I.- Sea f una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n. Sea B una base de V. Sea A la matriz asociada a f respecto de la base B.
Señala, sin demostrar, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F):
a) Para calcular la imagen de cualquier vector de V basta conocer la imagen de los vectores de la base B.
b) f es biyectiva $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
c) r (A) = n $\Leftrightarrow N(f) \neq \left\{\vec{0}\right\}$
d) Si λ **es valor propio de A, entonces** λ^3 **es valor propio de** A^3**.**
e) Si $\lambda = 0$ **es valor propio de f, entonces** $|A| = 0$**.**
f) dim (Im f) = r (A)

Solución

II.- Sea f una aplicación lineal tal que:
f(1,1,0) = (5,-1,3); f(1,-2,0) = (5,2,3); f(0,0,1) = (0,*a*,*b*)
Se pide:
a) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la base canónica y el valor de $|A|$
b) Hallar los valores de a y b para los que f es biyectiva.
c) Para b = 0 hallar sendas bases de N(f) e Imf.

Solución

III.- Sea f la transformación lineal de R^3 **que tiene por matriz asociada:**

A = $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$**. Se pide:**

a) Hallar los valores propios de A y una base de cada uno de los subespacios propios asociados.
b) ¿Es A diagonalizable?
c) En caso afirmativo,
hallar una matriz diagonal D semejante a A
dar una matriz P que permita la diagonalización de A
escribir la relación que existe entre A y D.
d) Dar una base B'= $\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right\}$ **de** R^3 **formada por vectores propios de A tal que D = M(f, B').**
e) Expresar los vectores $f\left(\vec{v}_1\right)$, $f\left(\vec{v}_2\right)$, $f\left(\vec{v}_3\right)$ **como combinación lineal de los vectores de la base B'.**
f) ¿Es f biyectiva?
g) Hallar el subespacio de vectores invariantes por f.

Solución

I.- Sea f una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n. Sea B una base de V. Sea A la matriz asociada a f respecto de la base B.
Señala, sin demostrar, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F):
a) Para calcular la imagen de cualquier vector de V basta conocer la imagen de los vectores de la base B.
b) f es biyectiva $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
c) r (A) = n $\Leftrightarrow N(f) \neq \left\{ \vec{0} \right\}$
d) Si λ **es valor propio de A, entonces** λ^3 **es valor propio de** A^3**.**
e) Si $\lambda = 0$ **es valor propio de f, entonces** $|A| = 0$**.**
f) dim (Im f) = r (A)

Solución:

a) Para calcular la imagen de cualquier vector de V basta conocer la imagen de los vectores de la base B. VERDADERO

b) f es biyectiva $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ VERDADERO

c) r (A) = n $\Leftrightarrow N(f) \neq \left\{ \vec{0} \right\}$ FALSO

d) Si λ es valor propio de A, entonces λ^3 es valor propio de A^3. VERDADERO

e) Si $\lambda = 0$ es valor propio de f, entonces $|A| = 0$. VERDADERO

f) dim (Im f) = r (A) VERDADERO

II.- Sea f una aplicación lineal tal que:
f(1,1,0) = (5,-1,3); f(1,-2,0) = (5,2,3); f(0,0,1) = (0,*a*,*b*)
Se pide:
a) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la base canónica y el valor de $|A|$
b) Hallar los valores de a y b para los que f es biyectiva.
c) Para b = 0 hallar sendas bases de N(f) e Imf.

Solución
a)
Nos dan las imágenes de tres vectores l.i. entre sí, pues:

#1: $$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -3$$

Como la ecuación de la aplicación lineal es de la forma f(X)=AX

#2: $$A\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & a \\ 3 & 3 & b \end{bmatrix}\cdot$$

y podemos despejar A, que es la matriz asociada respecto de la base canónica

#3: $$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & a \\ 3 & 3 & b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{bmatrix}$$

#4: $$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{bmatrix} = \boxed{-\ 5\cdot b}$$

b)
f es biyectiva para los valores de a y b tales que det(A)≠0, luego para todo **b≠0**

c)
Para b=0, rg(A)=dim(Imf)=2, por tanto una base de Imf es: **{(5,0,3)(0,-1,0)}**
entonces dim(N(f))=1 y para obtener una base resolvemos:

#5: $$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#6: $$\mathrm{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [x, y, z]\right)$$

#7: $$x = 0 \wedge y - a\cdot z = 0$$

Luego una base es **{(0,a,1)}**, obtenida haciendo z=1

III.- Sea f la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ que tiene por matriz asociada:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

a) Hallar los valores propios de A y una base de cada uno de los subespacios propios asociados.
b) ¿Es A diagonalizable?
c) En caso afirmativo,
hallar una matriz diagonal D semejante a A
dar una matriz P que permita la diagonalización de A
escribir la relación que existe entre A y D.
d) Dar una base B'= $\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right\}$ **de** $\mathbb{R}^3$ **formada por vectores propios de A tal que D = M(f, B').**
e) Expresar los vectores $f\left(\vec{v}_1\right), f\left(\vec{v}_2\right), f\left(\vec{v}_3\right)$ **como combinación lineal de los vectores de la base B'.**
f) ¿Es f biyectiva?
g) Hallar el subespacio de vectores invariantes por f.

Solución

a) Hallar los valores y vectores propios de A

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 3 & -3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \begin{cases} 0 \text{ simple} \\ 1 \text{ doble} \end{cases}}$$

Vectores propios

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 3 & -3 & 0-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 1$

$$(A-1\cdot I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-1 & -3 & -1 \\ 3 & -2-1 & -1 \\ 3 & -3 & 0-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{3x-3y-z=0$$

Una posible base del subespacio propios

$$\boxed{\{(1,1,0),(1,0,3)\}}$$

Para $\lambda = 0$

$$(A-0\cdot I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-0 & -3 & -1 \\ 3 & -2-0 & -1 \\ 3 & -3 & 0-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x-3y-z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

Una posible base del subespacio propios

$\{(1,1,1)\}$

que es la base del Núcleo de f.

b) ¿Es A diagonalizable?

A es diagonalizable, pues coincide para cada valor propio, el orden de multiplicidad de dicho valor propio como raíz de su polinomio característico con la dimensión del subespacio propio asociado.

c) En caso afirmativo,

hallar una matriz diagonal D semejante a A
dar una matriz P que permita la diagonalización de A
escribir la relación que existe entre A y D

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ formada por los valores propios en la diagonal principal

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ formada por los vectores propios en las columnas

$D = P\ A\ P^{-1}$

d) Dar una base B'= $\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right\}$ de R^3 formada por vectores propios de A tal que D = M(f, B')

B'= {$\vec{v}_1$ = (1, 1, 0), $\vec{v}_2$ = (1, 0, 3), $\vec{v}_3$ = (1, 1, 1)}.

e) Expresar los vectores $f\left(\vec{v}_1\right)$, $f\left(\vec{v}_2\right)$, $f\left(\vec{v}_3\right)$ como combinación lineal de los vectores de la base B'.

$$f\left(\vec{v}_1\right) = \vec{v}_1 = 1\,\vec{v}_1 + 0\,\vec{v}_2 + 0\,\vec{v}_3$$

$$f\left(\vec{v}_2\right) = \vec{v}_2 = 0\,\vec{v}_1 + 1\,\vec{v}_2 + 0\,\vec{v}_3$$

$$f\left(\vec{v}_3\right) = 0\,\vec{v}_3 = \vec{0} = 0\,\vec{v}_1 + 0\,\vec{v}_2 + 0\,\vec{v}_3$$

f) ¿Es f biyectiva?

No, pues detA = 0.

g) Hallar el subespacio de vectores invariantes por f.

Como λ = 1 es valor propio de f, el subespacio de vectores invariantes por f coincide con el subespacio propio asociado al valor propio w = 1:

Es el subespacio engendrado por los vectores **$\vec{v}_1$ = (1, 1, 0) y $\vec{v}_2$ = (1, 0, 3)**.