I.- Dada la ecuación matricial B (X A - D)= C+ X A, donde A, B, C, D y X son matrices cuadradas de orden n, obtener la matriz X, sabiendo que A, B y (B-I) tienen inversa. Siendo I la matriz identidad de orden n.

Solución

II.- Dada la ecuación matricial X A = A^t+X, donde $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$**, obtener la matriz X.**

Solución

III.- Hallar dos matrices X e Y de dimensión 2x3 tales que cumplan que

$$\begin{cases} X+Y=A \\ 4X+\dfrac{2}{3}Y=B \end{cases}$$

siendo A y B dos matrices cualesquiera de la misma dimensión 2x3.

Solución

IV.- Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} nx+2y+z=1 \\ -2x-ny+z=1 \\ 3x-2z=2 \end{cases}$$

se pide, estudiar las soluciones del sistema en función del parámetro n.

Solución

I.- Dada la ecuación matricial B (X A - D)= C+ X A, donde A, B, C, D y X son matrices cuadradas de orden n, obtener la matriz X, sabiendo que A, B y (B-I) tienen inversa. Siendo I la matriz identidad de orden n.

Solución:

$$B(XA-D)= C+ XA$$

Quitamos paréntesis: $BXA-BD=C+ XA$; $BXA- XA=C+BD$;$(BX- X)A=C+BD$

multiplicamos por A^{-1} en ambos lados: $BX- X=(C+BD)A^{-1}$

Sacamos X factor común (derecha): $(B-I)X=(C+BD)A^{-1}$ Donde I es la matriz unidad

Multiplicamos $(B-I)^{-1}$ a ambos lados (izquierda): $\boxed{X=(B-I)^{-1}\cdot(C+BD)A^{-1}}$

II.- Dada la ecuación matricial X A = A^t+X, donde $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, obtener la matriz X.

Solución:

$$X\,A = A^t + X$$

Pasamosla incógnita a la izquierda: $XA-X = A^t$

Sacamos X factor común (izquierda): $X\,(A - I) = A^t$ Donde I es la matriz unidad

Multiplicamos $(A-I)^{-1}$ a ambos lados (derecha): $X = A^t\,(A-I)^{-1}$

Y sustituyendo A por su valor, se obtiene:

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^t\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

III.- Hallar dos matrices X e Y de dimensión 2x3 tales que cumplan que

$$\begin{cases} X+Y=A \\ 4X+\frac{2}{3}Y=B \end{cases}$$

siendo A y B dos matrices cualesquiera de la misma dimensión 2x3.

Solución:

En el sistema dado:

Multiplicamos por 2/3 la primera ecuación y le restamos la segunda

$$\begin{cases} \frac{2}{3}X+\frac{2}{3}Y=\frac{2}{3}A \\ 4X+\frac{2}{3}Y=B \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{3}-4\right)X=\frac{2}{3}A-B$$

$$-\frac{10}{3}X=\frac{2}{3}A-B \Rightarrow X=-\frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}A-B\right)=\boxed{-\frac{1}{5}A+\frac{3}{10}B}$$

$$\Rightarrow Y = A\text{-}X \Rightarrow\ Y=A-\left(-\frac{1}{5}A+\frac{3}{10}B\right)=\boxed{\frac{6}{5}A-\frac{3}{10}B}$$

IV.- Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} nx + 2y + z = 1 \\ -2x - ny + z = 1 \\ 3x - 2z = 2 \end{cases}$$

se pide, estudiar las soluciones del sistema en función del parámetro n.

Solución:

Si A es la matriz de coeficientes, $|A| = 2n^2+3n-2$. Sus raíces son n=-2 y n=1/2.

Para cualquier otro valor el sistema es **compatible determinado**.

Para n=-2, rango(A) =2 = rango (A*), sistema **compatible indeterminado**

Para n=1/2, rango(A) = 2 pero rango (A*) = 3 sistema **incompatible**