

EL ESPACIO EUCLÍDEO

1.- Sean $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$ el espacio afín usual tridimensional real, $R = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ y $R' = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ dos referencias afines de $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$ de bases asociadas $B = \{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ y $B' = \{\overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}, \overrightarrow{Q_0Q_3}\}$ siendo $P_0 = (1, 3, -1)$, $P_1 = (2, 3, -2)$, $P_2 = (2, 4, -1)$ y $P_3 = (2, 5, -1)$, $Q_0 = (1, 0, 1)$, $Q_1 = (1, 1, 0)$, $Q_2 = (0, 1, 1)$ y $Q_3 = (0, 0, 1)$. a) Probar que $R = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ es una referencia afín de $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$. b) Calcular las coordenadas del vector $\vec{v} = (0, -3, 2)$ respecto de la base $B = \{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. c) Calcular las coordenadas de $Q_0 = (1, 0, 1)$ respecto R . d) Calcular las ecuaciones del cambio de la referencia afín R' a R . e) Si un punto tiene por coordenadas $(1, 1, 1)$ respecto de R . ¿Cuáles son sus coordenadas respecto de R' ? f) Si un plano tiene por ecuación $x+y+z=0$ respecto de R . ¿Cuál es su ecuación respecto de R' ?

SOLUCIÓN:

a) Consideramos los vectores: $\overrightarrow{P_0P_1} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{P_0P_2} = (1, 1, 0)$, y $\overrightarrow{P_0P_3} = (1, 2, 0)$ y calculamos el determinante de $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\} = \boxed{-1} \neq 0$ y por lo tanto sistema libre que constituye una base de \mathbb{R}^3 y por consiguiente $R = \{P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ un sistema de referencia afín.

b) La matriz construida con los vectores de la base $B = \{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ es la matriz del cambio de base de B a B' : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego

$$[\vec{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

c) Obtenemos el vector de posición $\overrightarrow{P_0Q_0} = (0, -3, 2)$ y lo expresamos respecto de la base B , resultando el vector de traslación $\begin{bmatrix} \overrightarrow{P_0Q_0} \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

d) Debemos determinar los vectores de posición de los puntos Q_1, Q_2, Q_3 respecto de R y escribir sus coordenadas respecto de la base B .

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{Q_0Q_1} \end{bmatrix}_B = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} \overrightarrow{Q_0Q_2} \end{bmatrix}_B = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} \overrightarrow{Q_0Q_3} \end{bmatrix}_B = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente el cambio de sistema de referencia de R' a R es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

e) Sustituyendo las coordenadas del punto A=(1, 1, 1) en la ecuación anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(3,3,-6) son las coordenadas del punto A respecto de R.

f) Del cambio de sistema de referencia de R' en R despejamos x, y, z en función de x',

$$y', z' : \begin{cases} x = -2 + x' \\ y = 7 - 3x' - 3y' - 2z' \\ z = -5 + 2x' + 2y' + z' \end{cases} \text{ y sustituyendo dichos valores en la ecuación } x+y+z=0,$$

resulta: $-y' - z' = 0$

2- Determinar la posición relativa de las dos rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 8x - 2y - 2z = -2 \end{cases}; s \equiv \begin{cases} bx - 2z = b - 6 \\ 3x - 2y = 3 - 2a \end{cases}$$

según los valores de los parámetros a y b.

SOLUCIÓN:

$$\text{rango}(M) = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 8 & -2 & -2 \\ b & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } b = 5 \\ 3 & \text{si } b \neq 5 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 8 & -2 & -2 & -2 \\ b & 0 & -2 & b-6 \\ 3 & -2 & 0 & 3-2a \end{vmatrix} = 8(5-b)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases} \text{ .Por tanto,}$$

si $a \neq 2$ y $b \neq 5$ el $\text{rango}(M^*) = 4$ y las rectas r y s se cruzan.

si $a = 2$ y $b = 5$ $\text{r}(M) = 2$ y $\text{r}(M^*) = 2$ y las rectas son coincidentes.

si $a = 2$ y $b \neq 5$ $\text{r}(M) = 3$ y $\text{r}(M^*) = 3$ y las rectas son secantes.

si $a \neq 2$ y $b = 5$ $\text{r}(M) = 2$ y $\text{r}(M^*) = 3$ y las rectas son paralelas.

3.- Dadas las rectas $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z-k}{-1}$ y $\frac{x+1}{3} = y-2 = z$, hallar: a) El valor de k para que sean secantes. b) Para el valor obtenido, la ecuación del plano que las contiene. c) Proyección de la recta $6x=3y=-2z$ sobre el plano anterior.

SOLUCIÓN :

a) De cada recta conocemos un punto y su vector director:

$$r \equiv \{A = (1, 0, k); \vec{v} = (2, 1, -1)\} \text{ y } s \equiv \{B = (-1, 2, 0); \vec{w} = (3, 1, 1)\}$$

formamos el vector $\vec{AB} = (-2, 2, -k)$ y el producto mixto
$$\left[\vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \right] = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

El valor de k será igual a 14

b) La ecuación del plano pedida es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x-5y-z+12=0$$

c) Se forma el plano perpendicular al plano anterior, π , y que contiene a la recta dada utilizando un vector perpendicular a π y la propia recta dada.

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & -5 & 2 \\ z & -1 & -3 \end{vmatrix} = 17x+5y+9z=0$$

La recta pedida es la intersección de ambos planos: $2x-5y-z+12=0$; $17x+5y+9z=0$

4.- Encontrar las ecuaciones de una recta que se apoya en dos rectas r y s y pasa por el punto P(1,0,1).

$$r \equiv \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z-1}{-1}; \quad s \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Determinaremos dos planos que contengan a cada recta y al punto P. El plano π se obtiene con el vector de r, $\vec{v} = (2, 1, -1)$, el punto A = (0,3,1) y P:

$$\vec{v} \wedge \vec{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-3, -1, -7)$$

el haz de planos paralelos será: $3x+y+7z = k$ y que contenga al punto P, será: $3x+y+7z=10. \equiv \pi$

Para obtener σ se utiliza el haz de planos que contiene a s:

$$(1+2t)x + (1-t)y + z = 3t$$

que para P resulta $t = 2$ y por tanto $\sigma \equiv 5x-y+z = 6.$

Por consiguiente π y σ forman la recta pedida.

5.- Hallar los planos bisectores de los planos concurrentes: $x-3y+2z-5=0$ y $3x-2y-z+3=0$ e indicar cuál corresponde al ángulo agudo y cuál al obtuso.

SOLUCIÓN:

Los planos bisectores se obtienen como lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambos planos, $d(X, \pi) = d(X, \sigma)$

$$\frac{|x-3y+2z-5|}{\sqrt{1+3^2+2^2}} = \frac{|3x-2y-z+3|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}$$

$$x-3y+2z-5 = \pm(3x-2y-z+3)$$

Primera solución: $\alpha \equiv 2x+y-3z+8=0$

Segunda solución: $\beta \equiv 4x - 5y + z - 2 = 0$

Determinando los ángulos:

$$\cos(\hat{\pi, \alpha}) = \frac{(1, -3, 2) \cdot (2, 1, -3)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{\pi, \alpha} = 60^\circ$$

$$\cos(\hat{\pi, \beta}) = \frac{(1, -3, 2) \cdot (4, -5, 1)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \sqrt{4^2 + 5^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{\pi, \beta} = 30^\circ$$

Luego el plano agudo es β y el obtuso α .

6.- Dadas las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3t - 7 \\ y = -2t + 4 \\ z = 3t + 4 \end{cases}; s \equiv \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s - 9 \\ z = -s - 12 \end{cases}$$

Hallar: a) las ecuaciones paramétricas de la perpendicular común. b) el valor de la mínima distancia entre ellas.

SOLUCIÓN:

a) Se considera un punto genérico de cada recta $A(3t-7, -2t+4, 3t+4)$ y $B(s+1, 2s-9, -s-12)$, a continuación se forma el vector $\overrightarrow{AB} = (s-t+8, 2s+2t-13, -s-3t-16)$ y se impone la condición de perpendicular a ambas rectas mediante el producto escalar igual a cero.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -4s - 22t + 2 = 0 \implies t = 1/29$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow 6s + 4t - 2 = 0 \implies s = 9/29$$

La solución constituye el vector ortogonal y los puntos que miden la mínima distancia entre las rectas.

$$\begin{cases} x = -\frac{200}{29} + 238t \\ y = \frac{114}{29} - 357t \\ z = \frac{119}{29} - 476t \end{cases}$$

$$b) d(r, s) = d(A, B) = \left| \overrightarrow{AB} \right| = \frac{119\sqrt{29}}{29}$$

7.- Encontrar el área del triángulo que tiene como vértices los puntos de intersección del plano de ecuación $2x+3y+3z=6$ con los ejes coordenados.

SOLUCIÓN:

Los puntos intersección con los ejes son:

Si $y=0$ y $z=0$, entonces, $A = (3, 0, 0)$

Si $z=0$ y $x=0$, entonces, $B = (0, 2, 0)$

Si $y=0$ y $x=0$, entonces, $C = (0, 0, 2)$

los vectores $\vec{AB} = (-3, 2, 0)$ y $\vec{AC} = (-3, 0, 2)$ forman un paralelogramo cuya área es el módulo del producto vectorial.

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (4, 6, 6) \text{ (Utilizar CROSS (} \vec{AB}, \vec{AC} \text{))}$$

y el área del triángulo ABC es:

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \right| = \sqrt{22} \text{ (Utilizar ABS(} \vec{AB} \wedge \vec{AC} \text{))}$$

8.- Dadas las rectas r: $2x + y = 0$, $x - z - 3 = 0$; y s: $x = 2 + t$, $y = -t$, $z = t$, se pide: a) Hallar la ecuación de una recta que sea paralela al eje OX y corte a r y a s. b) Hallar k para que la recta obtenida y el plano $2kx + y - kz + 2k = 0$ formen un ángulo de 30° .

SOLUCIÓN:

a) Se considera un punto genérico de cada recta A y B, a continuación se forma el vector $\vec{AB} = (2+t-s, 2s-t, t-s+3)$ y se impone la condición de paralelismo al eje OX, determinando los puntos de intersección con r y s.

$$\frac{1}{2+t-s} = \frac{0}{2s-t} = \frac{0}{t-s+3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -6 \\ s = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 6 \\ z = -6 \end{cases}$$

b) Tenemos el vector director del eje OX, $\vec{v} = (1,0,0)$ y el vector \vec{n} ortogonal al plano.

$$\sin 30^\circ = \cos(\vec{v}, \vec{n}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| |\vec{n}|} = \frac{2k}{\sqrt{4k^2 + 1 + k^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{11}}$$