

Soluciones a la práctica de TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

I) Clasificar las transformaciones $X'=NX$ siguientes aplicando el método propuesto, y hallar sus elementos característicos.

N	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & -1 \\ -2 & -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 4 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$
M	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$
¿Es $MM^t = pI_n$?	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
k (si procede)			2	
Q (si procede)			$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$	
 M 	1/4		-4	
Puntos dobles	(4/3,2)		$\left(-\frac{2\sqrt{3}+4}{3}, \frac{4-2\sqrt{3}}{3} \right)$	No tiene
Tipo de transformación	Homotecia inversa	Afín	Semejanza inversa	Simetría deslizante
Elementos característicos	centro (4/3,2) y razón $-\frac{1}{2}$		$C = \left(-\frac{2\sqrt{3}+4}{3}, \frac{4-2\sqrt{3}}{3} \right)$ y razón 2 $y - \frac{4-2\sqrt{3}}{3} = (\sqrt{3}-2)\left(x + \frac{2\sqrt{3}+4}{3}\right)$	$e \equiv 2x - 6y + 11 = 0$ $\vec{u} = \left(\frac{21}{10}, \frac{7}{10} \right)$
Descomposición canónica			$H_{C,k} \circ S_e$	

II) Clasificar las transformaciones $X'=NX$ siguientes aplicando el método propuesto, y hallar sus elementos característicos.

N	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -5 \\ -12 & 0 & 5 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
M	$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
¿Es $MM^t = pI_n$?	$4 I_3$		$25 I_3$	I_3
k (si procede)	2		5	
Q (si procede)	$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
 M 	8	1	-125	1
Puntos dobles	(0,0,1)		(-4/3,3,2/3)	No tiene
Tipo de transformación	Semejanza directa	Afin	Semejanza inversa	Movimiento Helicoidal
Elementos característicos	Centro (0,0,1) y razón 2		Centro (-4/3,3,3/2) y razón 5	$G_{e,\alpha} \circ T_{\vec{u}}$ $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ $e \equiv x = y + \frac{1}{3} = \frac{z - \frac{2}{3}}{-1}$ $\alpha = 120^\circ$
Descomposición canónica	$H_{C,k} \circ G_{e,\alpha}$ $e \equiv \{x = z - 1, y = 0\}$ $\alpha = -90^\circ$		$H_{C,-k} \circ G_{e,\alpha}$ $e \equiv \begin{cases} x = -\frac{4}{3} + t \\ y = 3 \\ z = \frac{2}{3} + t \end{cases}$ $\alpha = \pm 180^\circ$	

III) Estudiar la semejanza T , tal que los puntos $A=(1,2,3)$, $B=(1,1,1)$, $C=(-1,2,3)$ y $D=(1,0,2)$ se transforman en $A'=(-3,8,7)$, $B'=(-3,2,4)$, $C'=(3,8,7)$, y $D'=(-3,5,1)$ respectivamente.

SOLUCIÓN:

Se cumple que: $T(A)=A'$, $T(B)=B'$, $T(C)=C'$ y $T(D)=D'$ y en forma matricial, escribiendo

conjuntamente $T \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ para los cuatro puntos:

$$T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & -3 \\ 8 & 2 & 8 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & -3 \\ 8 & 2 & 8 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la transformación geométrica T , son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se tiene que $|T| = \boxed{27}$. ¿Qué tipo de semejanza es T ? **DIRECTA**

Los puntos invariantes o dobles se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ cuya solución es } \boxed{x=0, y=-1/4, z=1/4}$$

que recibe el nombre de **centro de la semejanza**

Si queremos hallar la descomposición canónica en el producto de una homotecia y un movimiento, resulta la homotecia H de centro $\boxed{C=(0,-1/4,1/4)}$ y razón $k=3$ y para determinar el movimiento M se considera

la matriz ortogonal $\frac{1}{k}M$ que corresponde a una rotación de eje $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{4} + t \\ z = \frac{1}{4} + t \end{cases}$ La amplitud se obtiene mediante

la traza, que en este caso es $1 + 2 \cos \alpha = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \pi}$

IV) Hallar las ecuaciones de los siguientes movimientos de E_3 :

Movimiento T	Base B adecuada	Matriz M_B asociada a T respecto de la base B.	Matriz M_C asociada a T respecto de la base canónica.	Ecuaciones
Giro de eje la recta que $\left\{ \begin{array}{l} \text{pasa por } A(1,1,1) \\ \text{vector } (0,2,0) \end{array} \right.$ y ángulo $\alpha = -45^\circ$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$
Simetría especular de $\pi \equiv x + z + 2 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z+2 \end{pmatrix}$
Simetría rotacional de $\pi \equiv y - 1 = 0$, eje $e \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ y $\alpha = -90^\circ$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix}$
Simetría deslizante de plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ y vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + M_C \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$
Movimiento helicoidal de $e \equiv x = y + \frac{1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ $\alpha = -120^\circ$ y $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + M_C \begin{pmatrix} x-0 \\ y+\frac{1}{3} \\ z-\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

V) Sean las simetrías especulares S_1, S_2, S_3, S_4 de planos $\pi_1 \equiv x-y+z=0$,

$\pi_2 \equiv x-y+z-3=0$, $\pi_3 \equiv -2x-y+z=0$, $\pi_4 \equiv 2y+z=0$ respectivamente.

Estudiar la posición relativa entre los planos:

π_1 y π_2	PARALELOS
π_1 y π_3	SE CORTAN PERPENDICULARMENTE
π_1 y π_4	SE CORTAN
π_3 y π_4	SE CORTAN

Producto de dos simetrías:

Elegir dos simetrías especulares cuya composición sea:

UNA TRASLACIÓN	$S_2 \circ S_1$	Módulo del vector $ \vec{v} = 2d(\pi_1, \pi_2) = \frac{6}{\sqrt{3}}$
UN GIRO	$S_3 \circ S_4$	Eje de giro: $x=3t, y=-2t, z=4t$
LA IDENTIDAD	$S_\pi \circ S_\pi$	

Producto de tres simetrías:

Elegir tres simetrías especulares cuya composición en el orden adecuado sea:

UNA SIMETRÍA DESLIZANTE	$S_1 \circ S_2 \circ S_3$	Plano $\equiv \pi_3$ Vector = $(2, -2, 2)$
UNA SIMETRÍA ROTACIONAL	$S_2 \circ S_3 \circ S_4$	Plano $x=1$ Amplitud = $143^\circ 07' 48''$
UNA SIMETRÍA ESPECULAR	$S_1 \circ S_2 \circ S_2$	Plano $\equiv \pi_1$

Producto de cuatro simetrías:

Elegir cuatro simetrías especulares cuya composición en el orden adecuado sea un movimiento helicoidal:

$$S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4$$

Hallar la ecuación de los movimientos resultantes:

$$S_1 \circ S_2 \circ S_3 \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{14}{15} \\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$