

1.- Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) := [x + 2y - 3z, 2x + y - 4z, x - y - z]$

1) Hallar la ecuación matricial de la aplicación lineal T

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,2,1) \\ T(0,1,0) &= (2,1,-1) \\ T(0,0,1) &= (-3,-4,-1) \end{aligned} \Rightarrow Y = AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X$$

2) Calcular las imágenes de los vectores $(5,2,3)$ y $(0,0,0)$.

$$\begin{aligned} T(5,2,3) &= (0,0,0) \\ T(0,0,0) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Podemos afirmar:	Si/No
¿ Es T inyectiva?	NO
¿El vector $(5,2,3) \in N(T)$?	SÍ

3) Hallar las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial $N(T)$.

$$N(T) = \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{2}{5}\alpha \\ z = \frac{3}{5}\alpha \end{cases}$$

Una base de $N(T)$ es: $B_N = \{(1, 2/5, 3/5)\}$, la dimensión de $N(T)$ es igual a **1**

¿Es T un endomorfismo? **SÍ** ¿Porqué? **el espacio inicial y final coinciden.**

Por ser $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo se verifica: $\dim N(T) = 1 \Leftrightarrow \dim \text{Im}(T) = 2 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = 2 \Leftrightarrow$ una base de $\text{Im}(T)$ está formada por **2** columnas linealmente **independientes** de A
 T **NO** es inyectiva por ser $\dim N(T) = 1$ **distinto de cero.**

5) Hallar una base y las ecuaciones paramétricas de $\text{Im}(T)$. Base $B_I = \{(1,2,1), (2,1,-1)\}$,

Ecuaciones paramétricas e implícitas de $\text{Im}(T)$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \quad x - y + z = 0$$

6) $T(1,6,5) = (-2, -12, -10) = -2(1,6,5)$ por tanto, $(1,6,5)$ es un **vector propio** asociado al valor

propio $\mu = -2$, por tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

7) Hallar el polinomio característico de la matriz A , asociada al endomorfismo T

$$\det(A - \mu I) = -\mu^3 + \mu^2 + 6\mu$$

Derive tiene la función CHARPOLY(A) para calcular el polinomio característico y la función EIGENVALUES(A) para calcular los valores propios “tiene el problema de no decir el grado de multiplicidad de cada valor propio”.

Usar FACTOR ,RACIONAL para calcular los valores propios y su grado de multiplicidad factorizando el polinomio característico.

8) Los valores propios de A son: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -2$, $\mu_3 = 3$

9) ¿ Es A diagonalizable? **SÍ** ¿porqué? **la matriz A es de orden 3 y tiene 3 valores propios distintos entre sí.**

10) Hallar el conjunto de vectores propios (subespacio propio V_{μ_i}) asociado al valor propio μ_i

Valor propio	Subespacio propio	Base del subespacio
$\mu_1 = 0$	$V_{\mu_1} = \langle (1, 2/5, 3/5) \rangle$	$(5, 2, 3)$
$\mu_2 = -2$	$V_{\mu_2} = \langle (1, 6, 5) \rangle$	$(1, 6, 5)$
$\mu_3 = 3$	$V_{\mu_3} = \langle (1, 1, 0) \rangle$	$(1, 1, 0)$

11) Hallar una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{15} & \frac{11}{15} & -\frac{14}{15} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.- Para cada una de las matrices siguientes hallar:

Matriz	$\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Polinomio característico.	$(2 - \omega)(\omega^2 - \omega - 2)$	$(\omega - 1)^2(\omega + 1)^2$	$-\omega^3 + \omega^2 - 6\omega$	$\omega^4 - 4\omega^3 + 16\omega - 16$
Valores propios.	-1 simple 2 doble	1 doble -1 doble	0, -2, 3	-2 simple 2 triple
Subespacio de vectores propios asociado a cada valor propio.	$\langle (\alpha, -\alpha / 2, 0) \rangle$ $\langle (\alpha, -\alpha, \beta) \rangle$	$\langle (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) \rangle$ $\langle (\alpha, \alpha, 0, 0) \rangle$	$\langle (\alpha, 0, -\alpha) \rangle$ $\langle (\alpha, -2\alpha, \alpha) \rangle$ $\langle \left(\alpha, \frac{6}{7}\alpha, \frac{2}{7}\alpha \right) \rangle$	$\langle (\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha) \rangle$ $\langle (\alpha, \beta, \gamma, \alpha - \beta - \gamma) \rangle$
Base formada por vectores propios.	$\{(2, -1, 0)\}$ $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$	$\{(1, 1, 1, 1)\}$ $\{(1, 1, 0, 0)\}$	$\{(1, 0, -1)\}$ $\{(1, -2, 1)\}$ $\{(7, 6, 2)\}$	$\{(1, -1, -1, -1)\}$ $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$
¿Es diagonalizable? ¿Porqué?	SÍ dim $V_2=2$ =doble	NO dim $V_1=1$ distinto de 2	SÍ 3 valores propios distintos	SÍ dim $V_2=3$ = triple
Matriz de cambio de base o que permite la diagonalización.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz semejante diagonal.	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Subespacio de vectores invariantes	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}V_1$	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$
Subespacios invariantes	$\{\vec{0}\}, \mathbb{R}^3, V_{-1}, V_2$	$\{\vec{0}\}, \mathbb{R}^4, V_{-1}, V_1$	$\{\vec{0}\}, \mathbb{R}^3, V_0, V_{-2}, V_3$	$\{\vec{0}\}, \mathbb{R}^4, V_{-2}, V_2$
¿Es f biyectiva?	SÍ	SÍ	NO	SÍ

3.- Estudiar , en función de los valores reales de p, la diagonalización de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ p & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz	Polinomio característico	Valores propios	Subespacios propios
A	$(2-w)(w-1)^2$	2 simple 1 doble	Si $p \neq 0 \Rightarrow V_{w=1} = \{x=0, y=-\lambda, z=\lambda\} \Rightarrow$ No diagonalizable Si $p=0 \Rightarrow V_{w=1} = \{x=-\alpha-\beta, y=\alpha, z=\beta\} \Rightarrow$ diagonalizable $V_{w=2} = \langle \{(0,0,1)\} \rangle$
B	$(1-w)(w^2-6w-2p+7)$	$w_1=1$ $w_2 = \sqrt{2(p+1)} + 3$ $w_3 = -\sqrt{2(p+1)} + 3$	(Debe especificar $p \in (-1, \infty)$ al hallar los vectores propios) Si $-1 < p$ diagonalizable. Si $p \leq -1$ No diagonalizable.

4.- Sea f el endomorfismo de \mathbb{R}^3 definido por las ecuaciones

$$f(x, y, z) = (x - z, -4y + az, -x + ay), \quad (\text{siendo } a \in \mathbb{R})$$

- Obtener la matriz de f.
- Hallar los valores del parámetro a para los cuales f no es isomorfismo.
- Para $a=2$, obtener una base del $N(f)$.
- Para $a=2$, las ecuaciones de $\text{Im}(f)$.

SOLUCIÓN:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) a = 2 \text{ y } a = -2.$$

$$c) \{(1, 1/2, 1)\}$$

$$d) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} y$$