I.- Hallar la ecuación de la rotación $G_{(e,\alpha)}$ donde el eje $e \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{-1}$ y el ángulo $\alpha=2\pi/3$.

Solución

II.- Clasificar y hallar los elementos característicos de la transformación geométrica dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1-2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

I.- Hallar la ecuación de la rotación $G_{(e,\alpha)}$ donde el eje *e* ≡ $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{-1}$ y el ángulo $\alpha=2\pi/3$.

Solución

El eje de rotación *e* es la recta determinada por el punto A(1,1,-1) y el vector $\vec{u}=(1,0,-1)$.

1. Construimos una base B = $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ ortonormal y directa tal que $\vec{u}_1 \parallel e$:

$$\vec{u}_1=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\vec{u}_2=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ siendo $\vec{v}\perp\vec{u}$, por ejemplo, $\vec{v}=(1,0,1)\perp\vec{u}$ pues $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}_2=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\vec{u}_3=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=(0,-1,0)$$

2. Respecto de B la matriz asociada $M_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3}\\ 0 & \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}$ y la matriz asociada respecto de la base canónica B_C es $M=PM_BP^{-1}$ donde P= $P_{B\to B_C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$.

   Operando con Derive se obtiene que $M=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

3. La ecuación de $G_{(e,\alpha)}$ es de la forma $X'=A+M\,\overrightarrow{AX}$ donde A es un punto cualquiera de *e*

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z+1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{3}{4}\\ \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4}\\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}}$$

II.- Clasificar y hallar los elementos característicos de la transformación geométrica dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1-2\sqrt{2}&-\sqrt{2}&\sqrt{2}\\1&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Solución

La matriz asociada es M=$\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

1. $MM^t=4I_2$, luego la transformación geométrica corresponde a una semejanza de razón k=$+\sqrt{4}$=2. La designaremos $S_{(C,k)}$
2. La matriz asociada al movimiento es Q=$\frac{1}{2}$M=$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ y su determinante $|Q|=1$, luego es una **semejanza directa** por lo que $S_{(C,k)}=H_{(C,k)}G_{(C,\alpha)}$.
3. Cálculo de los elementos característicos: C, α, **k=2** (calculado)

   C es el punto doble: resolviendo con Derive la ecuación $\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1-2\sqrt{2}&-\sqrt{2}&\sqrt{2}\\1&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$, se obtiene $\boxed{\mathbf{C(-1,1)}}$

   El ángulo α es el que verifica que cosα=$\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\alpha=\frac{5\pi}{4}}$