$ es una función par, es decir, $\lambda f + \mu g \in F_1$ y F_1 es subespacio vectorial.

Sean f, g $\in F_2$ y $\lambda,\mu \in R$; $\lambda f + \mu g \in F_2$. En efecto:
$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) \underset{f,g\in F_2}{=} \lambda[-f(x)] + \mu[-g(x)] = -(\lambda f + \mu g)(x)$, luego $\lambda f + \mu g$ es una función impar, es decir, $\lambda f + \mu g \in F_2$ y F_2 es subespacio vectorial.

b) Operando, se observa que $\forall f \in V$, se verifica que: $f(x) = g(x) + h(x)$, siendo $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ y $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} g(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x) \Rightarrow g \in F_1 \\ h(-x) = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x) \Rightarrow h \in F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f = g + h \in F_1 + F_2. \text{ Por tanto, } V = F_1 + F_2.$$

Si $f \in F_1 \cap F_2$, entonces, $f(-x) = f(x) = -f(x)$, luego $f(x) = 0,\ \forall x \in R$; es decir, $f \equiv 0$. Así, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Queda demostrado que $V = F_1 \oplus F_2$.

26.- Consideremos el conjunto R^2 formado por todas las parejas (x,y) de números reales. Se define en R^2 la operación interna (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') y una de las operaciones externas siguientes:

a) $\lambda(x,y)=(\lambda x,0)$

b) $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$

c) $\lambda(x,y)=(\lambda+\lambda x-1,\lambda+\lambda y-1)$

d) $\lambda(x,y)=(\lambda y,\lambda y)$

para $\lambda\in R$. Decir, para cada uno de los cuatro casos, si se obtiene o no una estructura de *espacio vectorial* en R^2.

Solución:

Previamente comprobemos que R^2 con la suma tiene estructura de grupo abeliano:

[A1] **Asociativa**: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\ \ \forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in R^2$.

Sean $\vec{a}=(x,y),\vec{b}=(x',y'),\vec{c}=(x'',y'')\in R^2$ entonces:

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\left((x,y)+(x',y')\right)+(x'',y'')=(x+x',y+y')+(x'',y'')=\left((x+x')+x'',(y+y')+y''\right)$

$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=(x,y)+\left((x',y')+(x'',y'')\right)=(x,y)+(x'+x'',y'+y'')=\left(x+(x'+x''),y+(y'+y'')\right)$.

Por ser R un cuerpo se cumple la asociativa y se tiene que $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\left(x+x'+x'',y+y'+y''\right)=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ y se verifica la propiedad asociativa $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

[A2] **Existencia de elemento neutro**: Existe un elemento que designaremos $\vec{0}=(0,0)\in R^2$ que verifica que $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a}\in R^2$.

En efecto: $\vec{a}+\vec{0}=(x,y)+(0,0)=(x+0,y+0)=(x,y)=\vec{a}$ y por otra parte $\vec{0}+\vec{a}=(0,0)+(x,y)=(0+x,0+y)=(x,y)=\vec{a}$ luego $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ y $\vec{0}=(0,0)$ es el vector nulo.

[A3] **Existencia de elemento simétrico**: Para cualquier $\vec{a}\in R^2$ existe un único elemento de R^2, que designaremos por $-\vec{a}$ tal que $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

El elemento $-\vec{a}=(-x,-y)$ es el elemento opuesto del vector $\vec{a}=(x,y)\in R^2$ ya que $\vec{a}+(-\vec{a})=(x,y)+(-x,-y)=(x-x,y-y)=(0,0)=\vec{0}$ y que $(-\vec{a})+\vec{a}=(-x,-y)+(x,y)=(-x+x,-y+y)=(0,0)=\vec{0}$ y se cumple $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

[A4] **Conmutativa**: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\ \ \forall\vec{a},\vec{b}\in R^2$

Sean $\vec{a}=(x,y),\vec{b}=(x',y')\in R^2$ entonces: $\vec{a}+\vec{b}=(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ y permutando $\vec{b}+\vec{a}=(x',y')+(x,y)=(x'+x,y'+y)$ y por ser conmutativo R $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Por tanto, es $(R^2,+)$ un **grupo conmutativo**.

A continuación iremos viendo las siguientes condiciones para cada caso:

a) $\lambda(x,y)=(\lambda x,0)$

Este caso se resuelve rápidamente considerando la [A8] El elemento unidad del cuerpo K, que designaremos por 1, verifica $1.\vec{a} = \vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in R^2$.

Como $1.\vec{a} = 1.(x,y) = (1.x,0) = (x,0) \neq (x,y) = \vec{a}$. No se cumple una de las condiciones y **no puede ser un espacio vectorial con esta ley externa.**

b) $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$

Vamos a estudiar las cuatro condiciones:

[A5] $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b} \quad \lambda \in K \quad \forall \vec{a},\vec{b} \in R^2$

En efecto: $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda((x,y)+(x',y')) = \lambda(x+x',y+y') =$

$= (\lambda x+\lambda x',\lambda y+\lambda y') = (\lambda x,\lambda y)+(\lambda x',\lambda y') = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

[A6] $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a} \quad \forall \lambda,\mu \in K \text{ y } \forall \vec{a} \in R^2$.

En este caso:

$$(\lambda+\mu)\vec{a} = (\lambda+\mu)(x,y) = ((\lambda+\mu)x,(\lambda+\mu)y) = ((\lambda x+\mu x),(\lambda y+\mu y)) =$$
$$= ((\lambda x+\mu x),(\lambda y+\mu y)) = (\lambda x,\lambda y)+(\mu x,\mu y) = \lambda(x,y)+\mu(x,y) = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

[A7] $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \quad \forall \lambda,\mu \in K \text{ y } \forall \vec{a} \in R^2$.

Ahora: $\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda(\mu(x,y)) = \lambda(\mu x,\mu y) = (\lambda\mu x,\lambda\mu y) = (\lambda\mu)(x,y) = (\lambda\mu)\vec{a}$

[A8] El elemento unidad del cuerpo K, que designaremos por 1, verifica $1.\vec{a} = \vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in R^2$.

Por último: $1.\vec{a} = 1(x,y) = (1x,1y) = (x,y) = \vec{a}$.

Cumple las ocho condiciones y con estas operaciones **R^2 es un espacio vectorial sobre K**.

c) $\lambda(x,y)=(\lambda+\lambda x-1,\lambda+\lambda y-1)$

Podemos verificar en primer lugar cualquier condición, por ejemplo, [A6] $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a} \quad \forall \lambda,\mu \in K \text{ y } \forall \vec{a} \in R^2$. Y resulta que:

$$(\lambda+\mu)\vec{a} = (\lambda+\mu)(x,y) = (\lambda+\mu+(\lambda+\mu)x-1,\lambda+\mu+(\lambda+\mu)y-1) =$$
$$= (\lambda+\mu+(\lambda x+\mu x)-1,\lambda+\mu(\lambda y+\mu y)-1) \neq (\lambda+\mu+(\lambda x+\mu x)-2,\lambda+\mu(\lambda y+\mu y)-2) =$$
$$= (\lambda+(\lambda x)-1,\lambda+(\lambda y)-1)+(\mu+(\mu x)-1,\mu+(\mu y)-1) = \lambda(x,y)+\mu(x,y) = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}.$$

Por tanto, $(\lambda+\mu)\vec{a} \neq \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ no se cumple la condición y **no puede ser un espacio vectorial con esta operación.**

d) $\lambda(x,y)=(\lambda y,\lambda y)$

Este caso se resuelve rápidamente considerando la [A8] El elemento unidad del cuerpo K, que designaremos por 1, verifica $1.\vec{a} = \vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in R^2$.

Como $1.\vec{a} = 1.(x,y) = (1.y,1.y) = (y,y) \neq (x,y) = \vec{a}$. No se cumple una de las condiciones y **no puede ser un espacio vectorial con esta ley externa**.

27.- Comprobar que el conjunto {(1,1,0), (1,0,2), (0,1,2)} forma una *base* del espacio R^3. Hallar las *coordenadas* del vector (2,5,10) en dicha *base*.

Solución:

Sabemos que dim $R^3=3$ y que el cardinal del conjunto {(1,1,0), (1,0,2), (0,1,2)} es 3 si calculamos el rango del conjunto {(1,1,0), (1,0,2), (0,1,2)} obtenemos que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3$ que quiere decir que el sistema es libre contres vectores linealmente independientes y por tanto base del espacio vectorial R^3.

Para hallar las coordenadas se plantea el sistema:
$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Siendo que el vector (2,5,10) respecto la base canónica es igual al vector **(1,1,4)** respecto la base {(1,1,0), (1,0,2), (0,1,2)}.

28.- Demostrar que los vectores (1,0,-2,1), (1,3,2,-2) y (2,3,4,1) son *lineamente independientes*. Construir, a partir de la *base canónica*, una base que contenga a estos tres *vectores*.

Solución:

Calculamos el rango del sistema formado por los tres vectores (1,0,-2,1), (1,3,2,-2) y (2,3,4,1): $r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 3$. Los pasos seguidos par obtener el rango son: 1)c2-c1 y c3-2c1. 2)c3-c2.

La base canónica $B_c = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ del espacio vectorial R^4 permite escribir: $(1,0,-2,1) = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4$ pudiendo despejar $\vec{e}_4 = (1,0,-2,1) - 1\vec{e}_1 - 0\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$. Con lo cual la nueva base será: $B_1 = \{(1,0,-2,1), \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$.

Ahora el segundo vector $(1,3,2,-2) = 1\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4$ y como $\vec{e}_4 = (1,0,-2,1) - 1\vec{e}_1 - 0\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ sustituyendo se tiene que $(1,3,2,-2) = 1\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 =$ $= 1\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - 2\left((1,0,-2,1) - 1\vec{e}_1 - 0\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right) = -2(1,0,-2,1) + 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ pudiendo despejar $\vec{e}_3 = -(1,0,-2,1) - 1/2(1,3,2,-2) + 3/2\vec{e}_1 + 3/2\vec{e}_2$ y otra base $B_2 = \{(1,0,-2,1), (1,3,2,-2), \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Por último $(2,3,4,1) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + \vec{e}_4$ y los resultados anteriores de $\vec{e}_3 = -(1,0,-2,1) - 1/2(1,3,2,-2) + 3/2\vec{e}_1 + 3/2\vec{e}_2$ y $\vec{e}_4 = (1,0,-2,1) - 1\vec{e}_1 - 0\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ permiten escribir $\vec{e}_4 = (1,0,-2,1) - 1\vec{e}_1 - 0\vec{e}_2 + 2\left(-(1,0,-2,1) - 1/2(1,3,2,-2) + 3/2\vec{e}_1 + 3/2\vec{e}_2\right) =$ $= -3(1,0,-2,1) - (1,3,2,-2) + 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ resultando $(2,3,4,1) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + \vec{e}_4$ $= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\left(-(1,0,-2,1) - 1/2(1,3,2,-2) + 3/2\vec{e}_1 + 3/2\vec{e}_2\right) - 3(1,0,-2,1) - (1,3,2,-2) + 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ $= -7(1,0,-2,1) - 3(1,3,2,-2) + 10\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2$.

Despejando $\vec{e}_2 = 7/12(1,0,-2,1) + 3/12(1,3,2,-2) - 10/12\vec{e}_1$ y la base definitiva $\boxed{B = \{(1,0,-2,1), (1,3,2,-2), (2,3,4,1), \vec{e}_1\}}$

29.- Encontrar una *base* del subespacio F de R^3 engendrado por los vectores (1,2,3) (-1,5,2) y (1,9,8). ¿Qué valor hay que dar a x para que el vector (x,16,13) sea de este *subespacio*?

Solución:

Los vectores (1,2,3) (-1,5,2) y (1,9,8) son claramente linealmente dependientes, puesto que (1,9,8)=2(1,2,3)+(-1,5,2). Nos quedamos con (1,2,3) y (-1,5,2) que son linealmente independientes y generador de F. Una posible base de F es $B_F=\{(1,2,3),(-1,5,2)\}$.

Para que $(x,16,13) \in F$ tiene que ser (x,16,13) combinación lineal de los vectores de la base de F que se puede expresar mediante el determinante de los tres vectores $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 16 & 2 & 5 \\ 13 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y cuya ecuación es -11x+11=0, de donde **x=1**.

30.- Si los números 1,3 y 5 son las *coordenadas* de un vector $\vec{v}$ en la *base* {(1,1,0),(0,1,1), (1,0,1)}, hallar las *coordenadas* del vector $\vec{v}$ en la *base canónica*.

Solución:

La expresión analítica del vector $\vec{v}$ teniendo en cuenta que sus coordenadas son 1, 3 y 5 es $\vec{v}$ = 1 (1,1,0)+3 (0,1,1)+5 (1,0,1), de donde $\vec{v}$ = 1 (1,1,0)+3 (0,1,1)+5 (1,0,1)=(6,4,8), siendo 6, 4 y 8 las coordenadas respecto de la base canónica.

31.- Sean $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $B'=\{\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$ dos bases de R^3, tales que $\vec{u}'=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{v}'=\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{w}'=\vec{u}+\vec{w}$. Hallar las ecuaciones del *cambio de la base* B a B' y de la base B' a B.

Solución:

El sistema $\vec{u}'=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}, \vec{v}=\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{w}'=\vec{u}+\vec{w}$ en forma matricial sería: $\begin{pmatrix}\vec{u}' & \vec{v}' & \vec{w}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

Cualquier vector $\vec{v}\in R^3$ se puede escribir respecto a las dos base B' y B en la forma matricial $\vec{v}=\begin{pmatrix}\vec{u}' & \vec{v}' & \vec{w}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Ahora sustituyendo la ecuación anterior, resulta $\vec{v}=\begin{pmatrix}\vec{u}' & \vec{v}' & \vec{w}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Como la expresión de un vector respecto de una base es única queda $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que son las ecuaciones del cambio de base de B' a B.

Para obtener las ecuaciones del cambio de base de B a B' basta con despejar (x',y',z') con respecto a (x,y,z) en el sistema anterior,

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\boxed{\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}}$$

32.- Dadas las bases de R^3, $B=\{\vec{u}_1 = (2,1,0),\ \vec{u}_2 = (-1,0,1),\ \vec{u}_3 = (0,1,-2)\}$ y $B'=\{\vec{v}_1 = (0,1,1),\ \vec{v}_2 = (1,0,0),\ \vec{v}_3 = (2,0,1)\}$. a) Hallar la expresión analítica del *cambio de base* de B a B´, de B´a B y de B´a la *base canónica*. b) Si $\vec{a} = (1,1,1)$ respecto de B ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de B'? c) Si $\vec{b} = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$, escribir la expresión de $\vec{b}$ respecto de B.

Solución:

a) Si consideramos la base canónica $B_c = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ y que los vectores de las bases B y B' vienen referidos a la base canónica, tenemos los sistemas en forma matricial:

$$\begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Cualquier vector $\vec{v} \in R^3$ se puede escribir respecto a las tres bases B, B' y B_c en la forma matricial

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_c\\ y_c\\ z_c\end{pmatrix}.$$

Ahora sustituyendo las ecuaciones anteriores, resulta:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_c\\ y_c\\ z_c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_c\\ y_c\\ z_c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}.$$

Como la expresión de un vector respecto de una base es única queda

$$\begin{pmatrix}x_c\\ y_c\\ z_c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$$

de donde, podemos obtener cualquier cambio de base entre las tres bases consideradas, a saber B, B' y B_c:

- Cambio de base de B' a B_c: $\begin{pmatrix}x_c\\ y_c\\ z_c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$ y sus ecuaciones $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x_c = y' + 2z'\\ y_c = x'\\ z_c = x' + z'\end{array}\right.}$

- Cambio de base de B a B':

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & -3 & 6\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}$$

y sus ecuaciones $\boxed{\begin{cases} x' = x + z \\ y' = 4x - 3y + 6z \\ z' = -x + y - 3z \end{cases}}$

- Cambio de base de B' a B:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

y sus ecuaciones $\boxed{\begin{cases} x = \frac{3}{4}x' + \frac{1}{4}y' + \frac{3}{4}z' \\ y = \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' \\ z = \frac{1}{4}x' - \frac{1}{4}y' - \frac{3}{4}z' \end{cases}}$

b) Para el vector $\vec{a} = (1,1,1)$ respecto de la base B usamos las ecuaciones últimas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y sustituimos(x,y,z) por (1,1,1) quedando $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, siendo **(2,7,-3)** las coordenadas del vector $\vec{a}$ respecto de la base B.

c) Análogamente para el vector $\vec{b} = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ necesitamos las ecuaciones del cambio de base de B' a B: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ y sustituimos (x',y'z') por (0,1,-1) puesto que $\vec{b} = \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = (0,1,-1)_{B'}$, de donde se obtiene $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ con lo cual

$\vec{b} = \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = (0,1,-1)_{B'} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)_B = \boxed{-\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3}$.

33.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&2\\1&1&4\end{pmatrix}$ de cambio de base de B a B', siendo $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ y $B'=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$. Escribir el *vector* $\vec{u}_2$ en función de los vectores de B'. Hallar la matriz del *cambio de base* de B' a B.

Solución:

La matriz A que representa el cambio de base de B a B' está construida con las coordenadas de los vectores de la base B referidos a la base B', en nuestro caso será $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&2\\ \underbrace{1}_{\vec{u}_1}&\underbrace{1}_{\vec{u}_2}&\underbrace{4}_{\vec{u}_3}\end{pmatrix}$ siendo cada vector

$$\vec{u}_1=(1,2,1)_{B'}=1\vec{v}_1+2\vec{v}_2+1\vec{v}_3;$$

$$\vec{u}_2=(1,0,1)_{B'}=1\vec{v}_1+0\vec{v}_2+1\vec{v}_3;$$

$$\vec{u}_3=(1,2,4)_{B'}=1\vec{v}_1+2\vec{v}_2+4\vec{v}_3.$$

La matriz del cambio de base de B' a B será la inversa de la matriz A:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&2\\1&1&4\end{pmatrix}^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}\\1&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}}$$

34.- Consideremos las bases de V^3:

$B_1=\{\vec{e}_1=(1,0,0), \vec{e}_2=(0,1,0), \vec{e}_3=(0,0,1)\}$,

$B_2=\left\{\vec{u}_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}), \vec{u}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}),\ \vec{u}_3=(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})\right\}$.

a) Hallar el *cambio de base* de B_1 a B_2 b) Hallar el conjunto F de vectores que tienen las mismas *coordenadas* respecto de B_1 y de B_2. Demostrar que F es *subespacio* de V^3 y hallar una *base* de F.

Solución:

a) La matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ representa el cambio de base de B_2 a B_1, pues las columnas son los vectores de la base B_2 respecto de la base B_1. Entonces calculamos la matriz inversa de la anterior, que resulta ser la misma (es ortogonal) y tenemos la matriz del cambio de base de B_1 a B_2:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}$$

b) Buscamos los vectores que tienen las mismas coordenadas respecto a las dos bases: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, de aquí se obtiene $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0-1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y resolviendo el sistema queda $x-\sqrt{2}y-z=0$ como única ecuación. Por tanto, $\boxed{F=\{(x,y,z)/x-\sqrt{2}y-z=0\}}$.

Para demostrar que F es un subespacio vectorial del espacio vectorial R^3 utilizamos la caracterización: $\forall\lambda,\mu\in K, \forall\vec{a},\vec{b}\in F \Rightarrow \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\in F$

$$\forall\lambda,\mu\in K, \forall\vec{a},\vec{b}\in F \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}=(x,y,z)\in F \Leftrightarrow x-\sqrt{2}y-z=0 \\ \vec{b}=(x',y',z')\in F \Leftrightarrow x'-\sqrt{2}y'-z'=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in F \Leftrightarrow \lambda x-\sqrt{2}\lambda y-\lambda z=\lambda 0=0 \\ \mu\vec{b}=(\mu x',\mu y',\mu z')\in F \Leftrightarrow \mu x'-\sqrt{2}\mu y'-\mu z'=\mu 0=0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')\in F \Leftrightarrow \lambda x+\mu x'-\sqrt{2}(\lambda y+\mu y')-(\lambda z+\mu z')=0\,.$$

$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\in F$. Por tanto, se cumple la caracterización de subespacios vectoriales y F es un subespacio vectorial con $x-\sqrt{2}y-z=0$ la ecuación cartesiana que lo determina, de donde se puede despejar z siendo $z=x-\sqrt{2}y$ o bien $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ unas ecuaciones paramétricas y una posible base de F es $\boxed{\left\{(1,0,1),\left(0,1,-\sqrt{2}\right)\right\}}$ y por supuesto dim(F)=2.

35.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&-4&3\\2&5&-3&4\\6&17&-7&10\\1&3&-3&2\end{pmatrix}$. **b) Hallar una *base* del subespacio engendrado por los vectores fila de la matriz A. c) Hallar unas ecuaciones vectoriales, *paramétricas e implícitas* de dicho subespacio.**

Solución:

a) El rango de la matriz A se obtiene mediante combinación lineal de las filas de dicha matriz:

$$\begin{pmatrix}1&2&-4&3\\2&5&-3&4\\6&17&-7&10\\1&3&-3&2\end{pmatrix}\underset{\substack{f_2-2f_1\\f_3-6f_1\\f_4-f_1}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&2&-4&3\\0&1&5&-2\\0&5&17&-8\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\underset{\substack{f_3-5f_2\\f_4-f_2}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&2&-4&3\\0&1&5&-2\\0&0&-8&2\\0&0&-4&1\end{pmatrix}\underset{f_4-2f_3}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&2&-4&3\\0&1&5&-2\\0&0&-8&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

La última matriz indica que son tres las filas linealmente independientes, luego el rango de A es 3.

b) Una base posible es la formada por las tres filas resultantes en el proceso anterior.
$B=\{(1,2,-4,3),(0,1,5,-2),(0,0,-8,2)\}$.

c) Las ecuaciones del subespacio vectorial se obtienen a partir de la base anterior.

- Ecuación vectorial: $\vec{v}=(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda_1(1,2,-4,3)+\lambda_2(0,1,5,-2)+\lambda_3(0,0,-8,2)$

- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases}x_1=\lambda_1\\x_2=2\lambda_1+\lambda_2\\x_3=-4\lambda_1+5\lambda_2-8\lambda_3\\x_4=3\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3\end{cases}$

- Ecuación implícita: $\begin{vmatrix}x_1&1&0&0\\x_2&2&1&0\\x_3&-4&5&-8\\x_4&3&-2&2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow \boxed{14x_1-3x_2-x_3-4x_4=0}$.

36.- Hallar una *base* del subespacio vectorial F formado por las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar un *subespacio suplementario* de F.

Solución:

Puesto que podemos escribir la matriz como combinación lineal de dos matrices independientes $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ se cumple que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ son independientes ya que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \forall k$ por tanto una base de F puede ser $\boxed{\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}}$.

Como el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 es de dimensión 4 $M_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in R\right\}$, la dimensión del subespacio complementario de F, F’, será:

dim F’=dim M_2-dim F= 4-2=2. Necesitamos dos matrices cuadradas de orden 2 independientes y que no pertenezcan al subespacio F.

El subespacio F dado es $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} / a, b \in R\right\} = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} / a, b \in R\right\}$

Y un subespacio suplementario $\boxed{F' = \left\{\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in R\right\}}$ puesto que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin F'$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin F'$ y son independientes.

37.- Sea F el subespacio vectorial F = < (1,-1,0), (0,6,2), (1,5,2), (3,3,2) >. Se pide:

a) Una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de F.

b) Un *subespacio* G *suplementario* del subespacio F.

c) Sea $\vec{x} = (3,-1,-3)$. Indicar si $\vec{x} \in F$ ó $\vec{x} \in G$ ó $\vec{x} \in F+G$. Descomponer el vector $\vec{x}$ en suma de dos vectores, uno paralelo y otro perpendicular al vector $\vec{u} = (1,-1,0) \in F$.

d) Una *base* B_1 del espacio vectorial F+G.

e) Una superficie en R^3 tiene de ecuación $3x^2+2xy-2xz+3y^2+2yz+3z^2=1$. Determinar la ecuación (lo más simplificada posible) de esta superficie, respecto de la nueva base: $B_2 = \left\{\vec{u} = \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right), \vec{v} = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right), \vec{w} = \left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$.

f) Ecuaciones del *cambio de base* de B_1 a B_2.

g) El conjunto H de vectores que tienen las mismas *coordenadas* respecto de B_1 y B_2.

h) Demostrar que H es un *subespacio vectorial* del espacio vectorial R^3.

Solución:

a) $r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2$, entonces dimF=2 y una base de $\boxed{F: \{(1,-1,0), (0,6,2)\}}$ y las ecuaciones paramétricas $\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = -t+6s \\ z = 2s \end{cases}}$.

b) dimG=dimR^3-dimF=3-2=1; G se forma con cualquier vector que no pertenezca a F, por ejemplo, $\vec{x} = (3,-1,-3)$, ya que $r\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 3$, luego $\boxed{G = \{(3\lambda,-\lambda,-3\lambda) / \lambda \in R\}}$.

c) $\vec{x} \notin F$ y $\vec{x} \in G \Rightarrow \vec{x} \in F+G = R^3$

El vector $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ tal que $\vec{x}_1 = \lambda\vec{u} = \lambda(1,-1,0)$ (paralelo a $\vec{u}$) y además $\vec{x}_2 \perp \vec{u} = (1,-1,0)$ (perpendicular a $\vec{u}$).

Por tanto, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \lambda\vec{u} + \vec{x}_2 \Rightarrow \vec{x}_2 = \vec{x} - \lambda\vec{u} = (3-\lambda, -1+\lambda, -3)$ y como debe ser $\vec{x}_2 \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{x}_2.\vec{u} = (3-\lambda,-1+\lambda,-3)(1,-1,0) = 0 \Leftrightarrow 4-2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

Resulta $\vec{x}_1 = \lambda\vec{u} = 2(1,-1,0) = \boxed{(2,-2,0)} \Rightarrow \vec{x}_2 = \vec{x} - \lambda\vec{u} = (3-\lambda,-1+\lambda,-3) = \boxed{(1,1,-3)}$

d) Como $F+G=R^3$, cualquier base del espacio vectorial, por ejemplo, $\boxed{B_1=\{\vec{e}_1=(1,0,0),\vec{e}_2=(0,1,0),\vec{e}_3=(0,0,1)\}}$

e) Ecuaciones del cambio de base de B_2 a B_1:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{x_2}{2}+\frac{y_2}{2} \\ y=-\frac{y_2}{2}+\frac{z_2}{2} \\ z=\frac{x_2}{2}-\frac{z_2}{2} \end{cases}$$ y sustituyendo en la ecuación:

$3x^2+2xy-2xz+3y^2+2yz+3z^2=1$ obtenemos $\boxed{x_2^2+y_2^2+z_2^2=1}$ respecto de la base B_2.

f) Ecuaciones del cambio de base de B_1 a B_2.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}$$

g) El conjunto H de vectores que tienen las mismas coordenadas respecto de B_1 y B_2.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{H=\{(0,0,0)\}}$$

h) Demostrar que H es un subespacio vectorial del espacio vectorial R^3.

H es un subconjunto de R^3 y contiene a cualquier combinación lineal de los vectores de H, puesto que es el vector nulo.

38.- Se considera el espacio vectorial R^4. Se pide:

a) Determinar si los siguientes conjuntos de vectores generan V:

$$F = \left\{\vec{u}_1 = (1,1,1,1), \vec{u}_2 = (0,1,1,1), \vec{u}_3 = (0,0,1,1), \vec{u}_4 = (0,0,0,1)\right\}$$

$$H = \left\{\vec{v}_1 = (1,3,-5,0), \vec{v}_2 = (-2,1,0,0), \vec{v}_3 = (0,2,1,-1), \vec{v}_4 = (1,-4,5,0)\right\}$$

¿Cuál de ellos es, pues, una *base* de R^4, que llamaremos B?

b) Sean $S = \left\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right\}$ y $T = \left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right\}$ donde:

$$\vec{x} = (1,2,5,3) \qquad \vec{u} = (2,1,4,-3)$$

$$\vec{y} = (3,1,5,-6) \qquad \vec{v} = (3,1,3,-2)$$

$$\vec{z} = (1,1,3,0) \qquad \vec{w} = (9,2,3,-1)$$

Sea $U = < S >$ y $V = < T >$. Hallar la *dimensión* y una *base* de cada uno de los *subespacios* U, V, U + V y $U \cap V$.

c) Completar la *base* de U + V obtenida en el apartado anterior para formar una *base* B' de R^4. Escribir las ecuaciones de *cambio de base* de B a B' y de B' a B.

***Solución*:**

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por tanto, F es un sistema libre de V con 4 vectores, como indica la dimR^4, luego, es generador de V.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ -5 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por consiguiente H no es libre en V y, por tanto, no es generador.

La base B de V es, entonces: **B = {(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)}**

b)

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Luego, **dim U = 2** y una base de U puede ser **{(1,2,5,3), (1,1,3,0)}**

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto, **dim V = 2** y una base de V es **{(2,1,4,-3), (3,1,3,-2)}**

Uniendo las bases respectivas de U y de V y eliminando los vectores que dependan de los demás, se

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{matrix}}_{U} & \underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{matrix}}_{V} \end{pmatrix} = 3$$

Luego **dim (U+V)=3** y una base de U+V puede ser:**{(1,2,5,3),(1,1,3,0),(3,1,3, -2)}**

Ya que $\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$

Se verifica que: **dim (U ∩ V)** = dimU + dimV - dim(U+V) = 2 + 2 -3 = **1**
Busquemos una base de U ∩ V.
Un vector genérico de U ∩ V ha de ser combinación lineal de los vectores de la base de U y de los vectores de la base de V simultáneamente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \lambda = 0 \\ \beta - 3\lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Dando a λ un valor cualquiera, por ejemplo λ = 1, y sustituyendo en la expresión de los vectores de U ∩ V, se obtiene (2,1,4,-3).
Luego, U ∩ V es la recta vectorial engendrada por el vector **(2, 1, 4, -3)** que constituye, él mismo, una base de U ∩ V.

c)
Las bases de R^4 tienen 4 vectores, luego, para lograr una base de R^4 hay que añadir un vector linealmente independiente a la base de U+V: **{(1,2,5,3),(1,1,3,0),(3,1,3, -2)}**
Probemos con un vector de la base canónica:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

Una base de R^4 es, entonces: **B' = {(1,2,5,3),(1,1,3,0),(3,1,3, -2),(1,0,0,0)}**

Cambio de base de B a la canónica:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_c\\y_c\\z_c\\t_c\end{pmatrix}$$

Cambio de base de B' a la canónica:

$$\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&1&1&0\\5&3&3&0\\3&0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_c\\y_c\\z_c\\t_c\end{pmatrix}$$

Cambio de base de B a B':

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&1&1&0\\5&3&3&0\\3&0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&1&1&0\\5&3&3&0\\3&0&-2&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}$$

Ecuaciones de cambio de base de B a B':

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-9&-12&-\frac{5}{2}&-7\\3&4&\frac{1}{2}&2\\1&1&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x'=x+y+z+t\\y'=-9x-12y-\frac{5}{2}z-7t\\z'=3x+4y+\frac{1}{2}z+2t\\t'=x+y+\frac{1}{2}z+t\end{cases}}$$

Cambio de base de B' a B:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&1&1&0\\5&3&3&0\\3&0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&1&1&0\\5&3&3&0\\3&0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}$$

Ecuaciones de cambio de base de B` a B:

$$\begin{pmatrix}1&2&5&3\\0&-1&-2&-3\\2&0&0&-2\\-2&-1&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=x'+2y'+5z'+3t'\\y=-y'-2z'-3t'\\z=2x'-2t'\\t=-2x'-y'-3z'+2t'\end{cases}}$$

39.- a) Demostrar que si los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ son *base* de R^3 y el vector $\vec{u}$ es tal que $\vec{u}=\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$ con $\lambda_2 \neq 0$ entonces los vectores $\vec{e}_1, \vec{u}, \vec{e}_3$ son *base* de R^3.

b) Generalizar el resultado anterior: Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ son una base de *un espacio vectorial* V y $\vec{u}=\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n$, con $\lambda_i \neq 0$, entonces los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_{i-1}, \vec{u}, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_n$ son también *base* de V.

Solución:

a) Si $\vec{u} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$ con $\lambda_2 \neq 0$ significa que se puede despejar $\vec{e}_2$, $\vec{e}_2 = -\lambda_2^{-1}\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2^{-1}\vec{u} - \lambda_2^{-1}\lambda_3\vec{e}_3$ resultando que $\vec{e}_2$ es combinación lineal de los vectores $\vec{e}_1, \vec{u}, \vec{e}_3$. Por tanto $\{\vec{e}_1, \vec{u}, \vec{e}_3\}$ es una base de R^3.

b) Si $\vec{u}=\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_i\vec{e}_i + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n$ con $\lambda_i \neq 0$ podemos despejar $\vec{e}_i = -\lambda_i^{-1}\lambda_1\vec{e}_1 - \lambda_i^{-1}\lambda_2\vec{e}_2 . - \ldots - \lambda_i^{-1}\lambda_{i-1}\vec{e}_{i-1} + \lambda_i^{-1}\vec{u} - \lambda_i^{-1}\lambda_{i+1}\vec{e}_{i+1} \ldots \lambda_i^{-1}\lambda_n\vec{e}_n$ resultando que $\vec{e}_i$ es combinación lineal de los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_{i-1}, \vec{u}, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_n$ forman una base de V.

40.- Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una *base* de un *espacio vectorial* E. Demostrar que los n vectores de E siguientes:
$\vec{w}_1 = \vec{v}_1, \vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \dots, \vec{w}_n = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n$ son *base* de E.

Solución:

Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base de E entonces dim E = n.

Consideramos la ecuación vectorial $\lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 + \lambda_3\vec{w}_3 + \dots + \lambda_n\vec{w}_n = \vec{0}$ sustituyendo los vectores $\vec{w}_i$ resulta $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \lambda_3(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) + \dots + \lambda_n(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \dots + \vec{v}_n) = \vec{0}$

desarrollando los paréntesis y agrupando los vectores

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n)\vec{v}_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n)\vec{v}_2 + (\lambda_3 + \dots + \lambda_n)\vec{v}_3 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

que por ser $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ un sistema libre (es una base) todos los escalares de la ecuación vectorial son nulos $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_3 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$ y se cumple que el sistema $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ es libre y su cardinal coincide con la dimensión de E, luego es una nueva base de E.

41.- a) Hallar la suma y la intersección de los *subespacios vectoriales* E y F definidos por los siguientes sistemas generadores:

E=<(1,1,1), (1,0,1), (2,6,2)>

F=<(2,0,1), (1,-1,3), (0,2,-5)>

b) ¿Son E y F *suplementarios*?

c) Sean B_1={(1,1,1), (1,0,1), (0,0,1)} y B_2={(2,0,1), (0,1,0), (1,-1,1)} dos bases de R^3. Hallar el *cambio de base* de B_1 a B_2 y las *coordenadas* respecto de B_1 y de B_2 del vector de *coordenadas* (1,0,0) en la *base canónica*.

Solución:

a) Estudiamos el rango de los vectores que generan respectivamente E y F para hallar dimE y dimF.

$$r\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&6\\1&1&2\end{pmatrix}=2\,;\; r\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&2\\1&3&-5\end{pmatrix}=2$$

Luego dimE = dimF=2. Bases de E y F:

$$E=\langle(1,1,1),\ (1,0,1)\rangle;\ F=\langle(2,0,1),\ (1,-1,3)\rangle$$

Un sistema generador de E+F es el formado por las bases de E y F.
Hallamos la dimensión y una base de E+F:

$$r\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}1&1\\1&0\\1&1\end{matrix}}_{B_E}&\underbrace{\begin{matrix}2&1\\0&-1\\1&3\end{matrix}}_{B_E}\end{pmatrix}=3$$

Luego dim(E+F) = 3⇒ **E+F= R³**.

Estudiamos ahora E∩F.

Ahora bien, al ser dimE+dimF= dim(E+F)+dim(E∩F) ⇒dim(E∩F)= 2 +2 –3 = 1.

Para hallar una base de E∩F hallamos unas ecuaciones implícitas de E y de F respectivamente

$$\begin{vmatrix}1&1&x\\1&0&y\\1&1&z\end{vmatrix}=x-z=0$$

$$\begin{vmatrix}2&1&x\\0&-1&y\\1&3&z\end{vmatrix}=x-5y-2z=0$$

Resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}E\equiv x-z=0\\F\equiv x-5y-2z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=-\dfrac{\alpha}{5}\\z=\alpha\end{cases}$$

Luego $\boxed{E\cap F=\langle(5,-1,5)\rangle}$.

b) E y F no son subespacios suplementarios pues E∩F≠$\{\vec{0}\}$.

c) Designando por (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_c, y_c, z_c) las coordenadas de un vector cualquiera respecto de B_1, B_2, y de la base canónica B_C respectivamente, entonces:

Las ecuaciones de cambio de la base B_1 a B_C son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de cambio de la base B_2 a B_C son:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

En consecuencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Luego las ecuaciones de cambio de la base B_1 a B_2 son:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

operando

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}$$

Las coordenadas de (1,0,0) respecto de B_1 son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

luego **(0,1,-1)** son las coordenadas respecto de B_1.

Las coordenadas de (1,0,0) respecto de B_2 son:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

luego **(1,-1,-1)** son las coordenadas respecto de B_2.

42.- En R^3 se considera el *subespacio vectorial* S engendrado por los vectores {(1,0,1), (1,1,0), (1,-1,2)} y el *hiperplano* H de ecuación {x + y = 0} respecto de la *base canónica* de R^3.

Se pide:

1. *Ecuaciones paramétricas e implícitas* de S y de H

2. Obtener las *bases* de $S \cap H$ y S+H

***Solución*:**

1) Para S:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

una base {(1,1,0), (1,0,1)}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{array}\right.}$$ ecuaciones paramétricas de S

ecuación implícita $\boxed{x=y+z}$, o bien **x-y-z=0**.

Para H:

x+y=0 tenemos una ecuación cartesiana o implícita y de aquí se deduce que dim (H)=2 y que una base de H puede ser {(1,-1,0), (0,0,1)}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \beta \end{array}\right.}$$ ecuaciones paramétricas de H

2)

Intersección S ∩ H

Para sacar las ecuaciones implícitas basta unir las de S y H

$$\left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$$ que, como se ve son independientes y forman las ecuaciones de S ∩ H

luego dim (S ∩ H) = dim (R^3**)** – nº ecuaciones = 3-2 = 1

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right\}$$ ecuaciones paramétricas de (S ∩ H) y una posible base es cualquier solución particular, por ejemplo, **(1,-1,2)**.

Suma S+H

Uniendo las dos bases {(1,0,1), (1,1,0), (0,0,1), (1,-1,0)} se obtiene un sistema generador de S+H, pero que no puede ser base de S+H, ya que S+H= R^3, sin embargo, **{(1,0,1), (1,1,0), (0,0,1)}** es una base de S+H.

43.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) Sea F el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores fila de la matriz A. Hallar una *base* de F.

c) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de F.

d) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de F.

e) Sea C el subespacio vectorial de R^3 engendrado por los vectores columna de la matriz A. Hallar una *base* de C.

f) Encontrar una relación de dependencia lineal existente entre los vectores columna de la matriz A.

g) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de C.

h) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de C.

i) ¿F y C son *hiperplanos* distintos?

j) Calcular una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de F∩C.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = 2;$ **Rango(A)=2**

b) **Base de F: {(1,1,0),(0,-2,2)}**

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\beta$

d) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & -2 \\ z & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2y - 2z = 0;$ **x-y-z=0**

e) **Base de C: {(1,0,1),(1,-2,-3)}**

f) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$

Primera columna menos segunda columna es igual a la tercera columna

g) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\beta$

h) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & -2 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2x + 4y - 2z = 0$; **x+2y-z=0**

i) **Sí, las ecuaciones implícitas no son proporcionales**

j) $\left.\begin{array}{l} F \equiv x - y - z = 0 \\ C \equiv x + 2y - z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$ ecuaciones paramétricas del subespacio **F∩ C**

Base de F ∩ C: {(1,0,1)}

44.- Sea G el subconjunto de vectores de .4 formado por los vectores {(2,3,2,0), (4,6,4,1), (1,0,1,0), (0,0,0,6)} y sea S el *subespacio vectorial* generado por dichos vectores. Se pide:

a) Obtener una *base* de S

b) *Ecuaciones paramétricas e implícitas* de S

c) Valores de los *parámetros* a y b para que los vectores (a,a,2,2) y (1,b,1,b) pertenezcan ambos a S.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3$$

una base puede ser **B {(2,3,2,0),(1,0,1,0),(0,0,0,6)}**

b)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ecuaciones paramétricas

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 0 \\ y & 3 & 0 & 0 \\ z & 2 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 18x - 18z = 0$$

x - z = 0; ecuación implícita.

c)

(a,a,2,2) debe ser a=2 y (1,b,1,b) cualquiera que sea b real.

45.- Se consideran en R^4 los subespacios vectoriales S = < (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)> y T = < (1, 1 ,0, 1), (1, 2, -1, 2), (3, 5, -2, 5)>
a) Hallar la *dimensión* y unas *ecuaciones implícitas* del subespacio S + T.
b) Hallar la *dimensión* y unas *ecuaciones paramétricas* del subespacio S ∩ T.

Solución:

a) La dimensión de S es 2 ya que los vectores no son proporcionales. Los dos vectores forman una base de S.

La dimensión de T es también 2 ya que (3,5,-2,5)=(1,1,0,1)+2(1,2,-1,2). Así pues, tomamos como vectores de una base de T los dos primeros vectores.

S+T está generado por la unión de los vectores de la base de S y de T

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

De aquí obtenemos que una base de S+T es $\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)(1,1,0,1)\}$ y $\boxed{\mathbf{dim(S+T)=3}}$.

Una ecuación de S+T es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{y - t = 0}$.

b) Sabemos que se verifica la relación

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \mathrm{Dim}(S \cap T) .$$

Por tanto, $3 = 2 + 2 - \mathrm{Dim}(S \cap T) \Rightarrow \boxed{\mathrm{Dim}(S \cap T) = 1}$.

Un vector x pertenece a la intersección si:

$$\alpha(1,\ 1,\ 1,\ 1) + \beta(1,\ -1,\ 1,\ -1) = \lambda(1,\ 1,\ 0,\ 1) + \mu(1,\ 2,\ -1,\ 2)$$

resolviendo el sistema queda:

$$\boxed{(\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu) = \left(-\frac{1}{2}t,\ -\frac{1}{2}t,\ 2t,\ t\right)}.$$

46.- Dadas las bases $B_1 = \left\{\vec{u}_1 = (1,0,0), \vec{u}_2 = (1,1,0), \vec{u}_3 = (1,0,-1)\right\}$ **y** $B_2 = \left\{\vec{v}_1 = (2,1,0), \vec{v}_2 = (3,2,-1), \vec{v}_3 = (0,0,1)\right\}$ **del espacio vectorial** R^3**. Se pide:**

a) Ecuación matricial del *cambio de base* de B_1 **a la base** B_2**.**

b) Ecuación matricial del *cambio de base* de B_2 **a la base** B_1**.**

c) Si el vector tiene *coordenadas* (1,1,1) respecto de la base B_1 **¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de la base** B_2**?**

Solución:

Relaciones entre los vectores de la base $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y la base canónica $B_c = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$(\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \vec{u}_3) = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Relaciones entre los vectores de la base $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ y la base canónica $B_c = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$(\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3) = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Todo vector del espacio vectorial se puede escribir respecto de las tres bases:

$$(\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \vec{u}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

Sustituyendo

$$(\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

Simplificando

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

a) Ecuación matricial del cambio de base de B_1 **a la base** B_2**.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}$$

b) Ecuación matricial del cambio de base de B_2 **a la base** B_1**.**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}$$

c) Si un vector tiene coordenadas (1,1,1) respecto de la base B_1 ¿cuáles son sus coordenadas respecto de la base B_2?

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ $(3,-1,-2)$ son las coordenadas respecto de la base B_2.

47.- Sea el subespacio vectorial F de R^4 generado por los siguientes vectores:

$\vec{u}_1 = (1,1,2,0)$; $\vec{u}_2 = (2,-1,0,1)$; $\vec{u}_3 = (5,-1,2,2)$. Se pide:

a) Una *base* de F.

b) *Ecuaciones paramétricas* de F.

c) Una *base* B' de R^4 que contenga la *base* de F obtenida en el apartado a).

d) Las ecuaciones del *cambio de base de la canónica* B_c de R^4 a la base B' (del apartado anterior).

Solución:

a) $\dim F = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$.

Una base de F puede ser $\boxed{\mathbf{B=\{}\vec{u}_1 = (1,1,2,0)\,\mathbf{;}\,\vec{u}_2 = (2,-1,0,1)\,\mathbf{\}}}$

b) Ecuaciones paramétricas de F $\boxed{\begin{cases} x_1 = t + 2s \\ x_2 = t - s \\ x_3 = 2t \\ x_4 = s \end{cases}}$.

c) Una base B' de R^4 puede ser $\boxed{\mathbf{B'=\{}\vec{u}_1 = (1,1,2,0)\,\mathbf{;}\,\vec{u}_2 = (2,-1,0,1)\,\mathbf{;}\,\vec{e}_1 = (1,0,0,0);\ \vec{e}_2 = (0,1,0,0)\,\mathbf{\}}}$

puesto que el rango de la matriz formada con los 4 vectores es 4.

d) Tenemos que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}$

48.- En el espacio vectorial real R^4, se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$S = \{ \vec{u} = (2,3,1,-5), \vec{v} = (0,2,-1,3), \vec{w} = (4,0,5,-19), \vec{t} = (-2,1,-3,11) \}$

$T = \{ \vec{p} = (2,5,0,-1), \vec{q} = (2,1,2,-7) \}$

Sean F y G los subespacios engendrados por S y T, respectivamente, es decir: $F = \langle S \rangle$ y $G = \langle T \rangle$.

a) Hallar los *rangos* de S y de T.

b) Hallar a y b para que el vector (2, a, 3, -b) $\in F$.

c) Dar unas *ecuaciones implícitas* de F y de G.

d) Calcular la *dimensión* y una *base* de cada uno de los subespacios siguientes: F, G, F+G y $F \cap G$. ¿Es F+G *suma directa*?

e) Hallar una *base* B de $\Re^4$ que contenga a los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}\}$. Escribir las ecuaciones de *cambio de base* de B a la *base canónica* y de la *base canónica* a B.

Solución:

a) $\text{rango}(S) = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ -5 & 3 & -19 & 11 \end{pmatrix} = 2$; $\boxed{\textbf{Rango de S: 2}}$

$\text{rango}(T) = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} = 2$; $\boxed{\textbf{Rango de T: 2}}$, ya que p y q son linealmente independientes.

b) Hallar a y b para que (2, a, 3, -b) pertenezca a F:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 3 \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\beta \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 11 \\ \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases} \qquad \boxed{\mathbf{a = -1 \;;\; b = 11}}$$

c) Ecuaciones implícitas de F:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{2} \\ \beta = \dfrac{y}{2} - \dfrac{3x}{4} \\ z = \dfrac{x}{2} - \left(\dfrac{y}{2} - \dfrac{3x}{4}\right) = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{1}{2}y \\ t = -5\dfrac{x}{2} + 3\left(\dfrac{y}{2} - \dfrac{3x}{4}\right) = -\dfrac{19}{4}x + \dfrac{3}{2}y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} z = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{1}{2}y \\ t = -\dfrac{19}{4}x + \dfrac{3}{2}y \end{cases}}$$

Ecuaciones implícitas de G:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{x}{8} + \frac{y}{4} \\ \beta = \frac{5x}{8} - \frac{y}{4} \\ z = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y \\ t = -\frac{17}{4}x + \frac{3}{2}y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} z = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y \\ t = -\frac{17}{4}x + \frac{3}{2}y \end{cases}}$$

d)

dim F =2, pues rango(T)=2. Una base de F es **{(2,3,1,-5),(0,2,-1,3)}**.
dim G =2, pues rango(S)=2. Una base de G es **{(2,5,0,-1),(2,1,2,-7}**.

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ \underbrace{-5 \quad 3}_{B_F} & & \underbrace{-1 \quad -7}_{B_G} & \end{pmatrix} = 3$$

Luego, **dim (F+G) =3**. Una base de F+G es: **{(2,3,1,-5),(0,2,-1,3), (2,5,0,-1)}**
dim(F ∩ G) = dim(F) + dim(G) - dim(F+G)=2+2-3= 1
Ecuaciones de F∩G:

$$\left.\begin{array}{l} F \equiv \begin{cases} z = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y \\ t = -\frac{19}{4}x + \frac{3}{2}y \end{cases} \\ G \equiv \begin{cases} z = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y \\ t = -\frac{17}{4}x + \frac{3}{2}y \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2}{3}t \\ z = -\frac{1}{3}t \end{cases}$$

Una base de F∩G: **{(0, 2, -1, 3)}**
F+G **no es suma directa** pues F∩G no se reduce al vector nulo.

e) Base de R^4 que contenga a $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}\right\}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \text{ Base B de } R^4\text{: } \boxed{\left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}, (1,0,0,0)\right\}}$$

Ecuaciones de cambio de base de B a la canónica:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ t_c \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_c = 2x + 2z + t \\ y_c = 3x + 2y + 5z \\ z_c = x - y \\ t_c = -5x + 3y - z \end{cases}}$$

Ecuaciones de cambio de base de la canónica a B:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ t_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{17}{5} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{22}{5} & -1 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{19}{5} & 1 \\ 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ t_c \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -\frac{1}{5}y_c - \frac{17}{5}z_c - t_c \\ y = -\frac{1}{5}y_c - \frac{22}{5}z_c - t_c \\ z = \frac{2}{5}y_c + \frac{19}{5}z_c + t_c \\ t = x_c - \frac{2}{5}y_c - \frac{4}{5}z_c \end{cases}}$$

49.- Sea A = {(1, 3, -1, 4), (3, 8, -5, 7), (2, 9, 4, 23)} ⊂ R^4. Se pide:
a) Estudiar si A es un *sistema libre o ligado*.
b) Si F es el subespacio vectorial de R^4 generado por A, hallar a partir de A, una *base* B_F, unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* de F.
c) Hallar una *base* B_S de un subespacio S, que sea *suplementario* de F, tal que B_F ∪ B_S sea una *base escalonada* de R^4.
d) Sean B = {(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 2, 3)} y B' = {(-1, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 1)} ⊂ R^3. Comprobar que B y B' son *bases* de R^3 y hallar las ecuaciones del cambio de B a B'.

Solución:

a) $\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \\ -1 & -5 & 4 \\ 4 & 7 & 23 \end{pmatrix} = 2$

A es un sistema ligado, el mayor número de vectores linealmente independientes es 2.

b)

Una base **B_F={(1,3,-1,4),(3,8,-5,7)}** del subespacio vectorial F.
Ecuaciones paramétricas de subespacio F:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}\beta$$

Unas ecuaciones cartesianas o implícitas se obtienen eliminando los parámetros:

$$\begin{cases} z = 2y - 7x \\ t = 5y - 11x \end{cases}$$

c) Una base **B_S={(0,0,1,0),(0,0,0,1)}** del subespacio vectorial S suplementario del F.
Para conseguir una base escalonada es suficiente con poner un vector de F cuya primera coordenada sea cero: **3(1,3,-1,4)-(3,8,-5,7)=(0,1,2,5)**
B_F ∪ B_S= ={(1,3,-1,4),(0,1,2,5),(0,0,1,0),(0,0,0,1)} base escalonada de R^4.

Efectivamente, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se trata de una matriz triangular.

d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

es base de R^3, por ser 3 vectores linealmente independientes de R^3.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

es base de R^3, por ser 3 vectores linealmente independientes de R^3.

Relacionamos los cambios de base de B y B' a la base canónica, ya que los vectores de cada base vienen referidos a la base

canónica $\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x' = -x - y - z \\ y' = \frac{1}{2}x + y + z \\ z' = \frac{3}{2}x + y + 3z \end{cases}}$$ son las ecuaciones del cambio de base de B a B'-

50.- Sean los subespacios vectoriales:

$$E = \{(\alpha+\gamma, \beta+\gamma, \alpha+\beta+2\gamma) / \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\};$$

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$$

Se pide:

a) *Bases* **de E, F, E+F y $E \cap F$.**

b) *Ecuaciones implícitas* **de $E \cap F$.**

Solución:

a) Para E:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \text{ una base } \{(1,0,1), (0,1,1)\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + \mu \end{array}}\right. \text{ ecuaciones paramétricas de E.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = -x - y + z = 0 \text{ ecuación implícita, o bien } \boxed{\mathbf{x+y-z=0}}.$$

dim E=2; **B_E={(1,0,1),(0,1,1)}** base de E.

Para F:

x-y+2z=0 tenemos una ecuación cartesiana o implícita y dim (F)=2. Despejando x=y-2z

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{l} x = \lambda - 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}}\right. \text{ ecuaciones paramétricas de F.}$$

dim F=2; **B_F={(1,1,0),(-2,0,1)}** base de F.

b) Ecuaciones implícitas o cartesianas de $E \cap F$**:**

Intersección E ∩ F

Para sacar las ecuaciones implícitas basta unir las de E y F

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$ que, como se ve son independientes y forman las ecuaciones de E ∩ F

luego dim (E ∩ F) = dim ($\mathbb{R}^3$**)** – nº ecuaciones = 3-2 = 1

Resolviendo el sistema. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\alpha \Rightarrow$ **$B_{E \cap F}$={(1,-3,-2)}** base de $E \cap F$**,** es cualquier solución particular del sistema.

dim (E+F) = dim E+ dim F - dim $E \cap F$ =2+2-1=3

E+F=$\mathbb{R}^3$. La base canónica **B_c={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)}** **es una base de E+F**.

51.- Sea el vector $\vec{a}=(1,2,3)$ expresado en la *base* $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ del espacio vectorial R^3. Hallar las *coordenadas* de $\vec{a}$ en la *base* $B'=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, sabiendo que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_1 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \end{array}\right\}$$

Solución:

Directamente del enunciado tenemos las ecuaciones del cambio de base B' a B:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En particular, para el vector (1,2,3):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{15}{4} \\ -\frac{13}{4} \end{pmatrix}$$

Siendo sus coordenadas **(-5/2,-15/4,-13/4)** en la base B'.

52.- Dado el espacio vectorial R^3:

a) Hallar una *base* del subespacio vectorial generado por los vectores: $S=\left\{\vec{a}=(2,4,0),\vec{b}=(1,2,1),\vec{c}=(3,2,1),\vec{d}=(3,4,1)\right\}$ y expresar el vector $\vec{d}$ en dicha base.

b) Encontrar un *vector* común al subespacio E generado por los vectores $\vec{u}_1=(1,2,3)$ y $\vec{u}_2=(3,2,1)$ y al subespacio F generado por los vectores $\vec{v}_1=(1,0,1)$ y $\vec{v}_2=(3,4,3)$.

c) Indicar si los *subespacios vectoriales* $H=\{(x,y,z)/2x+y-z=0;x+y=0\}$ y $G=\{(\alpha-\beta+2\gamma,\beta-\alpha-2\gamma,\alpha-\beta+2\gamma)/\alpha,\beta,\gamma\in R\}$ son iguales.

d) Sean $B=\{\vec{u}=(2,1,0),\vec{v}=(-1,0,1),\vec{w}=(0,1,-2)\}$ y $B'=\{\vec{u}'=(0,1,1),\vec{v}'=(-1,0,0),\vec{w}'=(2,0,1)\}$. Hallar la *matriz del cambio de base* de B a B'.

Solución:

a) Una base

$$\text{rango}\begin{pmatrix}2&1&3&3\\4&2&2&4\\0&1&1&1\end{pmatrix}=3;\text{ ya que }\begin{vmatrix}2&1&3\\4&2&2\\0&1&1\end{vmatrix}=8\neq 0$$

Una base puede ser la canónica **{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)}** del espacio vectorial R^3, puesto que S genera R^3.

Y **expresar el vector** $\vec{d}$ **en dicha base.**
Al escoger la base canónica el vector queda igual **(3,4,1)**

b) Un vector común

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\alpha+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}\mu\Rightarrow\alpha=\beta=\mu$$

El vector **(1,1,1)** o cualquier otro proporcional incluido el vector nulo.

c)

$$\left.\begin{array}{l}2x+y-z=0\\x+y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\alpha$$. Una base de F: {(1,-1,1)}

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\lambda$$. Una base de G: {(1,-1,1)}

Sí **H = G son subespacios vectoriales iguales**, son de igual dimensión y coinciden las bases.

d) Cambio de base de B a B'

Relacionamos los cambios de base de B y B' a la base canónica, ya que los vectores de cada base vienen referidos a la base

canónica $\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Matriz del cambio de base de B a B'

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$$

53.- a) Dados los *subespacios vectoriales* de R^4 siguientes:

$$F \equiv \begin{cases} x = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 - \lambda_2 \\ z = \lambda_2 \\ t = -\lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in R \qquad G \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - t = 0 \end{cases}$$

Se pide calcular sendas *bases* de F, G, F + G, F ∩ G.

b) Dadas las bases de R^3 siguientes:

B = {(1,1,1), (1,1,0), (1,0, 0)} y B' = {(2,1,2), (1,0,3), (-1,4,2)}

Se pide hallar la ecuación matricial del *cambio de la base* B a la base B'.

Solución:

a)

El subespacio F viene dado por unas ecuaciones paramétricas, luego es inmediato obtener un sistema generador F=**<(2,1,0,-1), (1,-1,1,-1)>**, se observa además que estos dos vectores son linealmente independientes pues no son proporcionales, en consecuencia constituyen una base de F.

El subespacio G viene dado por dos ecuaciones implícitas, por lo tanto para obtener una base se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 2\alpha + \beta \\ t = \alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\beta \Rightarrow$$

G=<(1,0,2,1), (0,1,1,2)>

Un sistema generador de F+G es el constituido por las bases de F y G:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \underbrace{-1 \quad -1}_{B_F} & & \underbrace{1 \quad 2}_{B_G} & \end{pmatrix} = 3$$

Luego F+G=**<(2,1,0,-1), (1,0,2,1), (0,1,1,2)>**

El subespacio F∩G está determinado por unas ecuaciones implícitas de F y G. Tenemos unas ecuaciones implícitas de G y nos falta obtener unas ecuaciones implícitas de F

$$F \equiv \begin{cases} x = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 - \lambda_2 \\ z = \lambda_2 \\ t = -\lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = y + z \\ \lambda_2 = z \\ x = 2(y+z) + z \\ t = -(y+z) - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z \\ t = -y - 2z \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} F \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - t = 0 \end{cases} \\ G \equiv \begin{cases} x = 2y + 3z \\ t = -y - 2z \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\lambda$$

, Luego F∩G=**<(1,-1,1,-1)>**

b) Llamamos (x,y,z) a las coordenadas respecto de B; (x’,y’,z’) a las coordenadas respecto de B’ y (x_c,y_c,z_c) a las coordenadas respecto de B_c, entonces :

Relacionamos los cambios de base de B y B’ a la base canónica, ya que los vectores de cada base vienen referidos a la base canónica

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Matriz del cambio de base de B a B'

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{21} & \frac{17}{21} & \frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Y la ecuación matricial del cambio de base de B a B’:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{13}{21} & \frac{17}{21} & \frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

54.- En R^4 consideramos los subespacios vectoriales:

$$A = \{(x, y, z, t) \in R^4 \text{ tales que } x-y = z-t = 3z-x = 0\}$$

$$B = \langle(3,1,2,0),\ (1,1,0,-1),\ (3,1,3,-2),\ (1,1,-1,1)\rangle$$

$$C = \{(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\gamma, \gamma, \beta) \in R^4 \text{ tales que } \alpha,\beta,\gamma \in R\}$$

Se pide:

b) Dimensión y una base del subespacio $B \cap C$.

c) Dimensión y una base del subespacio $A+C$.

d) Determinar un subespacio A' tal que $A \oplus A' = R^4$.

Solución:

a) El sistema generador de B es un sistema ligado, ya que $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, y se cumple que $r\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 3$. Calculamos la ecuación implícita de B.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 2 & 0 & 3 & z \\ 0 & -1 & -2 & t \end{vmatrix} = -5x+7y+4z+2t = 0$$

A partir de las ecuaciones paramétricas de C: $\begin{cases} x = \alpha+\beta+\gamma \\ y = \alpha+2\gamma \\ z = \gamma \\ t = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\gamma \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & t \end{vmatrix} = x-y+z-t = 0$$

Los vectores del subespacio $B \cap C$ deben verificar las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} -5x+7y+4z+2t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{11}{2}\alpha+\dfrac{5}{2}\beta \\ y=-\dfrac{9}{2}\alpha+\dfrac{3}{2}\beta \\ z=\alpha \\ t=\beta \end{cases}$$, por tanto la **dim(B ⋂ C)=2** y una base de B ⋂ C es

$\{(-11,-9,2,0),(5,3,0,2)\}$.

b) De las ecuaciones cartesianas del subespacio A obtenemos que se trata de un subespacio vectorial de dimensión 1 con una posible base {(3,3,1,1)}.

Un sistema generador de A+C está formado por la unión de las bases de A y de C. Los cuatro vectores {(3, 3, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 2, 1 ,0)} forman un sistema generador y un sistema ligado, por tanto, **A +C =C**

Una posible base de A+C **{(1, 1, 0, 0), (1,0,0,1), (1, 2, 1,0)}**

c) Utilizamos 3 vectores de R^4 que sean linealmente independientes con los de A. Así pues

$B_{A'}$={(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0,1, 0)}. $\mathbf{A' = \{(\alpha,\beta,\gamma,0) \in R^4 \text{ tales que } \alpha,\beta,\gamma \in R\}}$

55.- Encontrar los *escalares* que permiten escribir el vector de R^4, (8, 4, 2, 0) como *combinación lineal* de los vectores (1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (2, 1, 1, 0).

Solución:

De la combinación lineal entre los vectores dados,

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\\2\\0\end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3&=8\\2\lambda_2+\lambda_3&=4\\\lambda_3&=2\end{aligned}$$

Cuya solución $\boxed{\lambda_1=3,\ \lambda_2=1 \text{ y } \lambda_3=2}$ son los escalares pedidos.

56.- Se consideran los vectores $\vec{a}_1=(2,1,0,0)$, $\vec{a}_2=(1,1,-1,0)$, $\vec{a}_3=(3,1,1,0)$ y $E=<\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3>$ y $G=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \ / \ x_2=-x_3\}$ *subespacios vectoriales* de R^4. Se pide: a) *Dimensión* y *bases* de E y G. b) *Dimensión* y una *base* de un suplementario de E que se denominará F. c) *Ecuaciones implícitas* de E. d) *Dimensión* y una *base* de $E \cap G$. e) Formar una nueva *base* de R^4, B' formada por los vectores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y los restantes vectores pertenecientes a G. f) Encontrar las *coordenadas de los vectores* $\vec{a}_1$ y $\vec{b}=2\vec{e}_1+2\vec{e}_2+2\vec{e}_3+2\vec{e}_4$ en la base B', siendo $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ *la base canónica*.

Solución:

a) $\boxed{\text{Dim(E)}}=\text{rango}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=\text{rango}\begin{pmatrix}2&1&3\\1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\boxed{2} \Rightarrow \boxed{B_E=\{(2,1,0,0),(1,\ 1,-1,\ 0)\}}$.

$\boxed{\text{Dim(G)=4-1=3}} \Rightarrow \boxed{B_G=\{(1,0,0,0),(0,\ 1,\ -1,\ 0),(0,0,0,1)\}}$

b) $\boxed{B_F=\{(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}}$ es una base del subespacio suplementario de E, ya que sus vectores no pertenecen a subespacio E y la dimensión de F es dimR^4-dimE= $\boxed{2}$.

c) rango $\begin{pmatrix}x_1&2&1\\x_2&1&1\\x_3&0&-1\\x_4&0&0\end{pmatrix}=2 \Rightarrow \begin{cases}\begin{vmatrix}x_1&2&1\\x_2&1&1\\x_3&0&-1\end{vmatrix}=\boxed{-x_1+x_3+2x_2=0}\\ \begin{vmatrix}x_2&1&1\\x_3&0&-1\\x_4&0&0\end{vmatrix}=\boxed{x_4=0}\end{cases}$.

d) Los vectores de $E \cap G$ verifican el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}E \equiv \begin{cases}-x_1+x_3+2x_2=0\\x_4=0\end{cases}\\ G \equiv x_2+x_3=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}x_1=\lambda\\x_2=\lambda\\x_3=-\lambda\\x_4=0\end{array}.$$

Las tres ecuaciones son linealmente independientes, por tanto, $\boxed{\text{Dim}(E \cap G)=4-3=1}$ y una base de $E \cap G$ es $\boxed{B_{E\cap G}=\{(1,\ 1,\ -1,\ 0)\}}$.

e) $\boxed{B'=\{\vec{a}_1=\ (2,1,0,0),\vec{a}_2=(1,\ 1,\ -1,\ 0),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}}$

f) La matriz de cambio de base es $P_{B'\to B}=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=Q$. $\vec{a}_1=(2,1,0,0)_B=\boxed{(1,0,0,0)_{B'}}$.

$\vec{b}=(2,2,2,2)$ en la base canónica y $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}=Q^{-1}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\\2\end{pmatrix}$, por tanto, $\boxed{\vec{b}=(4,-2,-4,2)}$ en la base B'.

57.- En el espacio vectorial R^3 se tienen las siguientes *bases*:

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $B' = \{(1,1,0), (0,-1,0), (1,0,1)\}$ y

$B^* = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Sean (x, y, z), (x', y', z') y (x^*, y^*, z^*) las *coordenadas de un vector* en las *bases* B, B' y B^* respectivamente.

a.- Escribir la ecuación matricial del *cambio de base* de B a B'.

b.- Sabiendo que $\begin{cases} x = x^* + z^* \\ y = y^* - z^* \\ z = -x^* + z^* \end{cases}$, dar *las coordenadas de los vectores* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ respecto de B y de B'.

Solución:

a) La expresión matricial que relaciona las coordenadas de un vector respecto de las dos bases es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'}$$

y la ecuación del cambio de base de B a B' es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B}$$

b) Disponemos como dato las ecuaciones del cambio de base de B^* a B. Su expresión matricial será:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}_{B^*}$$

Por tanto, las columnas de la matriz son las coordenadas de los vectores de B^* en B, es decir:

$$\boxed{B^* = \{(1,0,-1)_B, (0,1,0)_B, (1,-1,1)_B\}}$$

Si utilizamos la expresión del cambio de base calculada en el apartado anterior, podremos cambiar de base a cada uno de los vectores de la base B^*.

$$\boxed{B^* = \{(2,2,-1)_{B'}, (0,-1,0)_{B'}, (0,1,1)_{B'}\}}$$

58.- Se considera un subespacio F de ecuaciones $\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$.

a.- Obtener una *base* de F.

b.- Si G es el subespacio generado por el sistema $\{(1,1,-1),\ (1,1,0)\}$,

b.1.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio G.

b.2.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio $F \cap G$.

Solución:

a.- Las ecuaciones paramétricas de F son $\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$ por lo que la dimensión de F es 2 y una base de F es $\boxed{B_F = \{(1,1,0),(-1,0,1)\}}$. Siendo $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ x - y + z = 0$ una ecuación cartesiana del subespacio F.

b.- Un sistema generador de G es $\langle (1,1,-1),(1,1,0) \rangle$, la dimensión de G es 2.

b.1.- Unas ecuaciones paramétricas son $\boxed{\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\alpha \end{cases}}$ y unas ecuaciones cartesianas $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x - y = 0}$

b.2.- Los vectores de $F \cap G$ deben satisfacer las ecuaciones cartesianas de F y G, por tanto, serán solución del sistema: $\begin{matrix} x - y + z = 0 \\ x - y \quad\ \ = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = y \\ z = 0 \end{matrix}}$ son las ecuaciones cartesianas de $F \cap G$ y unas ecuaciones paramétricas son: $\boxed{\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases}}$

59.- En el espacio vectorial R^3 se tienen las siguientes bases:

$B = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $B' = \{ (1,0,1), (1,1,0), (0,-1,0) \}$ y

$B^* = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Sean (x, y, z), (x', y', z') y (x^*, y^*, z^*) las *coordenadas de un vector* en las *bases* B, B' y B^* respectivamente.

a.- Escribir la ecuación matricial del *cambio de base* de B a B'.

b.- Sabiendo que $\begin{cases} x = y^* + z^* \\ y = x^* - z^* \\ z = -y^* + z^* \end{cases}$, dar las *coordenadas de los vectores* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ respecto de B y de B'.

Solución:

a) La expresión matricial que relaciona las coordenadas de un vector respecto de las dos bases es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'}$$

y la ecuación del cambio de base de B a B' es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B}$$

b) Disponemos como dato de las ecuaciones del cambio de base de B^* a B. Su expresión matricial será:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}_{B^*}$$

Por tanto, las columnas de la matriz son las coordenadas de los vectores de B^* en B, es decir:

$$\boxed{B^* = \{ (0,1,0)_B, (1,0,-1)_B, (1,-1,1)_B \}}$$

Si utilizamos la expresión del cambio de base calculada en el apartado anterior, podremos cambiar de base a cada uno de los vectores de la base B^*.

$$\boxed{B^* = \{ (0,0,-1)_{B'}, (-1,2,2)_{B'}, (1,0,1)_{B'} \}}$$

60.- Se considera un subespacio F de ecuaciones $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha - \beta \\ z = \beta \end{cases}$.

a.- Obtener una *base* de F.

b.- Si G es el subespacio generado por el sistema $\{(1,-1,-1),\ (1,2,0)\}$,

b.1.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio G.

b.2.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio $F \cap G$.

Solución:

a.- Las ecuaciones paramétricas de F son $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha - \beta \\ z = \beta \end{cases}$ por lo que la dimensión de F es 2 y una base de F es $\boxed{B_F = \{(1,1,0),(0,-1,1)\}}$. Siendo $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ x - y - z = 0$ una ecuación cartesiana del subespacio F.

b.- Un sistema generador de G es $\langle (1,-1,-1),(1,2,0) \rangle$, la dimensión de G es 2.

b.1.- Unas **ecuaciones paramétricas son** $\boxed{\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = -\alpha + 2\beta \\ z = -\alpha \end{cases}}$ y unas **ecuaciones cartesianas**

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & -1 & 2 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{2x - y + 3z = 0}$$

b.2.- Los vectores de $F \cap G$ deben satisfacer las ecuaciones cartesianas de F y G, por tanto, serán solución del sistema:

$\begin{matrix} x - y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 4\alpha \\ y = 5\alpha \\ z = -\alpha \end{cases}}$ es la ecuación paramétrica de $F \cap G$ y unas ecuaciones cartesianas son: $\boxed{\begin{matrix} x - y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{matrix}}$

61.- En un espacio vectorial V, sea la base canónica B = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Se considera el subespacio S_1 de ecuación cartesiana en x = y-z.

a) Obtener una *base* de S_1 formada por *vectores unitarios*.

b) Si S_2 es el subespacio engendrado por el sistema $\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$, hallar unas *ecuaciones paramétricas* y *cartesianas* del subespacio S_2.

c) Hallar una *base* de cada uno de los *subespacios vectoriales* $S_1 \cap S_2$ y S_1+S_2.

Solución:

a) $\boxed{S_1}$

Ecuación cartesiana $x = y - z$. Dimensión : dim S_1 = 3-1=2

Ecuación. paramétrica $\left.\begin{array}{l} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \quad\ \beta \end{array}\right\}$.

Base unitaria $B_{S_1} = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\right\}$.

b) $\boxed{S_2}$

Sistema generador $\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$, como son linealmente independientes, forman base de S_2.

Base de S_2=$\{(1,\ 1,\ -1),\ \ (1,\ 1,\ 0)\}$

Ec. paramétrica $\left.\begin{array}{l} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\alpha \end{array}\right\}$. Ec. cartesiana $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{x - y = 0}$, para todo valor de z.

c) $\boxed{S_1 \cap S_2}$

Ecuación cartesiana de $S_1 \cap S_2$: $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = y \\ z = 0 \end{array}\right\}$.

Dimensión dim $S_1 \cap S_2$=3-2=1. Base de $S_1 \cap S_2$, $\boxed{\{(1,\ 1,\ 0\}}$.

$\boxed{S_1 + S_2}$

Sistema generador de $B_{S_1+S_2} = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ (1,1,-1),(1,1,0)\right\}$, y rango de $B_{S_1+S_2}$ =3, por tanto,una $\boxed{\text{base de } S_1 + S_2 \text{ es } B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}$.

62.- Dado el espacio vectorial R^4 consideremos los *subespacios*:

$V_1 = \langle(1, 2, 0, 1)\rangle$

$V_2 = \{(x, y, z, t) \;/\; x-y+z+t = 0,\; y-z = 0\}$

$$V_3 = \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \mu \end{cases}$$

a) Hallar una *base* de cada uno de los *subespacios* anteriores.

b) ¿Pertenece el vector v = (2, 4, 0, 2) a V_1 ó V_2 ó V_3? En caso afirmativo calcular sus *coordenadas* respecto de la *base* correspondiente obtenida en el apartado a).

Solución

a) Base de V_1: $\boxed{\{(1,2,0,1)\}}$

Cálculo base de V_2

Ec. Cartesianas $\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow$

Ec. Paramétricas: $\begin{cases} -x+y-z-t=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+0-t=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=\mu \\ t=-\lambda \end{cases}$

Base de V_2: $\boxed{\{(1,0,0,-1),(0,1,1,0)\}}$

Cálculo base de V_3

Con las ecuaciones paramétricas, calculamos un sistema generador, dando a λ μ γ los valores siguientes: $\lambda=1$ $\mu = 0$ $\gamma = 0$; $\lambda= 0$ $\mu = 1$ $\gamma=0$; $\lambda = 0$ $\mu = 0$ $\gamma= 1$.

S = $\boxed{\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}}$

¿Es base? Para ello calculamos el rango:

Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ = 3. Luego los tres vectores son linealmente independientes. Por tanto, el sistema S es una base del subespacio V_3

b) **¿ $\vec{v} = (2, 4, 0, 2)$ pertenece a V_1?**

$\vec{v} = (2, 4, 0, 2)$ **pertenece al subespacio V_1** ya que es proporcional.

Es decir: $\vec{v} = (2, 4, 0, 2) = 2\,(1, 2, 0, 1)$.

¿ $\vec{v} = (2, 4, 0, 2)$ pertenece a V_2?

Sustituimos las componentes del vector $\vec{v}$ en las ecuaciones que define el subespacio V_2. Si las coordenadas del vector $\vec{v}$ cumplen dichas ecuaciones, entonces el vector $\vec{v}$ pertenece a dicho subespacio.

Primera ecuación:

$x - y + z + t = 0$, 2-4+0+2 =0 cumple esta ecuación.

Segunda ecuación:

$y - z = 0$, 4-0 $\neq$ 0 No cumple.

Luego el vector $\vec{v}$ no pertenece al subespacio V_2

¿ $\vec{v} = (2, 4, 0, 2)$ **pertenece a V_3?**

El vector $\vec{v}$ pertenece al subespacio V_3 si es combinación lineal de los vectores de la base de V_3. Para ello, calculamos el determinante, formado por los tres vectores de la base y el vector $\vec{v}$. Si dicho determinante es cero, podemos decir que el vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores de la base, luego el vector $\vec{v}$ pertenecería a V_3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Luego el vector $\vec{v}$ pertenece a V_3

Bases elegida para V_1 y V_3

$B_1 = \{(1, 2, 0, 1)\}$

$B_3 = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$

Calculo de las coordenadas de v respecto las bases elegidas

$(2, 4, 0, 2) = 2(1, 2, 0, 1)$.

Luego la coordenada del vector v respecto B_1 es 2.

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \lambda \\ 4 = \lambda + \mu \\ 0 = \gamma \\ 2 = \mu \end{cases}$$ Resolviendo nos queda que:

$\lambda = 2$, $\mu = 2$, $\gamma = 0$. Luego:

$(2, 4, 0, 2) = 2(1, 1, 0, 0) + 2\,(0, 1, 0, 1) + 0\,(0, 0, 1, 0)$

Luego las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto B_3 es (2, 2, 0).

63.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*

$$A = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid x = y = z\},$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in R^4 / \ x = \alpha + \beta + \gamma + \mu, y = \alpha + \beta + 2\mu, z = \gamma + \mu, t = \beta + \gamma\}$$

a) Calcular una *base* y *dimensión* de A y de B.

b) Calcular una *base* y *dimensión* de $A \cap B$ y de $A + B$.

c) Determinar un *subespacio* F *suplementario* de A.

Solución

a) Una base de A es $\boxed{\{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}} \Rightarrow$ **$\boxed{\dim(A)=2}$**.

Una base de B es $\boxed{\{(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,2,1,0)\}} \Rightarrow$ **$\boxed{\dim(B)=4}$**. También puede ser la base canónica de R^4=B.

b) $\vec{u} \in A \cap B$ si satisface las ecuaciones implícitas de A y B, pero B no tiene luego:

$x = y = z$ una base de $A \cap B$ son $\boxed{\{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}}$ y **$\boxed{\dim(A \cap B)=\dim(A)=2}$**

Un sistema generador de A+B está formado por la unión de los vectores de las bases de A y B $\{(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,2,1,0)\} \cup \{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ y una base está formada por los vectores linealmente independientes,

$\boxed{\{(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,2,1,0)\}}$ y **$\boxed{\dim(A+B)=4}$** $\Rightarrow$ A+B=R^4.

c) dim F = dim R^4 –dim A = 4 – 2= 2. Debemos escoger dos vectores linealemente independientes que no pertenezcan a A: $\boxed{F = \ <\{(1,0,0,0)(0,0,0,1)\}>}$

64.- En el *espacio vectorial* real de *dimensión* cuatro. Se dan las *bases* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ las cuales están relacionadas por

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= 2\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + 2\vec{v}_4 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 &= 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_4 &= -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3 + 3\vec{v}_4 \end{aligned}$$

1° Se considera el vector $\vec{x} \in R^4$ cuyas *coordenadas* respecto de la *base* B' son $\vec{x} = (1, 2, 0, 0)$. Determinar sus *coordenadas* respecto de la *base* B.

2° Se considera el vector $\vec{y} \in R^4$ cuyas *coordenadas* respecto de la *base* B son $\vec{y} = (-1, 2, 0, 1)$. Determinar sus *coordenadas* respecto de la *base* B'.

Solución:

La matriz de cambio de base de B a B' es: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

y, por tanto, la matriz de cambio de base de B' a B es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & -6 & -8 & 5 \\ 1 & 7 & 8 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1º De las fórmulas de cambio de base se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & -6 & 8 & 5 \\ 1 & 7 & 8 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{x} = (\text{-}6, \text{-}13, 15, 4)}.$$

2º Análogamente

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{y} = (\text{-}1, 2, \text{-}1, 1)}.$$

65.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*:

$$F = \{(x, y, z, t) \in R^4 \text{ tales que } x = y = z\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in R^4 \text{ tales que } x = \alpha + \beta + \gamma,\ y = \alpha + 2\gamma,\ z = \gamma,\ t = \beta\}$$

a) Calcular una *base* y la *dimensión* de los subespacios *F, G,* $F \cap G$ y de *F+G*.

b) Determinar un subespacio *F´* para que $F \oplus F' = R^4$.

Solución:

a) Los vectores que pertenecen a *F* son vectores que tienen las tres primeras coordenadas iguales y la cuarta sin restricción, así pues, $\vec{u} = (\alpha, \alpha, \alpha, \beta) \in F$. Una base de *F* es

$$\boxed{B_F = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}} \text{ y } \boxed{\dim(F) = 2}.$$

Los vectores de G son tales que $\left\{\begin{array}{l} x = \alpha + \beta + \gamma \\ y = \alpha + 2\gamma \\ z = \gamma \\ t = \beta \end{array}\right\}$ y el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es tres, por tanto, la **dimensión de G es tres** y una base es: $\boxed{B_G = \{(1,1,0,0),(1,0,0,1),(1,2,1,0)\}}$.

Para calcular $F \cap G$ primero hallamos la ecuación implícita de G.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & t \end{vmatrix} = x - y + z - t = 0.$$

Los vectores de $F \cap G$ deben satisfacer x = y; x = z; x – y +z –t = 0, sistema con solución x = y = z = t, por tanto $\boxed{\dim F \cap G = 1}$ y una base es $\boxed{B_{F \cap G} = \{(1,1,1,1)\}}$.

Un sistema generador de *F*+*G* está formado por la unión de las bases de F y de *G*. Los cuatro vectores **{(1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)}** forman un sistema generador y un sistema libre, por tanto también es base. **Dim (F + G) = 4**

b) Utilizamos dos vectores de R^4 que sean linealmente independientes con los de *F*, así pues $B_{F'}$={(0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)}. ***F'* = < (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0) >**

66.- Dadas las *bases* de R^3,

$$B=\{\vec{u}=(1,\ 0,\ 0),\vec{v}=(0,\ 1,\ 1),\vec{w}=(1,\ 0,\ 1)\}\ ,$$

$$B'=\{\vec{u}'=(0,\ 0,\ 1),\vec{v}'=(0,\ 1,\ 2),\vec{w}'=(1,\ 1,\ 0)\}$$

a) Hallar la ecuación matricial de cambio de *base* de B a B'.

b) Si $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ respecto de la *base* B, ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de B'?

c) ¿Cuáles son las *coordenadas* del vector $\vec{w}$ respecto de la *base* B?

Solución:

La expresión que liga las bases B y B' es:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

a) La ecuación matricial de cambio de base de B a B' es:

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&2&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}.$$

b)

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}}$$

c) El vector $\vec{w}$ es el tercer vector de la base B por tanto sus coordenadas respecto de la base B son **(0, 0, 1)**.

67.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*:

$$A = \langle (2,0,1,1)\ \ (1,1,1,1)\ \ (1,-3,-1,-1)\ \ (3,-7,-2,2) \rangle$$

$$E = \{(x,y,z,t) \in R^4 \text{ tales que } x + y + 2z = 0,\ \ 2x-y-2z = 0\}$$

a) Calcular una *base* y la *dimensión* de los subespacios *A, E,* $A \cap E$ y de *A+E*.

b) Determinar un subespacio *A'* para que $A \oplus A' = R^4$.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto, **Dim (*A*) = 3** y una base de *A* es:

B$_A$={ (1, 1, 1, 1), (1, -3, -1, -1), (3, -7, -2, 2) }.

Los vectores de ***E*** son de la forma: $\left\{ \begin{array}{c} x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0$ *e* y=-2z.

Dim(E) =2 y $\boldsymbol{B_E = \{(0,-2,1,0),(0,0,0,1),\}}$ es una base de E.

Para calcular $A \cap E$ primero hallamos la ecuación implícita de *A*.

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & -3 & -7 & y \\ 1 & -1 & -2 & z \\ 1 & -1 & 2 & t \end{vmatrix} = -x - y + 2z = 0 \text{ para todo t} \in \text{R}.$$

Los vectores de $A \cap E$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones x + y - 2z = 0; x + y + 2z = 0; 2x – y - 2z = 0, cuya solución es x = y = z = 0 para todo valor t∈R.

Por tanto, la dimensión y una base de $A \cap E$ son:

dim $A \cap E$ =1 y $\boldsymbol{B_{A\cap E} = \{(0,0,0,1)\}}$.

Un sistema generador de *A*+*E* está formado por la unión de las bases de *A* y *E*. Los cuatro vectores **{(1, 1, 1, 1), (1, 3, -1, -1), (3, -7, -2, 2), (0, 0, 0, 1)}** forman un sistema generador y además un sistema libre, por tanto también es base. **Dim (*A* +*E*) = 4**

b) Utilizamos un vector de R^4 que sea linealmente independiente con los de *A*. Así pues B$_{A'}$={(0, 0, 0, 1)}. **A' = < (0, 0, 0, 1) >**

68.- Dadas las bases de R^3, $B = \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $B' = \{\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$ sabiendo que:

$$\vec{u} = 2\cdot\vec{u}' - \vec{v}'; \quad \vec{v} = \vec{u}' - \vec{w}'; \quad \vec{w} = \vec{v}' + 2\cdot\vec{w}'$$

a) Hallar la ecuación matricial de *cambio* de *base* de B' a B.

b) Si $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$ respecto de la base B', ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de B?

c) ¿Cuáles son las *coordenadas* del vector $\vec{w}$ respecto de la *base* B y respecto de la *base* B'?

Solución:

a) Según el enunciado la matriz de cambio de base de B a B' es: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, así pues, la ecuación matricial de cambio de base de B' a B es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

c) El vector $\vec{w}$ es tercer vector de la base B, por tanto $\boxed{\vec{w} = (0,0,1)_B}$.

Al ser $\vec{w} = \vec{v}' + 2\cdot\vec{w}'$, las coordenadas respecto de B' son **(0, 1, 2)**.

69.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*:

$$S = \{(x, y, z, t) \in R^4 \text{ tales que } -2x + 3y + 2z + t = 0\}$$

$$T = \langle (3, 1, 2, 0);\ (1, 1, 0, -1);\ (3, 1, 3, -2);\ (1, a, -1, 1) \rangle$$

a) Calcular el valor de "a" para que *T* tenga *dimensión* 3.

b) Con el valor de a determinado, hallar la *dimensión* y una *base* de los subespacios $S \cap T$ y de *S+T*.

c) Determinar un subespacio *S´* para que $S \oplus S' = R^4$.

Solución:

a)
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 7a - 7 = 0 \Rightarrow \boxed{(a = 1)}$$

b) Calculemos la ecuación implícita de T.
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 2 & 0 & 3 & z \\ 0 & -1 & -2 & t \end{vmatrix} = -5x + 7y + 4z + 2t = 0$$

Los vectores del subespacio $S \cap T$ deben verificar las ecuaciones:

$$-2x + 3y + 2z + t = 0 \ ; \ -5x + 7y + 4z + 2t = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = -\alpha - 2\beta \end{cases}$$

, por tanto la **dim($S \cap T$)=2** y una base de $S \cap T$ es $\boxed{\{(0,0,1,-2),(1,1,0,-1)\}}$.

Un sistema generador de *S*+*T* está formado por la unión de las bases de *T* y de *S*. Los cuatro vectores **{(3, 1, 2, 0), (1, 1, 0, -1), (3, 1, 3, -2), (0, 1, 0, -3)}** forman un sistema generador y un sistema libre, por tanto también es base. **Dim (*S* +T) = 4**

c) Utilizamos un vector de R^4 que sea linealmente independiente con los de *S*. Así pues $B_{S'}=\{(0, 0, 0, 1)\}$. **S' = < (0, 0, 0, 1) >**

70.- Se consideran dos *bases* de R:

$$B=\{\vec{u}=(1,1,1),\vec{v}=(-1,1,0),\vec{w}=(1,2,1)\}\ \text{y}$$

$$B'=\{\vec{u}'=(1,0,0),\vec{v}'=(3,7,-2),\vec{w}'=(0,4,1)\}$$

a) Hallar la ecuación matricial de *cambio* de *base* de B a B'.

b) Si $\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$ respecto de la *base* B, ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de B'?

c) ¿Cuáles son las *coordenadas* del vector $\vec{w}$ respecto de la *base* B, respecto de la *base* B' y respecto de la *base* canónica?

Solución:

La expresión que liga las bases B y B' es:

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&7&4\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

a) La ecuación matricial de cambio de base de B a B' es:

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\0&7&4\\0&-2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{5}&-\frac{6}{5}&\frac{7}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{15}&-\frac{2}{15}\\\frac{3}{5}&\frac{2}{15}&\frac{11}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}$$

b) Si $\vec{a}=(1,\text{-}1,\ 1)$ respecto de la base B, ¿cuáles son sus coordenadas respecto de B'?

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{5}&-\frac{6}{5}&\frac{7}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{15}&-\frac{2}{15}\\\frac{3}{5}&\frac{2}{15}&\frac{11}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}\frac{21}{5}\\-\frac{2}{5}\\\frac{6}{5}\end{pmatrix}}$$

c) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{w}$ respecto de la base B, respecto de la base B' y respecto de la base canónica?

$$\boxed{\vec{w}=(0,\ \ 0,\ \ 1)_B=\left(\frac{7}{5},\ -\frac{2}{15},\ \frac{11}{15}\right)_{B'}=(1,\ \ 2,\ \ 1)_{B_C}}$$

Obsérvese que el vector dado es el tercer vector de la base B y se corresponde con la tercera columna de la matriz del cambio de base de B a B'.

Conmutativa

Sea V un conjunto donde hemos una operación interna, que designaremos por “+” $V \xrightarrow{+} V$

Conmutativa: A+B=B+A para cualesquiera $A, B \in V$.

Sea V un conjunto donde hemos una operación interna, que designaremos por “.” $V \xrightarrow{\cdot} V$

Conmutativa: A.B=B.A para cualesquiera $A, B \in V$.

Espacio Vectorial

Sea V un conjunto donde hemos definido una ley u operación interna, que designaremos por "+" $V \xrightarrow{+} V$. Sea **K** un cuerpo (conmutativo) y sea, por último, una operación externa que designaremos por "·" $\mathbf{K} \times V \xrightarrow{\cdot} V$.

Diremos que (V,+, ·) tiene estructura de ***espacio vectorial*** sobre el cuerpo **K**, o simplemente que (V,+, ·) es un **K**-espacio vectorial cuando se verifiquen las condiciones siguientes:

[A1] **Asociativa:** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ para cualesquiera $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V$.

[A2] **Existencia de elemento neutro**: Existe un elemento que designaremos $\vec{0} \in V$ que verifica que $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

[A3] **Existencia de elemento simétrico**: Para cualquier $\vec{a} \in V$ existe un único elemento de V, que designaremos por $-\vec{a}$ tal que $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

[A4] **Conmutativa**: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ para cualesquiera $\vec{a},\vec{b} \in V$.

*Observemos que (V,+) debe ser, por tanto, un **grupo conmutativo**.*

[A5] $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ para cualquier $\lambda \in K$ y cualesquiera $\vec{a},\vec{b} \in V$.

[A6] $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda,\mu \in K$ y cualquier $\vec{a} \in V$.

[A7] $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda,\mu \in K$ y cualquier $\vec{a} \in V$.

[A8] El elemento unidad del cuerpo K, que designaremos por 1, verifica $1 \cdot \vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

Subespacio vectorial

Sea (V,+,.) un **K**-espacio vectorial y F una parte no vacía de V, diremos que F es un ***subespacio vectorial*** de V si y sólo si (F,+,.) en un **K**-espacio vectorial.

Sea F una parte no vacía del K-espacio vectorial V. F es un **subespacio vectorial** de V con las operaciones + y · inducidas por V si y sólo si se verifica:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K},\ \forall \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathrm{F} \Rightarrow \lambda \vec{\mathbf{a}} + \mu \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{F}$$

Base

Lado o cara horizontal a partir del cual se mide la altura de una figura plana o de un sólido.

Base de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que sea sistema generador y libre.

Base canónica

Base canónica, B_c, es la base: $B_c = \{\vec{e}_1 = (1,0,...,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \vec{e}_n = (0,0,...,0,1)\}$ del espacio vectorial V.

Base escalonada

Base de un espacio vectorial cuyos vectores forman una matriz triangular

Base ortonormal o métrica

La base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es **ortonormal** o **métrica** cuando sus vectores son unitarios ($\|\vec{u}_i\| = 1,\ i=1,2,...,n$) y ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

Base ortogonal

La base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es **ortogonal** cuando sus vectores son ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

Base unitaria

La base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es **unitaria** cuando sus vectores son unitarios, es decir, su módulo es 1 ($\|\vec{u}_i\| = 1,\ i=1,2,...,n$).

Ecuaciones implícitas o cartesianas

Ecuaciones cuyas incógnitas son coordenadas. Relativo a las ecuaciones de un subespacio vectorial las ecuaciones cartesianas forman el sistema homogéneo que define dicho subespacio.

Linealmente independientes

Sean f_1, f_2,…,f_k filas de una matriz cualquiera A. Las filas f_1, f_2,…,f_k son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $(0)=\lambda_1 f_1+...+\lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros, se deduce obligatoriamente que $\lambda_i=0,\ \forall i$.

Sean $\vec{\mathbf{a}}_1,...,\vec{\mathbf{a}}_n$ vectores de V. Los vectores $\vec{\mathbf{a}}_1,...,\vec{\mathbf{a}}_n \in \mathbf{V}$ son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $\vec{\mathbf{0}}=\lambda_1\vec{\mathbf{a}}_1+...+\lambda_n\vec{\mathbf{a}}_n$ .se deduce obligatoriamente que $\lambda_i=\mathbf{0},\ \forall \mathbf{i}$. También se dice que constituyen un sistema ***libre***.

Los puntos A, B, C y D son **linealmente independientes** si lo son los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Rango de un sistema de vectores

Rango de un sistema de vectores es igual al número máximo de vectores linealmente independientes que contiene.

Rango de una aplicación lineal

Rango de la aplicación lineal f es la dimensión del subespacio Imagen de f.

Rango de una matriz

Rango de la matriz A es el orden del menor de mayor orden no nulo de A. Lo denotaremos por r(A) o bien por rg(A).

En Estadística

Rango o recorrido de una variable estadística

Es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable estadística.

Sistema generador

Sea $H = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ un subconjunto de V. H es un **sistema generador** de V si para todo vector $\vec{v} \in V$ existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tal que $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$.

Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones en las que intervienen parámetros.

- Ecuaciones paramétricas de una **curva** plana son ecuaciones de la forma x=x(t), y=(t) donde el parámetro t recorre los valores del campo de existencia.
- Ecuaciones paramétricas de un **subespacio vectorial** son las coordenadas de un vector del subespacio vectorial como combinación lineal de los vectores de una base.

Combinación lineal

Sean $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vectores de V. Llamaremos **combinación lineal** *d*e los vectores $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n \in V$ a todo vector $\vec{v} \in V$ de la forma $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, siendo $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$.

Base canónica

Base canónica, B_c, es la base: $B_c = \{\vec{e}_1 = (1,0,...,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \vec{e}_n = (0,0,...,0,1)\}$ del espacio vectorial V.

Cambio de base en un espacio vectorial

Sea V un **K**-e.v. de dim n y $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n\}$, $B'=\{\vec{u}'_1,\vec{u}'_2,\ldots,\vec{u}'_n\}$ dos bases de V

tales que: $\begin{cases} \vec{u}_1 = a_{11}\vec{u}'_1 + a_{12}\vec{u}'_2 + \cdots + a_{1n}\vec{u}'_n \\ \vec{u}_2 = a_{21}\vec{u}'_1 + a_{22}\vec{u}'_2 + \cdots + a_{2n}\vec{u}'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{u}_n = a_{n1}\vec{u}'_1 + a_{n2}\vec{u}'_2 + \cdots + a_{nn}\vec{u}'_n \end{cases}$

Si $\vec{X} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, $\vec{X}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, abreviadamente la ecuación matricial anterior se escribe $\boxed{\vec{X}' = P\vec{X}}$, donde ***P es la matriz que define el cambio de la base B a la base B'.*** Diremos que P es la matriz de paso de B a B'.

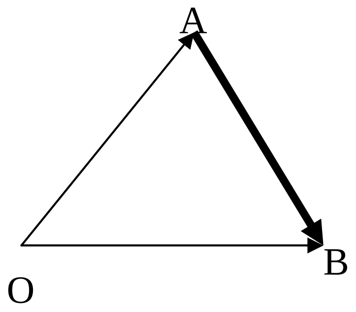
Este sistema de ecuaciones se denomina **ecuaciones del cambio de la base B a la base B'.**

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Coordenadas de un vector

Los escalares $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ tales que $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1+...+\lambda_n\vec{e}_n$ son las **coordenadas del vector** $\vec{v}$ **respecto de la base** $B = \{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$ del espacio vectorial V.

Las **coordenadas** de un vector libre $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo B menos las coordenadas del origen A, es decir, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.



Dimensión

El número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial se denomina **dimensión** del espacio vectorial. Escribiremos dim(V).

La **dimensión** de un espacio afín es la dimensión del espacio vectorial asociado.

Se dice que la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ tiene **dimensión** $m \times n$; si m = n, diremos que A es una matriz de **orden n**.

Subespacios suplementarios

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Si se cumple $E_1 \oplus E_2 = V$, diremos que E_1 y E_2 son ***subespacios suplementarios***, en cuyo caso se verifican las dos condiciones siguientes: $E_1 + E_2 = V$ y $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$.

Suma directa

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Llamaremos **suma directa de E_1 y E_2** a la suma cuando $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ y se escribe $E_1 \oplus E_2$.

Vector

- Elemento de un espacio vectorial, se identifica por sus coordenadas respecto de una base del espacio vectorial.
- Segmento orientado, se caracteriza por su dirección, sentido y módulo.

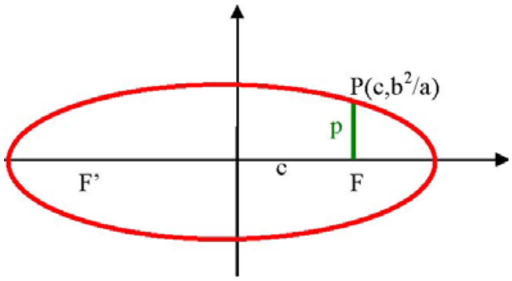
Hiperplano

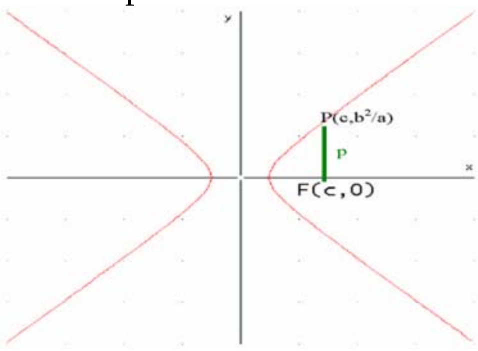
Un subespacio vectorial H del espacio vectorial V es un ***hiperplano*** si y solo si dim(H)=dim(V)-1.

Parámetro

- Símbolo que representa una constante en un problema cuyo valor puede variar de unos casos a otros.
- Variable que interviene en las ecuaciones de algunos lugares geométricos.

En las cónicas con centro el **parámetro** focal es la semicuerda que pasa por el foco perpendicular al eje focal, cuyo valor es: $p = b^2/a$





En la parábola es la distancia del foco a la directriz.

Linealmente dependientes

Sean $f_1, f_2, \ldots, f_k$ filas de una matriz cualquiera A. Las filas $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son **linealmente dependientes**, cuando existan los elementos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ no todos nulos, tales $(0) = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros.

Sean $\vec{\mathbf{a}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_n$ vectores de V. Los vectores $\vec{\mathbf{a}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_n \in \mathbf{V}$ son **linealmente dependientes,** cuando existan los elementos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ no todos nulos, tales que $\vec{\mathbf{0}} = \lambda_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{\mathbf{a}}_n$. También se dice que constituyen un sistema ***ligado***.

Los puntos A, B, C y D son **linealmente dependientes** si lo son los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Escalar

Cada elemento de un cuerpo K, generalmente el de los números reales. Constituyen las coordenadas de un vector respecto de una base de un espacio vectorial.
Los escalares $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ tales que $\vec{v}=\lambda_1\vec{e}_1+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n$ son las **coordenadas del vector** $\vec{v}$ **respecto de la base** $B=\left\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\right\}$ del espacio vectorial V.