a) Clasificar la siguiente cónica según los valores del parámetro "a": $(a^2+4)x^2+9y^2+6axy-4(a^2+1)x-12ay+4a^2-8=0$.

b) Hacer un estudio completo de la cónica anterior para a = 1:

Ecuación reducida y área de la cónica.

Semiejes, excentricidad y parámetro de la cónica.

Centro, ejes, focos y vértices principales.

Ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (0,2) y son tangentes a la cónica.

Dibujo de la cónica.

Solución

c) Clasificar la siguiente cónica según los valores del parámetro "a": $(a^2+4)x^2+9y^2+6axy-4(a^2+1)x-12ay+4a^2-8=0$.

d) Hacer un estudio completo de la cónica anterior para a = 1:
Ecuación reducida y área de la cónica.
Semiejes, excentricidad y parámetro de la cónica.
Centro, ejes, focos y vértices principales.
Ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (0,2) y son tangentes a la cónica.
Dibujo de la cónica.

Solución

Solución

a) Clasificación

$$A=\begin{pmatrix}4a^2-8 & -2(a^2+1) & -6a\\ -2(a^2+1) & a^2+4 & 3a\\ -6a & 3a & 9\end{pmatrix},\quad \begin{cases}A_{00}=36>0\\ |A|=-324\neq 0\end{cases}\Rightarrow \text{Elipse}$$

$(a_{11}+a_{22})|A|=+\cdot-<0 \Rightarrow$ **ELIPSE REAL**

b) Sea a=1

Ecuación reducida

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+\gamma=0$$

λ_1 y λ_2 valores propios de $A_c=\begin{pmatrix}5&3\\3&9\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=7-\sqrt{13}\\ \lambda_2=7+\sqrt{13}\end{cases}$, ya que se toma como λ_1 el valor propio de menor valor absoluto. $k=\dfrac{|A|}{A_{00}}=-9$

$$\boxed{(7-\sqrt{13})x''^2+(7+\sqrt{13})y''^2-9=0}\Rightarrow\frac{x''^2}{\frac{9}{7-\sqrt{13}}}+\frac{y''^2}{\frac{9}{7+\sqrt{13}}}=1$$

Semiejes

$$a^2=\frac{9}{7-\sqrt{13}}\Rightarrow\boxed{a=\frac{3}{\sqrt{7-\sqrt{13}}}},\quad b^2=\frac{9}{7+\sqrt{13}}\Rightarrow\boxed{b=\frac{3}{\sqrt{7+\sqrt{13}}}}$$

Área de la cónica $\boxed{S=ab\pi=\frac{3}{2}\pi}$

Excentricidad y parámetro de la cónica

$$c^2=a^2-b^2=\frac{1}{2}\sqrt{13}\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\boxed{\sqrt{\frac{7\sqrt{13}-13}{18}}}$$

$$a^2=\frac{9}{7-\sqrt{13}},\quad b^2=\frac{9}{7+\sqrt{13}}\Rightarrow p=\frac{b^2}{a}=\boxed{\frac{2\sqrt{26}-5\sqrt{2}}{6}}.$$

Centro

$$\begin{cases} -4+5x+3y=0 \\ -6+3x+9y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}.$$

Ejes

Eje focal $x'' \equiv \begin{cases} \text{Pasa por el centro } C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \text{Es paralelo a los vectores propios asociados a } \lambda_1 = 7-\sqrt{13} \end{cases}$

$$\left(A_c-\lambda_1 I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{e}_f=\left(\frac{\sqrt{13}+2}{3},-1\right) \Rightarrow \boxed{y-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2+\sqrt{13}}\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

El **eje no focal** $y'' \equiv \begin{cases} \text{Pasa por el centro } C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \text{Es perpendicular al eje focal} \end{cases}$

por tanto, $y'' \equiv \boxed{y-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2-\sqrt{13}}\left(x-\frac{1}{2}\right)}$.

Vértices principales

Se hallan como la intersección del eje focal con la circunferencia de centro el origen y radio "a":

$$\begin{cases} y-\frac{1}{2}=\frac{-3}{2+\sqrt{13}}\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{7-\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_1\left(\frac{26-3\sqrt{338+78\sqrt{13}}}{52},\frac{26+\sqrt{1690-26\sqrt{13}}}{52}\right) \\ V_2\left(\frac{26+\sqrt{338+78\sqrt{13}}}{52},\frac{26-\sqrt{1690-26\sqrt{13}}}{52}\right) \end{cases}}$$

Focos

Se hallan los puntos de intersección del eje focal con la circunferencia de centro el origen y radio c:

$$c^2=a^2-b^2=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{cases} y-\frac{1}{2}=\frac{-3}{2+\sqrt{13}}\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} F_1\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{4}},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\sqrt{13}-2}}{4}\right) \\ F_2\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{4}},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\sqrt{13}-2}}{4}\right) \end{cases}}$$

Haz de rectas que pasan por el punto (0,2) es $y-2=mx$.

La intersección de la recta tangente con la elipse debe ser un único punto, por tanto, el sistema $\begin{matrix} y = 2 + mx \\ 5x^2 + 9y^2 + 6xy - 8x - 12y - 4 = 0 \end{matrix}$ debe tener solución única $\Rightarrow$

$$(24m + 4)^2 - 32(9m^2 + 6m + 5) = 0 \Rightarrow 144(2m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x \\ y = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}x} \end{matrix}}$$

Dibujo