I.- En el espacio vectorial R^3 se tienen las siguientes bases:

$B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $B'=\{(1,1,0),(0,-1,0),(1,0,1)\}$ **y** $B^*=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$**. Sean (x, y, z), (x', y', z') y (x^*, y^*, z^*) las coordenadas de un vector en las bases B, B' y B^* respectivamente.**

a.- Escribir la ecuación matricial del cambio de base de B a B'.

b.- Sabiendo que $\begin{cases} x = x^* + z^* \\ y = y^* - z^* \\ z = -x^* + z^* \end{cases}$ **, dar las coordenadas de los vectores** $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ **respecto de B.**

Solución

II.- Se consideran dos subespacios de R^4 siguientes:

$$F_1 = \{ (\alpha,\beta,0,0) \ / \ \alpha,\beta \in R\}$$

$$F_2 = < (0,1,0,0), \ (0,0,1,0) >$$

Hallar las ecuaciones paramétricas de $F_1 + F_2$**. La suma del apartado anterior ¿es directa?**

Solución

I.- En el espacio vectorial R^3 se tienen las siguientes bases:

$B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $B'=\{(1,1,0),(0,-1,0),(1,0,1)\}$ **y** $B^*=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$. **Sean (x, y, z), (x', y', z') y (x^*, y^*, z^*) las coordenadas de un vector en las bases B, B' y B^* respectivamente.**

a.- Escribir la ecuación matricial del cambio de base de B a B'.

b.- Sabiendo que $\begin{cases} x = x^* + z^* \\ y = y^* - z^* \\ z = -x^* + z^* \end{cases}$ **, dar las coordenadas de los vectores** $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ **respecto de B.**

Solución:

a) La expresión matricial que relaciona las coordenadas de un vector respecto de las dos bases es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'}$

y la ecuación del cambio de base de B a B' es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B}$$

b) Disponemos como dato las ecuaciones del cambio de base de B^* a B. Su expresión matricial será:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}_{B^*}$$

Por tanto, las columnas de la matriz son las coordenadas de los vectores de B^* en B, es decir:

$$B^*=\{(1,0,-1)_B,(0,1,0)_B,(1,-1,1)_B\}$$

$$\boxed{\vec{u}_1=(1,0,-1);\vec{u}_2=(0,1,0);\vec{u}_3=(1,-1,1)}$$

II.- Se consideran dos subespacios de R^4 siguientes:

$$F_1 = \{ (\alpha, \beta, 0, 0) \ / \ \alpha, \beta \in R \}$$

$$F_2 = < (0,1,0,0), \ (0,0,1,0) >$$

Hallar las ecuaciones paramétricas de $F_1 + F_2$. La suma del apartado anterior ¿es directa?

Solución:

Bases de F_1 y F_2 son: $B_1 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$, y $B_2 = \{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$, respectivamente.

Una base B_{12} de $F_1 + F_2$ está constituida por los vectores linealmente independientes de $B_1 \cup B_2 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$, es decir:

$$B_{12} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$$

Por tanto, $F_1 + F_2 = \{ (\alpha, \beta, \gamma, 0) \ / \ \alpha, \beta, \gamma \in R \}$

Unas ecuaciones paramétricas pueden ser: $\boxed{\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \\ t = 0 \end{cases}}$

$F_1 + F_2$ **no es suma directa** pues $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$