

ESPACIOS VECTORIALES

1ªa) Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & -1 & 6 \\ 6 & 17 & -7 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ rango(A) = 3

b) Sea H el sistema de vectores de \mathbb{R}^4 formado por los vectores fila de la matriz A; rango(H). Indicar los vectores linealmente independientes de H

Los vectores fila f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes. Son independientes f_1, f_2, f_4 .

rango(H)=3

c) Sea F el subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 generado por los vectores fila de la matriz A. Hallar dos bases diferentes de F.

$B_F = \{ (4, 11, -1, 6), (6, 17, -7, 10), (2, 5, -3, 4) \}$

$B_F = \{ (1, 0, 0, 7/2), (0, 1, 0, -3/4), (0, 0, 1, -1/4) \}$

d) Hallar una ecuación vectorial de F

$$[x, y, z, t] = \alpha \left[1, 0, 0, \frac{7}{2} \right] + \beta \left[0, 1, 0, -\frac{3}{4} \right] + \mu \left[0, 0, 1, -\frac{1}{4} \right]$$

e) Hallar unas ecuaciones paramétricas de F

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta \\ z &= \mu \\ t &= \frac{7}{2}\alpha - \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\mu \end{aligned}$$

f) Hallar una ecuación implícita de F

$$-\frac{7}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z + t = 0$$

g) Sea C el subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 generado por los vectores columna de la matriz A

Hallar una base de C

$B_C = \{ (4, 6, 1, 2), (11, 17, 3, 5), (-1, -7, -3, -3) \}$

h) Encontrar una relación de dependencia lineal existente entre los vectores columna de la matriz A.

$\frac{7}{2}c_1 - \frac{3}{4}c_2 - \frac{1}{4}c_3 = c_4$

i) Hallar una ecuación vectorial de C

$$[x, y, z, t] = \alpha \left[1, 0, -\frac{1}{2}, 0 \right] + \beta \left[0, 1, \frac{1}{2}, 0 \right] + \mu [0, 0, 0, 1]$$

j) Hallar unas ecuaciones paramétricas de C

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta \\ z &= -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \\ t &= \mu \end{aligned}$$

k) Hallar la ecuación implícita de C

$$-x + y - 2z = 0$$

l) ¿F y C son hiperplanos distintos? SI, SUS ECUACIONES NO SON PROPORCIONALES.

m) Calcular una base y las ecuaciones paramétricas de $F \cap C$

$$\text{base} = \left\{ \left(\frac{7}{11}, \frac{29}{11}, 1, 0 \right), \left(\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, 0, 1 \right) \right\}$$

$$x = \frac{7\alpha + 4\beta}{11}, y = \frac{29\alpha + 4\beta}{11}, z = \alpha, t = \beta$$

n) ¿ $F+G = \mathbb{R}^4$? **SI** ($\dim(F+G)=4$)

o) ¿ $F+G$ es suma directa? **NO** ($F \cap G \neq \{\vec{0}\}$)

p) Hallar un subespacio suplementario del subespacio F : $\langle (1,0,0,0) \rangle$

2º- Estudiar, para cada uno de los conjuntos de vectores que se indican, si son libres y/o sistemas de generadores y/o base de \mathbb{R}^n , utilizando la función **rank**:

Vectores	A	R a n g o	Sist. libre	Sistema. generador	Base	Justificación
$\begin{cases} \vec{u}_1 = (1,-2,0) \\ \vec{u}_2 = (3,0,1) \\ \vec{u}_3 = (-1,1,1) \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	3	SI	SI	SI	$r(A) = \dim \mathbb{R}^3 = n^\circ$ vectores
$\begin{cases} \vec{u}_1 = (1,-2) \\ \vec{u}_2 = (3,0) \\ \vec{u}_3 = (-1,1) \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	2	NO	SI	NO	$r(A) = \dim \mathbb{R}^2 \neq n^\circ$ vectores
$\begin{cases} \vec{u}_1 = (1,-2,0,0) \\ \vec{u}_2 = (3,0,1,1) \\ \vec{u}_3 = (-1,1,1,2) \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	3	SI	NO	NO	$r(A) \neq \dim \mathbb{R}^4 \neq n^\circ$ vectores

3º- Unas ecuaciones paramétricas de un cierto subespacio vectorial F de \mathbb{R}^5 son:

$$(I) \begin{cases} x = \alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta \\ y = \beta + \gamma + 2\delta \\ z = \alpha + 2\beta + 2\gamma + 5\delta \\ t = \alpha + 3\gamma + 4\delta \\ v = \alpha + \beta + 4\gamma + 6\delta \end{cases} \text{ con } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}. \text{ Se pide hallar una base y unas ecuaciones}$$

cartesianas de F .

Para resolver el ejercicio seguimos los siguientes pasos:

1º) Escribimos la matriz A^t de los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y hallamos $\text{rank}(A) = \boxed{3}$, en consecuencia,

ESPACIOS VECTORIALES

2º) (I) es equivalente a
$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta + \gamma \\ y = \beta + \gamma \\ z = \alpha + 2\beta + 2\gamma \\ t = \alpha + 3\gamma \\ v = \alpha + \beta + 4\gamma \end{cases}$$
 Sí B es la matriz de los coeficientes como,

$\text{rg}(B) = \text{rg}(B^*) = \boxed{3}$, entonces, los menores de orden $\boxed{4}$ son cero.

3º Haciendo
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ y & 0 & 1 & 1 \\ z & 1 & 2 & 2 \\ t & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, y, \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ y & 0 & 1 & 1 \\ z & 1 & 2 & 2 \\ v & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$
 se obtienen las ecuaciones

cartesianas de F
$$\begin{cases} 3x + 23y - 4z + t = 0 \\ 3x + y - 4z + v = 0 \end{cases}$$

Y una base de F es $B = \{(1,0,1,1,1), (2,1,2,0,1), (1,1,2,3,4)\}$

4º- a) Estudiar si el conjunto de vectores $B_1 = \{\vec{u}_1 = (1,1,1), \vec{u}_2 = (-1,1,0), \vec{u}_3 = (-1,-1,2)\}$ constituye una base de \mathfrak{R}^3 .

RANK
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

Respuesta: Es una base, puesto que son tres vectores linealmente independientes y la dimensión del espacio vectorial es 3.

b) Hallar una base B_S del subespacio de \mathfrak{R}^3 : $S = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$.

SOLVE($[x - 2 \cdot y + z = 0]$, $[x]$)

$[x = 2 \cdot y - z]$

Respuesta: Una base puede ser $(2,1,0); (-1,0,1)$

c) Hallar un vector $\vec{u} \notin S$. Razonar porqué $\{\vec{u}\} \cup B_S = B_2$ constituye una base de \mathfrak{R}^3 .

Respuesta: Un vector puede ser $(1,0,0)$, ya que $1 - 2 \cdot 0 + 0 \neq 0$ luego no es del subespacio vectorial S

RANK
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

d) Hallar las ecuaciones del cambio de base de B_1 a B_2 en forma matricial.

$$P := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
 P es la matriz del cambio de base de B_1 a B_2

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 Q es la matriz del cambio de base de B_2 a B_1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de base de B_1 a B_2 es:

$$Q^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5º- Consideremos las bases de \mathbb{R}^3 : $B_1 = \{\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)\}$ y

$$B_2 = \left\{ \bar{u}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right), \bar{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \bar{u}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

a) Hallar las ecuaciones del cambio de base de B_1 a B_2 .

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

b) Hallar el conjunto F de vectores que tienen las mismas coordenadas respecto de B_1 y B_2

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow x - \sqrt{2}y - z = 0$$

c) Demostrar que F es un subespacio de \mathbb{R}^3 y hallar una base de F .

$$B_F = \{(\sqrt{2}, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$