

Indicaciones

Llamando $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ a la matriz asociada a una cónica en un determinado

sistema de referencia y $A_c = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ a la matriz de su forma cuadrática, ciertas

funciones de DERIVE permiten calcular algunos invariantes y expresiones asociados a la ecuación de dicha cónica necesarios para su estudio:

Expresión

Función de DERIVE

A_c

$\text{minor}(A,1,1)$

$|A|$

$\det A$

$a_{11} + a_{22}$

$\text{trace}(A_c)$

$A_{11} + A_{22}$

$\det(\text{minor}(A,2,2)) + \det(\text{minor}(A,3,3))$

Valores propios de A_c

$\text{eigenvalues } A_c$

Vectores propios de A_c

$\text{exact_eigenvector}(A_c, \text{valor propio})$

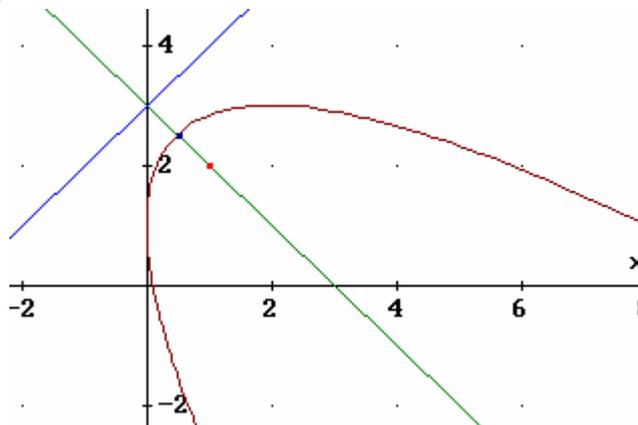
$\begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\text{delete_element}(A,1)$

I) Estudiar las siguientes cónicas:

$$A) \quad x^2 + y^2 + 2xy - 10x - 2y + 1 = 0$$

a) Gráfica de la cónica



b) Ecuación matricial

$$(1 \quad x \quad y) \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \bar{X}^t A \bar{X} = 0$$

c) Clasificación

$$A_{00} = |A_c| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Tipo parabólico}$$

$$|A| = -16 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{PARÁBOLA}}$$

d) Ecuación reducida

$2b_1x'' + \lambda_2y''^2 = 0$; valores propios de A_c : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ (con la función

eigenvalues (A_c)); $b_1 = \pm \sqrt{\frac{-|A|}{a_{11} + a_{22}}} = \pm 2\sqrt{2}$; para que b_1 sea de signo contrario a

λ_2 , tomamos $b_1 = -2\sqrt{2}$.

$$-4\sqrt{2}x'' + 2y''^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y''^2 = 2\sqrt{2}x''}$$

e) Excentricidad y parámetro de la cónica

$\boxed{e = 1}$, por ser una parábola.

$$2p = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{p = \sqrt{2}}$$

f) Eje y vértice. Dibujarlos

Vectores propios de A_c asociados a $\lambda_2 = 2$: $\langle (1,1) \rangle$ (con la función exact_eigenvector ($A_c, 2$)) \Rightarrow Eje $y'' \equiv y = x + n$. Busquemos “n” para que la intersección de y'' con la parábola sea un único punto:

$$\begin{cases} y = x + n \\ x^2 + y^2 + 2xy - 10x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 4x(n-3) + n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-4(n-3) \pm \sqrt{16(n-3)^2 - 16(n^2 - 2n + 1)}}{8}$$

Discriminante = 0 = 16(n-3)² - 16(n² - 2n + 1) ⇒ n = 2 ⇒ Eje y'' ≡ y = x + 2

Abscisa del vértice: $x = \frac{-4(2-3) \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{1}{2}$; ordenada: $y = x + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

Luego, $V = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

El eje focal pasa por el vértice y es perpendicular a y'':

$$\text{Eje focal} \equiv y - \frac{5}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

g) Foco y directriz. Dibujarlos.

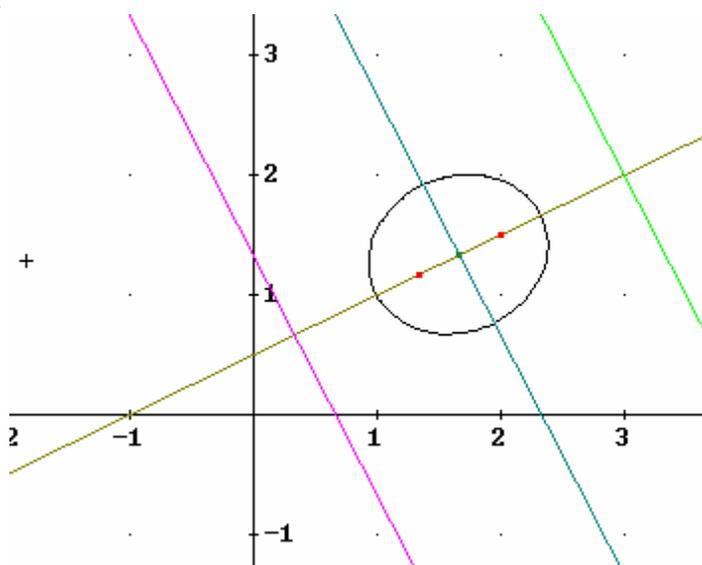
$$\begin{cases} \text{Eje focal} \equiv y - \frac{5}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ \text{circunf. de centro V y radio } \frac{p}{2} \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Observando el dibujo se obtiene que el foco es $F = (1, 2)$ y la directriz es la recta que pasa por el punto (0, 3) y es paralela a y'':

$$\text{dir} \equiv y - 3 = x - 0 \Leftrightarrow y = x + 3$$

B) $16x^2 + 19y^2 - 4xy - 48x - 44y + 61 = 0$

a) Gráfica de la cónica



b) Ecuación matricial

$$(1 \ x \ y) \begin{pmatrix} 61 & -24 & -22 \\ -24 & 16 & -2 \\ -22 & -2 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \bar{X}^t A \bar{X} = 0$$

c) Clasificación

$$A_{00} = |A_c| = \begin{vmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 19 \end{vmatrix} = 300 > 0 \Rightarrow \text{Tipo elíptico}$$

$$|A| = -2500 \neq 0 \Rightarrow \text{elipse}$$

$$(a_{11} + a_{22})|A| = + \cdot - < 0 \Rightarrow \boxed{\text{ELIPSE REAL}}$$

d) Ecuación reducida

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0; \quad c = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{-2500}{300} = -\frac{25}{3}; \text{valores propios de } A_c: 15, 20 \text{ (con}$$

la función eigenvalues (A_c). Tomamos $\lambda_1 = 15$ (el de menor valor absoluto) y $\lambda_2 = 20$. Ecuación reducida:

$$15x''^2 + 20y''^2 - \frac{25}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x''^2}{\frac{5}{9}} + \frac{y''^2}{\frac{5}{12}} = 1}$$

e) Semiejes, excentricidad y parámetro de la cónica

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ b^2 = \frac{5}{12} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \end{array} \right\} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = \frac{5}{36} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{6}; \quad e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Parámetro de la hipérbola: } \frac{b^2}{a} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

f) Centro. Dibujarlo

Con delete_element(A,1), se obtiene: $\begin{pmatrix} -24 & 16 & -2 \\ -22 & -2 & 19 \end{pmatrix}$; se resuelve el sistema:

$$\begin{pmatrix} -24 & 16 & -2 \\ -22 & -2 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)}$$

g) Ejes (indicando cuál es el focal). Dibujarlos

Con exact_eigenvector($A_c, 15$), se obtiene la dirección del eje focal:

$$\left\langle \left(1, \frac{1}{2}\right) \right\rangle \Rightarrow \boxed{\text{Eje focal} \equiv y - \frac{4}{3} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0}$$

$$\text{Eje no focal} \equiv y - \frac{4}{3} = -2\left(x - \frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow 6x + 3y - 14 = 0$$

h) Focos, vértices y directrices. Dibujarlos

Nota: Resolver el sistema

$$\begin{cases} \text{Eje focal} \equiv y - \frac{4}{3} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{3}\right) \\ \text{circunf. de centro } C = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ y radio } k \equiv \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = k^2 \end{cases}$$

Focos (Sustituir “k” por “c” = $\frac{\sqrt{5}}{6}$)

$$\left(2, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{6}\right)$$

Vértices principales (Sustituir “k” por “a” = $\frac{\sqrt{5}}{3}$)

$$(1, 1), \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Vértices secundarios (Sustituir “k” por “b” = $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$)

$$\left(\frac{10 + \sqrt{3}}{6}, \frac{4 - \sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{10 - \sqrt{3}}{6}, \frac{4 + \sqrt{3}}{3}\right)$$

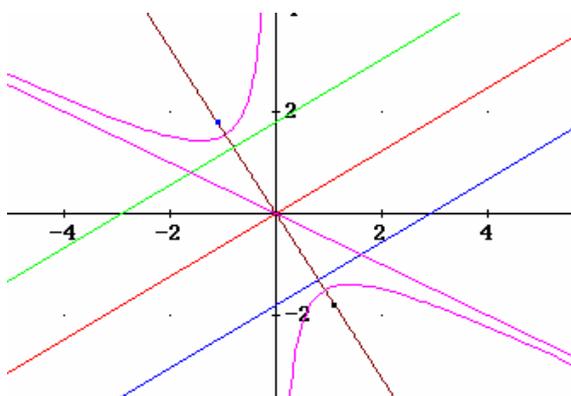
Directrices (Sustituir “k” por “a²/c” = $\frac{2\sqrt{5}}{3}$)

Son rectas paralelas al eje no focal y que pasan por los puntos $(3, 2), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$:

$$\begin{cases} y - 2 = -2(x - 3) \\ y - \frac{2}{3} = -2\left(x - \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$\text{C) } 2 + x^2 + 2xy = 0$$

a) Gráfica de la cónica



b) Ecuación matricial

$$(1 \ x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \bar{X}^t A \bar{X} = 0$$

c) Clasificación

$$A_{00} = |A_c| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow \text{Tipo hiperbólico}$$

$$|A| = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{HIPÉRBOLA}$$

d) Ecuación reducida

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c = 0; \quad c = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{-2}{-1} = 2; \text{valores propios de } A_c: \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (con la}$$

función eigenvalues (A_c)). Tomamos $\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (signo contrario a c) y

$$\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Ecuación reducida:}$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} x'^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} y'^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{\frac{4}{\sqrt{5} - 1}} - \frac{y'^2}{\frac{4}{\sqrt{5} + 1}} = 1$$

e) Semiejes, excentricidad y parámetro de la cónica

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{4}{\sqrt{5} - 1} \Rightarrow a = \sqrt{\sqrt{5} + 1} \\ b^2 &= \frac{4}{\sqrt{5} + 1} \Rightarrow b = \sqrt{\sqrt{5} - 1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{2\sqrt{5}}$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$\text{Parámetro de la hipérbola: } \frac{b^2}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

f) Centro. Dibujarlo

Con delete_element(A,1), se obtiene: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; se resuelve el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (0,0)$$

g) Ejes (indicando cuál es el focal). Dibujarlos

Con exact_eigenvector $\left(A_c, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$, se obtiene la dirección del eje focal:

$$\left\langle \left(1, -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \right\rangle \Rightarrow \text{Eje focal} \equiv y = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} x$$

$$\text{Eje no focal} \equiv y = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} x$$

h) Focos, vértices y directrices. Dibujarlos

Nota: Resolver el sistema

$$\begin{cases} \text{Eje focal} \equiv y = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}x \\ \text{circunf. de centro } C = (0, 0) \text{ y radio } k \equiv x^2 + y^2 = k^2 \end{cases}$$

Focos (Sustituir “k” por “c” = $\sqrt{2\sqrt{5}}$)

$$\left(\pm \sqrt{\sqrt{5}-1}, \mp \sqrt{\sqrt{5}+1} \right)$$

Vértices (Sustituir “k” por “a” = $\sqrt{\sqrt{5}+1}$)

$$\left(\pm \frac{500^{\frac{1}{4}}}{5}, \mp \left(\frac{500^{\frac{1}{4}}}{10} + \frac{20^{\frac{1}{4}}}{2} \right) \right)$$

Directrices (Sustituir “k” por “a²/c” = $\frac{4}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{2\sqrt{5}}}$)Son rectas paralelas a y” que pasan por los puntos $\left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{5}}, \mp \sqrt{\frac{2\sqrt{5}+4}{5}} \right)$:

$$y \mp \sqrt{\frac{2\sqrt{5}+4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \left(x \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{5}} \right)$$

i) Asíntotas. Dibujarlas

Son rectas que pasan por el centro y tienen de pendiente “m” tal que:

$$1 + 2m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Como sólo se obtiene un valor real de m, hay una asíntota paralela al eje OY (de pendiente infinita):

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ x = 0 \end{cases}$$

II) Clasificar y hallar la ecuación reducida de las siguientes cónicas:

$$A) 49x^2 + 25y^2 - 70xy + 35x - 25y + 6 = 0$$

$$(1 \ x \ y) \begin{pmatrix} 6 & \frac{35}{2} & -\frac{25}{2} \\ \frac{35}{2} & 49 & -35 \\ -\frac{25}{2} & -35 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \bar{X}^t A \bar{X} = 0$$

$$A_{00} = |A_c| = \begin{vmatrix} 49 & -35 \\ -35 & 25 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Tipo parabólico}$$

$$|A| = 0, A_{11} + A_{22} = -\frac{37}{2} < 0 \Rightarrow \text{Dos rectas paralelas}$$

(Nota: $A_{11} + A_{22} = \det(\text{min or } (A,2,2)) + \det(\text{min or } (A,3,3))$)

Ecuación reducida:

$$d + \lambda_2 y''^2 = 0; \text{tr}(A_c) = \lambda_2 = 74 \text{ (con la función } \text{trace}(A_c)); d = \frac{A_{11} + A_{22}}{a_{11} + a_{22}} = -\frac{1}{4};$$

$$-\frac{1}{4} + 74y''^2 = 0 \Leftrightarrow y'' = \pm \frac{\sqrt{74}}{148}$$

$$B) 7x^2 - 5y^2 + 2xy + 9x - 3y + 2 = 0$$

$$(1 \ x \ y) \begin{pmatrix} 2 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} & 7 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \bar{X}^t A \bar{X} = 0$$

$$A_{00} = |A_c| = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow \text{Tipo hiperbólico}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{Rectas secantes}$$

Ecuación reducida:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0; \text{valores propios de } A_c: 1 \pm \sqrt{37} \text{ (con la función eigenvalues } A_c).$$

$$(1 + \sqrt{37})x''^2 + (1 - \sqrt{37})y''^2 = 0 \Leftrightarrow y'' = \pm \sqrt{-\frac{1 + \sqrt{37}}{1 - \sqrt{37}}} x''$$

$$C) 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 2y + 3 = 0$$

$$(1 \ x \ y) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \bar{X}^t A \bar{X} = 0$$

$$A_{00} = |A_c| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \Rightarrow \text{Tipo elíptico}$$

$$|A| = 7 \neq 0 \Rightarrow \text{elipse}$$

$$(a_{11} + a_{22})|A| = + \cdot + > 0 \Rightarrow \text{Elipse Imaginaria}$$

Ecuación reducida:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0; c = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{7}{3}; \text{valores propios de } A_c: 1, 3 \text{ (con la función}$$

eigenvalues (A_c)). Tomamos $\lambda_1 = 1$ (el de menor valor absoluto) y $\lambda_2 = 3$.

$$x''^2 + 3y''^2 + \frac{7}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{x''^2}{7} + \frac{y''^2}{9} = 1 \\ -\frac{7}{3} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

III) Hallar las rectas tangentes a la elipse $x^2 + y^2 - xy + x + y = 0$, que sean paralelas al eje focal.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \text{ valores propios de } A_c: \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \text{ (con la función eigenvalues } A_c).$$

Con exact_eigenvector $\left(A_c, \frac{1}{2}\right)$, se obtiene la dirección del eje focal: $\langle(1,1)\rangle$.

Ecuación de la recta tangente: $y = x + k$, buscando "k" de forma que su intersección con la elipse sea un único punto:

$$x^2 + (x+k)^2 - x(x+k) + x + (x+k) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (k+2)x + (k^2 + k) = 0$$

Resolviendo en "x": $x = \frac{-k-2 \pm \sqrt{4-3k^2}}{2} \Rightarrow 4-3k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Luego, las

rectas tangentes buscadas son: $y = x \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

IV) Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos $(3,4), (-3,9), (-3,-1), (-9,4)$ y $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$.

La ecuación buscada es de la forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$.

Como los cinco puntos dados han de verificar dicha ecuación, sustituyendo en ella la "x" y la "y" por las coordenadas de cada uno de los puntos, se obtiene el siguiente sistema cuyas incógnitas son A, B, C, D, E y F:

$$\begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \\ 9A + 16B + 12C + 3D + 4E + F = 0 \\ 9A + 81B - 27C - 3D + 9E + F = 0 \\ 9A + B + 3C - 3D - E + F = 0 \\ 81A + 16B - 36C - 9D + 4E + F = 0 \\ \frac{9}{25}A + \frac{3}{5}D + F = 0 \end{cases} \quad \text{que ha de ser compatible}$$

indeterminado, luego, definiendo la matriz de los coeficientes del sistema y calculando su determinante, ha de verificarse que:

$$0 = \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & xy & x & y & 1 \\ 9 & 16 & 12 & 3 & 4 & 1 \\ 9 & 81 & -27 & -3 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & -3 & -1 & 1 \\ 81 & 16 & -36 & -9 & 4 & 1 \\ \frac{9}{25} & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1728(25x^2 + 150x + 9(4y^2 - 32y - 11)) = 0$$

Con los comandos “simplificar” y “expandir en x e y”, se obtiene ya la ecuación pedida de la cónica:

$$25x^2 + 36y^2 + 150x - 288y - 99 = 0$$