SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.
MATRICES Y DETERMINANTES.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MATRICES Y DETERMINANTES.

1. Introducción a los sistemas lineales

Históricamente, el primer trabajo de álgebra lineal consistió en resolver un sistema de ecuaciones lineales. El problema de encontrar métodos sencillos y poco laboriosos para resolver sistemas sigue interesando a muchos investigadores. Existen analogías entre la geometría analítica y el álgebra lineal que nos conducen al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales: Una recta en el plano viene dada por una ecuación lineal de dos variables (las dos coordenadas de un punto arbitrario de la recta). Un plano en el espacio viene dado por una ecuación lineal en tres variables; una recta en el espacio, por dos ecuaciones lineales con tres variables.

1.1. Ecuación lineal

Definiciones:

Se llama **ecuación lineal** a una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$, así como el término independiente b, son escalares de un cuerpo conmutativo K, y $x_1, x_2, ..., x_n$ son las incógnitas.

Una **solución particular** de la ecuación anterior es una n-upla de escalares $(c_1, c_2, ..., c_n)$ tal que $a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n = b$.

La **solución general** (ó simplemente la solución) de la ecuación es el conjunto formado por todas las soluciones particulares.

Resolver una ecuación es hallar su solución general.

Tipos de ecuaciones lineales:

- **Ecuación compatible** es aquella que tiene alguna solución. Puede ser, a su vez, **compatible determinada** cuando tiene una única solución, y **compatible indeterminada** cuando tiene más de una solución (en este caso tendrá infinitas soluciones).

- **Ecuación incompatible** es aquella que no tiene ninguna solución:
  $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = c$, con $c \neq 0$.

- **Ecuación homogénea** es la que tiene nulo el término independiente; es decir, es una ecuación de la forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$.

Evidentemente, una ecuación homogénea es siempre compatible puesto que siempre admite la llamada **solución trivial**: (0,0,...,0).

Dada la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, se llama **ecuación homogénea asociada** a la misma, a la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$.

1.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Definiciones:

Se llama **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** a un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$S \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde los **coeficientes** $\mathbf{a_{ij}}$, i=1,...,m, j=1,...,n, y los **términos independientes** $\mathbf{b_i}$, i=1,...,m, son escalares de un cuerpo K y $\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n}$ son las **incógnitas**.

Una **solución particular** del sistema anterior es una n-upla de escalares $(c_1, c_2, ..., c_n)$ que sea solución de cada una de las m ecuaciones del sistema.

La **solución general** (ó simplemente la solución) del sistema es el conjunto formado por todas las soluciones particulares.

Resolver un sistema es hallar su solución general.

Tipos de sistemas lineales:

- **Sistema compatible** es aquél que tiene alguna solución. Puede ser, a su vez, **compatible determinado** cuando tiene una única solución, y **compatible indeterminado** cuando tiene más de una solución (en este caso tendrá infinitas soluciones).

- **Sistema incompatible** es aquél que no tiene ninguna solución.

- **Sistema homogéneo** es el que tiene nulos los términos independientes; es decir, es un sistema de la forma: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$.

Propiedades de los sistemas homogéneos

i) La n-úpla $(0,0,\cdots,0)$ es siempre una solución particular de todo sistema homogéneo y se denomina *solución trivial*.

ii) Si la n-úpla $(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ es una solución particular de un sistema homogéneo entonces también lo es la n-úpla $(\lambda s_1,\lambda s_2,\cdots,\lambda s_n)$ sea cual sea $\lambda \in \mathbf{K}$.

iii) Si las n-úplas $(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ y $(s'_1,s'_2,\cdots,s'_n)$ son dos soluciones particulares de un sistema homogéneo también lo es la n-úpla suma $(s_1+s'_1,s_2+s'_2,\cdots,s_n+s'_n)$

Definición: Dado el sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$, se llama **sistema homogéneo asociado** al mismo, al sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

1.3. Sistemas equivalentes

Dos sistemas S y S’ son **equivalentes** cuando tienen la misma solución general, es decir, cuando toda solución de S lo es de S’ y viceversa.

Se llaman **operaciones elementales** entre las ecuaciones de un sistema S a las operaciones que se puedan efectuar en las mismas, de forma que el nuevo sistema obtenido sea equivalente a S. Son las siguientes:

i. Multiplicar una ecuación cualquiera de S por un escalar no nulo.

ii. Intercambiar de lugar entre sí dos ecuaciones de S.

iii. Sumar a una ecuación una combinación lineal de otras ecuaciones; es decir, sustituir una ecuación e_i de S por la ecuación $\lambda e_i + \mu e_j$ siendo $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ no nulos e $i, j = 1,\cdots,m$.

Consecuencia

Si en S una ecuación es combinación lineal de las restantes entonces, el sistema que resulta, al suprimir dicha ecuación, es equivalente a S. En particular, si una de las ecuaciones es nula, el sistema que resulta al suprimirla es equivalente a S

A lo largo del tema se estudiarán métodos para analizar de qué tipo es un sistema y métodos de resolución del sistema.

1.4. Método de Gauss para la resolución de sistemas. Sistemas en forma escalonada o triangular

Sea S un sistema de ecuaciones lineales, el método de Gauss consiste en transformar S, mediante operaciones elementales, en un sistema S' de forma escalonada o triangular cuya resolución es inmediata o sea evidente que sea incompatible.

Diremos que un sistema S' está en forma escalonada o es escalonado si es de la forma

$$S' \equiv \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1j}x_j + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2j}x_j + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a'_{pj}x_j + \cdots + a'_{pn}x_n = b'_p \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b'_{p+1} \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b'_m \end{cases} \quad \text{con } (p<n)$$

Diremos que un sistema S' está en forma triangular o es triangular si es de la forma

$$S' \equiv \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

Distinguiremos tres casos:

1. El nº de ecuaciones **no nulas** de S' **es igual** al nº de incógnitas y $b_{ii} \neq 0$ para $i = 1, \cdots, n$, entonces el sistema es **compatible determinado**.

Ejemplo 1:

Resolver el sistema:

$$S \equiv \begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=4 \end{cases} \underset{\substack{-2\cdot 2^a+3\cdot 1^a \\ 5\cdot 1^a-2\cdot 3^a}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ -y-10z=28 \\ -3y-16z=42 \end{cases} \underset{-3\cdot 2^a+3^a}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ -y-10z=28 \\ 14z=-42 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(10-y+2z)=1 \\ y=-10z-28=2 \\ z=-3 \end{cases}$$ .Por tanto **x=1, y=2, z=-3.**

2. El nº de ecuaciones **no nulas** de S' es **menor** que el nº de incógnitas y **no hay** ecuaciones incompatibles**,** entonces el sistema es **compatible indeterminado**.

Ejemplo 2:

Resolver el sistema:

$$S \equiv \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+5y-8z=4 \\ 3x+8y-13z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ y-2z=2 \\ 2y-4z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ y-2z=2 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ y-2z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=1-2y+3z=-3-z \\ y=2+2z \end{cases}$$. Por tanto **x=-3-z, y=2+2z, z=z.**

☞ ***Observemos que*** $\begin{cases} x=-3-z \\ y=2+2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3-\lambda \\ y=2+2\lambda \quad \lambda\in\mathbf{R} \\ z=\lambda \end{cases}$**.**

☞ Estas ecuaciones reciben el nombre de ***ecuaciones paramétricas del conjunto solución.***

☞ Podemos escribir $\boxed{\{(-3-\lambda, 2+2\lambda, \lambda) \ \lambda\in\mathbf{R}\}}$.

☞ λ recibe el nombre de parámetro**.**

3. **Alguna** ecuación de S' **es incompatible**, entonces el sistema es **incompatible**.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$S \equiv \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+3y-4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ -7y+11z=10 \\ -7y+11z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ -7y+11z=10 \\ ¡\ 0=-3\ ! \end{cases}$$

luego S es incompatible.

1.5. Método de Gauss-Jordan

Procediendo de manera análoga al método anterior, se trata de transformar S, mediante operaciones elementales y siempre que sea posible, en un sistema S' de la siguiente forma que denominaremos **diagonal**

$$S' \equiv \begin{cases} x_1 \qquad\qquad = b'_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_n = b'_n \end{cases}$$

Ejemplo:

Resolver el sistema homogéneo asociado al sistema del **ejemplo 1**.

$$S_{H_1} \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \\ 5x + 4y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ \quad - y - 10z = 0 \\ \quad - 3y - 16z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ \quad - y - 10z = 0 \\ \qquad 14z = \text{-}0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(-y + 2z) = 0 \\ y = -10z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$. Por tanto **x=y=z=0**

Obsérvese que S_{H_1} procede de un sistema compatible determinado cuya solución puede escribirse en la forma:

$$\{(1,2,\text{-}3) = (1,2,\text{-}3) + (0,0,0)\}$$

Ejemplo:

Resolver el sistema homogéneo asociado al sistema del **ejemplo 2**.

$$S_{H_2} \equiv \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y - 8z = 0 \\ 3x + 8y - 13z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ \quad y \text{ - } 2z = 0 \\ \quad 2y \text{ - } 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ \quad y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y + 3z = -z \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ,\ \lambda \in \mathbf{R}\ .$$

Obsérvese que S_{H_2} procede de un sistema compatible indeterminado cuya solución se puede escribir en la forma:

$$\{(-3-\lambda, 2+2\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbf{R}\} = \{(-3,2,0) + \lambda(-1,2,1), \lambda \in \mathbf{R}\}$$

2. Matrices

2.1. Matriz

Definición:

Una **matriz** es un conjunto de elementos de un cuerpo K ordenados en filas y columnas.

Si la matriz tiene m filas y n columnas, se escribe así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

El elemento general $\mathbf{a_{ij}}$ de la matriz tiene asociados el subíndice **i**, que indica la fila, y el subíndice **j** que indica la columna en las que se encuentra dicho elemento.

Se dice que la matriz A tiene **dimensión** $\mathbf{m \times n}$; si m = n, diremos que A es una matriz de **orden n**.

Se designa por $\mathbf{M_{m\times n}}$ el conjunto formado por las matrices con m filas y n columnas, y por $\mathbf{M_{m\times n}(K)}$ al conjunto de matrices de dimensión m × n cuyos elementos son escalares del cuerpo K.

Definición:

Matrices equidimensionales son las que tienen la misma dimensión; dos matrices equidimensionales A y B son ***iguales*** cuando $a_{ij} = b_{ij}$, i=1,...,m, j=1,...,n.

Tipos de matrices:

Una **matriz** es **cuadrada** cuando m = n.

La **matriz nula** de dimensión m × n es la que tiene nulos todos sus elementos.

Una **matriz fila** es la que tiene una única fila.

Una **matriz columna** es la que tiene una única columna.

2.2. Matrices cuadradas

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n} = (a_{ij})_n$ una **matriz cuadrada**, $A \in M_n(K)$, entonces:

La **diagonal principal** de A está formada por los elementos a_{ij} tales que i = j, es decir, $\mathbf{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}}$. Los elementos $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$ constituyen la **diagonal secundaria**.

Matriz diagonal es aquella que tiene nulos todos sus elementos, salvo, a lo sumo, los de la diagonal principal.

Matriz escalar es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal principal iguales.

La **matriz unidad de orden n** tiene nulos todos sus elementos excepto los de la diagonal principal que son unos; se denota por $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$

Una **matriz** cuadrada es **simétrica** cuando $a_{ij} = a_{ji}$, i,j=1, 2, ..., n.

Una **matriz** cuadrada es **antisimétrica** cuando $a_{ij} = -a_{ji}$, i,j=1, 2, ..., n.

Matriz triangular superior es la que tiene nulos todos los elementos por debajo de la diagonal principal.

Matriz triangular inferior es la que tiene nulos todos los elementos por encima de la diagonal principal.

Definición:

Se llama **matriz traspuesta** de la matriz $A \in M_{m\times n}$ a la matriz $A^t \in M_{n\times m}$ que se obtiene al intercambiar cada fila con la correspondiente columna de A; es decir, $a^t_{ij} = a_{ji}$, i, j = 1, 2, ...,n.

Ejemplo: La traspuesta de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 3}$ es $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}$.

Proposición: Sea A una matriz cuadrada. Se verifica:

1) A es **simétrica** si y solo si $A^t = A$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es simétrica y $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A$

2) A es **antisimétrica** si y solo si $A^t = -A$; es decir, $A=(a_{ij})$ tal que $a_{ij}=-a_{ji}$ $\forall i, j = 1, \cdots, n$. Obsérvese que $a_{ii}=-a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0 \;\; \forall i = 1, \cdots, n$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica y $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ = -A

2.3. Operaciones con matrices

Vamos a designar abreviadamente por $\mathbf{M}_{m\times n}$ al conjunto de todas las matrices de **m** filas y **n** columnas cuyos elementos pertenecen al cuerpo conmutativo **K**. Definimos las siguientes operaciones:

2.3.1. Suma de matrices

Para cualesquiera matrices $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in \mathbf{M}_{m\times n}$ se define la suma de A y B y se designa A+B como la matriz $C=(c_{ij}) \in \mathbf{M}_{m\times n}$ tal que

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad \forall i = 1, \cdots, m, \; j = 1, \cdots, n$$

La suma es una operación interna en $\mathbf{M}_{m\times n}$ $\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_{m\times n} \times \mathbf{M}_{m\times n} & \xrightarrow{+} & \mathbf{M}_{m\times n} \\ (A, B) & \longrightarrow & C \end{array}$ y es fácil comprobar que $(\mathbf{M}_{m\times n}, +)$ tiene estructura de **grupo conmutativo o abeliano**, es decir, se verifican las propiedades:

1. **Asociativa** : $A+(B+C)=(A+B)+C \;\; \forall A, B, C \in \mathbf{M}_{m\times n}$.
   $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij}) \in \mathbf{M}_{m\times n}$ puesto que $A+(B+C)= (a_{ij})+[(b_{ij})+(c_{ij})] =$
   $= [(a_{ij})+(b_{ij})]+(c_{ij})=(A+B)+C$, ya que se cumple la propiedad asociativa en **K.**

2. **Elemento neutro:** Es la matriz cuyos elementos son todos nulos, la designaremos por O:
   $A+O=O+A=A \;\; \forall A \in \mathbf{M}_{m\times n}$.

$A=(a_{ij})\in \mathbf{M}_{m\times n}$ y $O=(0)$ es el elemento neutro, puesto que $A+O=(a_{ij})+(0)=(a_{ij}+0)=(0+a_{ij})=O+A=A$.

3. **Elemento simétrico:** Es la matriz cuyos elementos son los opuestos respectivos a los de la matriz dada. $\forall A \in \mathbf{M}_{m\times n}$, designaremos por $-A\in \mathbf{M}_{m\times n}$ a su matriz opuesta: $A+(-A)=(-A)+A=O$.
   $A=(a_{ij})\in \mathbf{M}_{m\times n}$ y la matriz simétrica u opuesta de A, será: $-A=(-a_{ij})\in \mathbf{M}_{m\times n}$ ya que
   $A+(-A)=(a_{ij})+(-a_{ij})=(a_{ij}-a_{ij})=(0)=O$
   $(-A)+A=(-a_{ij})+(a_{ij})=(-a_{ij}+a_{ij})=(0)=O$, ya que se cumple la propiedad de existencia de elemento opuesto en **K.**

4. **Conmutativa** : $A+B=B+A \quad \forall A,B \in \mathbf{M}_{m\times n}$.
   $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in \mathbf{M}_{m\times n}$, ahora $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})=B+A$, como en los casos anteriores son elementos de un cuerpo conmutativo **K**.

2.3.2. Producto por un escalar.

Para cualquier $\lambda \in \mathbf{K}$ y cualquier matriz $A=(a_{ij})\in \mathbf{M}_{m\times n}$ se define el producto $\lambda\cdot A$ como otra matriz $D=(d_{ij})\in \mathbf{M}_{m\times n}$ tal que $d_{ij}=\lambda\, a_{ij}$ $\forall i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$

Este producto es una **operación externa** $\begin{array}{l}\mathbf{K}\times M_{m\times n}\xrightarrow{\cdot} M_{m\times n}\\ (\lambda,A)\longrightarrow D\end{array}$ que verifica las siguientes propiedades:

5. **Distributiva 1ª:** $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B \quad \forall\lambda \in\mathbf{K}$ y $\forall A,B \in \mathbf{M}_{m\times n}$. ya que
   $$\lambda(a_{ij}+b_{ij})=\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}\ \ \forall i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n \text{ por ser } \lambda, a_{ij}, b_{ij}\in\mathbf{K}.$$

6. **Distributiva 2ª:** $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbf{K}\ \ \forall A\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ya que
   $$(\lambda+\mu)a_{ij}=\lambda a_{ij}+\mu a_{ij}\quad \forall i=1,\cdots,m, \forall j=1,\cdots,n \text{ por ser } a_{ij},\lambda,\mu\in\mathbf{K}\ .$$

7. **Asociativa mixta** : $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbf{K}\ \ \forall A\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ya que
   $$\lambda(\mu a_{ij})=(\lambda\mu)a_{ij}\quad \forall i=1,\cdots,m, \forall j=1,\cdots,n \text{ por ser } a_{ij},\lambda,\mu\in\mathbf{K}\ .$$

8. El elemento unidad del cuerpo **K** verifica que : $1\cdot A=A \quad \forall A\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ya que
   $$1\cdot a_{ij}=a_{ij}\quad \forall i=1,\cdots,m, \forall j=1,\cdots,n \text{ por ser } a_{ij}\in\mathbf{K}$$

Estas 8 propiedades que posee el conjunto $(\mathbf{M}_{m\times n},+,\cdot)$ *constituyen una nueva estructura algebraica que recibe el nombre de* ***espacio vectorial sobre el cuerpo conmutativo K****, o simplemente* ***K-espacio vectorial.*** *Así diremos que:*

$(\mathbf{M}_{m\times n},+,\cdot)$ **es el K-espacio vectorial del conjunto de matrices de dimensión m×n.**

Usualmente **K=R** (conjunto de los números reales).

Ejemplo:

Efectuar $3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

$$3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ -24 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -1 \\ -27 & 9 \end{pmatrix}$$

2.3.3. Producto de matrices

Sean $A = (a_{ik}) \in \mathbf{M}_{m\times n}$ y $B = (b_{kj}) \in \mathbf{M}_{n\times p}$ definimos el producto de A y B, que designaremos AB, como otra matriz $C=(c_{ij})\in \mathbf{M}_{m\times p}$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad \forall i = 1,\cdots,m \quad \forall j = 1,\cdots,p$$

Obviamente el producto de dos matrices cualesquiera no es posible en general.

1. **Asociativa:** Si A, B, C se pueden multiplicar, es decir, $A\in \mathbf{M}_{m\times n}$, $B\in \mathbf{M}_{n\times p}$, $C\in \mathbf{M}_{p\times q}$, entonces se verifica (AB)C =A(BC).

   $A=(a_{ik})_{mxn}$, $B=(b_{kj})_{nxp}$, $C=(c_{jl})_{pxq}$, así el elemento que ocupa el lugar (i,j) en la matriz AB es $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ y el elemento que ocupa el lugar (i,l) en la matriz (AB)C resulta $\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)c_{jl}$. En el segundo miembro A(BC) el elemento genérico (i,l) es $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj}c_{jl}\right)$ que es igual al anterior porque se cumple la propiedad asociativa de elementos de **K**.

2. **Distributiva**: Cuando sea posible efectuar las operaciones A(B+C) y (B+C)A, se verifica
$$\begin{cases} A(B+C) = AB + AC \\ (B+C)A = BA + CA \end{cases}.$$

Veamos la demostración de $A(B+C)=AB+AC$. Sea $A\in \mathbf{M}_{m\times n}$, $B,C\in \mathbf{M}_{n\times p}$, es decir, $A=(a_{ik})_{mxn}$, $B=(b_{kj})_{nxp}$, $C=(c_{kj})_{nxp}$. Entonces:

$$A(B+C)=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(b_{kj}+c_{kj}\right)\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}\right)\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}b_{kj}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}c_{kj}\right)\right)=AB+AC$$

3. $\forall A\in \mathbf{M}_{m\times n}$, la matriz identidad I_m verifica que $I_mA=A$, y análogamente la matriz identidad I_n verifica que $AI_n=A$.

Es fácil ver que:

$$AI_n=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=A$$

4. El producto de dos matrices A y B **no** es conmutativo en general, pues si $A\in \mathbf{M}_{m\times n}$ y $B\in \mathbf{M}_{n\times p}$ siendo $m\neq p$, entonces ni siquiera es posible efectuar BA.

Ejemplo:

Efectuar, cuando sean posibles las siguientes operaciones:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1\end{pmatrix}$.

Solución: **No** se puede efectuar la operación por no estar definido dicho producto matricial (el nº de columnas de la 1ª matriz es distinto al nº de filas de la 2ª).

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución: **No** se puede efectuar la operación por no estar definido dicho producto matricial (el nº de columnas de la 1ª matriz es distinto al nº de filas de la 2ª).

c) Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Calcular AB y BA.

Solución: **Sí** es posible efectuar AB obteniéndose $AB = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, pero **no** es posible efectuar BA porque el nº de columnas de la matriz B es distinto al nº de filas de la matriz A

d) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular AB y BA.

Solución: **Sí** es posible efectuar AB y BA obteniéndose:

$AB = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, y $BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ que son matrices **distintas**.

2.3.4. Propiedades de la matriz traspuesta

El operador traspuesta cumple las siguientes propiedades $\forall A, B \in \mathbf{M}_{m\times n}$:

i) $(A^t)^t = A$.

En efecto: $(A^t)^t = \left((a_{ij})^t\right)^t = (a_{ji})^t = (a_{ij}) = A$

ii) $(A+B)^t = A^t + B^t$.

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{m\times n}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbf{M}_{m\times n}$, luego $A^t = (a_{ji}) \in \mathbf{M}_{n\times m}$ y $B^t = (b_{ji}) \in \mathbf{M}_{n\times m}$. Entonces:

$(A+B)^t = ((a_{ij})+(b_{ij}))^t = (a_{ij}+b_{ij})^t = (a_{ji}+b_{ji}) = (a_{ji})+(b_{ji}) = A^t+B^t$.

iii) $(kA)^t = kA^t \quad \forall k \in \mathbf{K}$.

$$(kA)^t = \left(k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ & \dots & & \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}^t =$$

$$=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{21} & \dots & ka_{n1} \\ ka_{12} & ka_{22} & \dots & ka_{n2} \\ & \dots & & \\ ka_{1m} & ka_{2m} & \dots & ka_{nm} \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ & \dots & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = kA^t.$$

iv) $(AB)^t = B^tA^t$.

Si $A=(a_{ik}) \in \mathbf{M}_{m\times n}$, $B=(b_{kj}) \in \mathbf{M}_{n\times p}$ entonces

$$(AB)^t = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)^t = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{jk}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}a_{ki}\right) = B^tA^t$$

$\boxed{2.3.5.}$ Producto de matrices cuadradas

Designaremos por $\mathbf{M}_n$, de ahora en adelante, al conjunto de las matrices cuadradas de orden n cuyos elementos pertenecen al cuerpo conmutativo **K**.

El producto de matrices cuadradas de orden n siempre está definido y es **una operación interna en $\mathbf{M}_n$**:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n &\xrightarrow{\cdot} \mathbf{M}_n \\ (A,B) &\longrightarrow AB = C \end{aligned}$$ tal que $C=(c_{ij})$ y

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad \forall i,j = 1,\cdots,n$$

y verifica las siguientes propiedades:

1. **Asociativa**: $(AB)C=A(BC) \qquad \forall A,B,C \in \mathbf{M}_n$.

2. **Elemento unidad:** La matriz unidad de orden n I_n verifica $I_nA=AI_n=A \ \ \forall A \in \mathbf{M}_n$.

Por tanto, $(\mathbf{M}_n,\cdot)$ es un **semigrupo con elemento unidad**. Además se verifica la propiedad:

3. **Distributiva** $\left.\begin{cases} A(B+C) = AB+AC \\ (B+C)A = BA+CA \end{cases}\right\} \forall A,B,C \in \mathbf{M}_n$.

Luego $(\mathbf{M}_n,+,\cdot)$ es un **anillo con elemento unidad**.

En el anillo anterior existen divisores de cero; puesto que el producto de dos matrices distintas del elemento neutro de la adición (matriz nula) es igual a la matriz dada.

💣 En **R** se verifica que si a,b∈**R**, y $ab=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ \text{ó} \\ b=0 \end{cases}$. Sin embargo esto no sucede en $\mathbf{M}_n$.

Para $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se verifica que $AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$,

donde O es la matriz nula. Es decir, en el conjunto $\mathbf{M}_n$ de la igualdad **AB=O** ***no se puede deducir, en general, que o bien A es la matriz nula, o bien B es la matriz nula***.

Observación

$(\mathbf{M}_n,\cdot)$ **no** tiene la **propiedad** del elemento inverso, pero hay matrices que **sí** tienen elemento inverso, entonces definimos:

2.3.6. Matriz inversa

Llamaremos **matriz inversa** de $A\in\mathbf{M}_n$, y designaremos A^{-1}, a la matriz cuadrada de orden n, que verifique que $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$

Propiedades de la inversa

El operador inversa de una matriz verifica las siguientes propiedades $\forall A,B\in\mathbf{M}_n$:

1. La inversa de una matriz, si existe, es **única.**
2. Si A y B son inversibles, entonces AB es inversible y $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
3. Si A es inversible, entonces $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
4. Si A es inversible, entonces $\left(A^{t}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{t}$

Demostración:

1. Sean A^{-1} y B sendas matrices inversas de la matriz A, entonces:

$$BA=I_n \Rightarrow \overbrace{BA}^{I_n}A^{-1}=I_nA^{-1} \Rightarrow \boxed{A^{-1}=B}$$

2. Demostremos la definición de inversa $(AB)^{-1}AB=I_n$

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)AB=B^{-1}\overbrace{A^{-1}A}^{I_n}B=\overbrace{B^{-1}B}^{I_n}=I_n \Rightarrow \boxed{(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}}$$

3. Por definición de inversa $AA^{-1}=I_n$ podemos decir que A^{-1} es la inversa de A y que A es la inversa de A^{-1}, luego $\boxed{\left(A^{-1}\right)^{-1}=A}$

4. Demostremos que $A^{t}(A^{-1})^{t}=I$. En efecto, $A^{t}(A^{-1})^{t}=(A^{-1}A)^{t}=I^{t}=I$. Por tanto $\boxed{\left(A^{t}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{t}}$.

2.3.7. Matrices por bloques

Definición:

Dada $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$ se llama **submatriz** de A a cualquier matriz obtenida por eliminación de un cierto número de filas, o de columnas, o de ambas a la vez, en la matriz A.

Para realizar ciertos cálculos resulta conveniente, en algunas ocasiones, repartir los elementos de una matriz A, mediante rectas verticales y horizontales, en submatrices que denominaremos ***bloques***, cajas o células de A.

Ejemplo: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \vdots & 6 & 7 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{pmatrix} \text{ siendo } \begin{cases} A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \\ A_{12} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \end{pmatrix} \\ A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Las **operaciones** entre matrices por bloques se realizan análogamente a las operaciones entre matrices, con la única condición de que los bloques, submatrices, se puedan operar entre sí. Así:

Para **sumar** dos matrices A y B equidimensionales, por bloques, es necesario que:

i) Ambas estén divididas en el mismo nº de bloques.

ii) Los bloques correspondientes sean equidimensionales

Es decir, si $$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} & \vdots & A_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} & \vdots & A_{23} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \vdots & B_{12} & \vdots & B_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{21} & \vdots & B_{22} & \vdots & B_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \vdots & A_{12}+B_{12} & \vdots & A_{13}+B_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{21}+B_{21} & \vdots & A_{22}+B_{22} & \vdots & A_{23}+B_{23} \end{pmatrix} \text{ siendo } \begin{cases} \dim A_{11} = \dim B_{11} \\ \dim A_{12} = \dim B_{12} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dim A_{23} = \dim B_{23} \end{cases}$$

Ejemplo: $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 4 & 1 \\ 2 & 1 & \vdots & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & \vdots & 0 & 0 \\ 7 & 1 & \vdots & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & \vdots & 4 & 1 \\ 9 & 2 & \vdots & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

El producto de un escalar cualquiera $\lambda \in \mathbf{K}$ por una matriz A, por bloques, se efectúa multiplicando λ por cada bloque. Es decir, si $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{pmatrix}$, entonces $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \vdots & \lambda A_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda A_{21} & \vdots & \lambda A_{22} \end{pmatrix}$.

Para multiplicar dos matrices A y B, por bloques, es necesario que:

i) el nº de bloques columna de la matriz A sea igual al nº de bloques fila de la matriz B.

ii) los bloques correspondientes puedan multiplicarse según la regla general y esto ocurre cuando ***coincidan el número de columnas*** de los bloques que determinan la ***columna k*** en la matriz A (por bloques***) y el número de filas*** de los bloques que determinan ***la fila k*** de la matriz B (por bloques***)***.

Es decir, si $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{pmatrix}$, y $B=\begin{pmatrix} B_{11} & \vdots & B_{12} & \vdots & B_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{21} & \vdots & B_{22} & \vdots & B_{23} \end{pmatrix}$, entonces

$AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & \vdots & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} & \vdots & A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & \vdots & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} & \vdots & A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23} \end{pmatrix}$ cuando sean posibles las operaciones indicadas para los bloques, es decir, **nº de columnas de la primera columna de bloques de A**: A_{11}, A_{21}=**nº de filas de la primera fila de bloques de B**: B_{11}, B_{12}, B_{13} y análogamente para la 2ª columna de bloques de A con la 2ª fila de bloques de B.

Obsérvese que una vez hecha esta elección (nº de bloques columna en A y nº de bloques fila en B multiplicables) podemos elegir **arbitrariamente** el nº de bloques fila en A y el nº de bloques columna en B,

Ejemplo**:** Efectuar el producto de A y B, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si tomamos **2 bloques columna** en A, por ejemplo $A=\begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 2 & 3 \\ 0 & \vdots & 4 & 5 \end{pmatrix}$, entonces por i)

hemos de tomar **2 bloques fila** en B, tales que por ii) el 1º bloque fila de B tenga **una única** fila y el 2º tenga **dos filas** $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ahora podemos elegir **arbitrariamente** el nº de bloques fila en A y el nº de bloques columna en B, por ejemplo. A= $\begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 2 & 3 \\ 0 & \vdots & 4 & 5 \end{pmatrix}$,

B= $\begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \vdots & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} 1+0 & \vdots & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 6 & 11\\3 & 12 & 21\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & \vdots & 1 & 6 & 11 \\ 4 & \vdots & 3 & 12 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 11 \\ 4 & 3 & 12 & 21 \end{pmatrix}$$

También podríamos haber tomado dos bloques columna en B, por ejemplo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 2 & 3 \\ 0 & \vdots & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & \vdots & 3 & 4 \\ 0 & -1 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 11\\12 & 21\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 1 & \vdots & 6 & 11 \\ 4 & 3 & \vdots & 12 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 11 \\ 4 & 3 & 12 & 21 \end{pmatrix}.$$

Observación

Como consecuencia del cálculo del producto de matrices por bloques, se puede hallar la inversa de una matriz por bloques aplicando la propiedad de elemento inverso, mediante la resolución de un sistema de ecuaciones matricial, ***siempre que conozcamos la inversa de algún bloque.***

Ejemplo: Hallar la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Consideramos la matriz A dividida en los bloques $A=\left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$, es decir $\left\{A_{11}=(1), A_{12}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ A_{23}=\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}\right\}$, y designamos $A^{-1}=\left(\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$, entonces por definición de matriz inversa: $AA^{-1}=I_n\Rightarrow$

$\left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ y por ser inversibles A_{11} y A_{22}:

$$\begin{cases} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=1=I_1 \\ A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}=O \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=O \\ A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=I_2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 1B_{11}=1\Rightarrow B_{11}=1 \\ 1B_{12}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B_{12}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}B_{21}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow B_{21}=\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ A_{22}B_{22}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=I_2\Rightarrow B_{21}=\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \end{cases}.$$

Sabiendo que $\begin{cases} A_{11}^{-1}=1^{-1}=1 \\ A_{22}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\2 & -1\end{pmatrix} \end{cases}\Rightarrow$ Luego $\boxed{A^{-1}=\left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right)}$

2.4. Expresión matricial de un sistema lineal

Dado el sistema lineal $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$, se llama **matriz de los coeficientes ó matriz del sistema** a la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

La **matriz de los términos independientes** es: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$.

La **matriz ampliada** del sistema es: $A^* = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{matrix} \end{array}\right)$.

Por último, la **matriz de las incógnitas** es: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Con esta notación, tal como se ha definido el producto de matrices, el sistema de partida puede escribirse en la forma:

$$AX = B$$

Ejemplo**:** El sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$ puede también escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: El sistema $S \equiv \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 7 \\ x - 2y - 5z = 3 \end{cases}$ en forma matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Todo sistema homogéneo S_H se escribe, en forma matricial, como **AX=O** dónde A es la matriz de los coeficientes, **X** la matriz columna de las incógnitas y **O** la matriz columna nula correspondiente.

Ejemplo: El sistema $S \equiv \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Determinante de una matriz cuadrada

3.1. Determinante de una matriz cuadrada de orden 2.

Dado el sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ de dos ecuaciones con dos incógnitas, ¿bajo qué condiciones tiene solución única?

Multiplicando la primera y la segunda ecuación por a_{21} y a_{11}, respectivamente, y restando luego de la segunda ecuación la primera, se obtiene:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Si $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$, entonces $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

Análogamente, multiplicando la primera y la segunda ecuación por a_{22} y a_{12}, respectivamente, y restando luego de la segunda ecuación la primera, se obtiene:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

Si $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$, entonces $x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

Parece que es decisivo el que no se anule la expresión $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ para que el sistema planteado tenga solución única.

Definición:

El **determinante de la matriz** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$ es el escalar $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

se escribe así: $|A| = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Con esta notación, el sistema planteado anteriormente tiene solución única si y sólo si el determinante de la matriz de los coeficientes $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ y la solución es: $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}}{|A|}$, $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|}$.

Queda entonces definida la aplicación $\begin{array}{l} \mathbf{M}_2 \xrightarrow{|\,|} \mathbf{K} \\ A \longrightarrow |A| \end{array}$

3.2. Determinante de una matriz cuadrada de orden 3

Del mismo modo, efectuando sencillas operaciones con las ecuaciones del sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$, puede comprobarse que dicho sistema tiene solución única si y solo si $a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \neq 0$.

Esto nos lleva al concepto de determinante de una matriz de orden tres:

Definición:

El **determinante de la matriz** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(K)$ es el escalar: $a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$; se escribe:

$$|A| = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

La expresión que nos da la definición se llama ***desarrollo del determinante por la primera fila***. Sustituyendo los determinantes de orden dos que aparecen en la misma por sus respectivos desarrollos, queda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Esta nueva forma de expresar el determinante de una matriz de orden tres se llama: **Regla de Sarrus** para el cálculo de un determinante.

Regla de Sarrus

El escalar $|A|$ también puede obtenerse mediante la suma de los productos de los elementos de la diagonal principal y sus dos paralelas menos la suma de los productos de los elementos de la diagonal secundaria y sus dos paralelas, en la siguiente matriz obtenida al añadir a la matriz A las dos primeras filas

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \\ a_{11} & a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \end{array}$$

Queda entonces definida la aplicación
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_3 &\xrightarrow{\;|\;|\;} \mathbf{K} \\ A &\longrightarrow |A| \end{aligned}$$

Con esta notación, el último sistema planteado tiene solución única si y solo si el determinante de la matriz de los coeficientes $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ y la solución es

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|},\; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|},\; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}\;.$$

$\boxed{3.3.}$ Propiedades de los determinantes de segundo y tercer orden:

1) El determinante de la traspuesta de A es igual al determinante de A, $|A^t| = |A|$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A| \text{ y para } A \in M_3(K)$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A|$$

2) Si una línea está formada exclusivamente por ceros, el determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \text{ y en el otro caso } |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ por Sarrus.}$$

3) Al intercambiar entre sí dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo.

Si intercambiamos la 1ª fila con la 2ª, entonces:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -|A|$$

y para $A \in M_3(K)$ si intercambiamos la 2ª fila con la 3ª, entonces:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{prop. 3ª} \\ \text{det. orden2}}}{=}$$

$$-a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -|A|$$

Si intercambiamos la 1ª fila con alguna de las otras dos la demostración se realiza directamente calculando los determinantes.

Para columnas también se cumple por la propiedad primera.

4) Un determinante que tenga dos líneas paralelas iguales, es cero.

Si intercambiamos las dos líneas de lugar, entonces aplicando la propiedad 3ª se obtiene $|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$.

5) Si A’ se obtiene a partir de A multiplicando una fila de A por un número k, entonces $|A'| = k|A|$.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ y para la matriz de orden 3:}$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - ka_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + ka_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$k\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) = k|A|$$

6) Si un determinante tiene dos líneas paralelas proporcionales, el determinante es cero.

Por la propiedad anterior sacando el valor de proporcionalidad resulta la propiedad 4) y su determinante es cero.

7) Si en un determinante los elementos de una línea son suma de dos sumandos, dicho determinante es igual a la suma de dos determinantes, uno de ellos con esa línea formada por los primeros sumandos y el resto de las líneas como las del determinante original, y el otro determinante análogo a éste, pero con los segundos sumandos en vez de los primeros.

Para el caso de orden dos y de la primera fila, por ejemplo, esta propiedad se expresaría así: $\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ y su comprobación es inmediata,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+a'_{11})a_{22} - (a_{12}+a'_{12})a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\text{Análogamente,} \begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}+a'_{11})\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (a_{12}+a'_{12})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (a_{13}+a'_{13})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a'_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a'_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a'_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

La demostración para cualquier otra fila es inmediata, o bien desarrollando los determinantes.

8) Si una línea es combinación lineal de otras líneas paralelas, entonces, el determinante es cero.

Si la primera fila de una matriz cuadrada resulta ser una combinación de las otras dos, es decir, $f_1 = \lambda f_2 + \mu f_3$; por las propiedades 7) y 6) resulta que su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{21}+\mu a_{31} & \lambda a_{22}+\mu a_{32} & \lambda a_{23}+\mu a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underset{\text{prop.7)}}{=} \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu a_{31} & \mu a_{32} & \mu a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underset{\text{prop.6)}}{=} 0+0=0.$$

9) Si a una línea se le suma una combinación lineal de otras líneas paralelas, entonces el determinante no varía.

Por la propiedad anterior, equivale a suma cero. Veamos la primera fila más una combinación lineal de las restantes $f_1 + \lambda f_2 + \mu f_3$, entonces:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21}+\mu a_{31} & a_{12}+\lambda a_{22}+\mu a_{32} & a_{13}+\lambda a_{23}+\mu a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underset{\text{prop.8)}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} \lambda a_{21}+\mu a_{31} & \lambda a_{22}+\mu a_{32} & \lambda a_{23}+\mu a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Antes de enunciar el resto de las propiedades, necesitamos introducir algunos conceptos nuevos:

Definición:

Si $A = (a_{ij}) \in M_3(K)$, se llama **menor complementario del elemento a_{ij}**, y se le denota por α_{ij}, al determinante de la submatriz de orden dos de A que se obtiene eliminando la fila **i** y la columna **j**.

Definición:

El **adjunto del elemento a_{ij}** es α_{ij} , si i+j es par, ó bien, - α_{ij}, si i+j es impar; se le denota por A_{ij}; por tanto, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$.

Ejemplo:

Hallar α_{23}, menor complementario y el adjunto A_{23} del elemento a_{23} de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución : $\alpha_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2$ y $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2$.

Definición:

De acuerdo con la regla de Sarrus y con las definiciones anteriores, si $A \in M_3(K)$, puede definirse el **determinante de A** como la suma de los productos de los elementos de primera fila de A por sus correspondientes adjuntos; es decir, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

3.4. Determinante de una matriz cuadrada de orden n

Definición:

Si $A \in M_4(K)$, se llama **determinante de A**, y se denota por Det(A) ó bien por $|A|$, a la suma de los productos de los elementos de la primera fila por sus correspondientes adjuntos; es decir:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Definición general:

Si $A \in M_n(K)$, se define el **determinante de A**, y se denota como antes, a la suma de los productos de los elementos de la primera fila de A por sus correspondientes adjuntos (que serán determinantes de orden n-1).

3.5. Propiedades de los determinantes de orden n

Para demostrar estas propiedades utilizaremos el método de inducción: que consisten en probar la propiedad para los primeros números naturales, 1, 2, 3 y suponer que la propiedad es cierta para un cierto número natural n-1 y demostrar que se cumple para el siguiente número natural n. Las propiedades han sido demostradas para n=2 y n=3 en los anteriores apartados.

1) Si una matriz cuadrada tiene una fila de ceros, su determinante es cero.
Es evidente cuando la fila de ceros es la primera y en otro caso el desarrollo por adjuntos de la matriz cuadrada de orden n, nos lleva a que todos los adjuntos de orden n-1 tienen una fila ceros y por la hipótesis de inducción son todos nulos.

2) Al intercambiar entre sí dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo.
Supongamos que las dos filas que se intercambian son consecutivas. Sea B la matriz que se ha obtenido de A intercambiando las filas i e i+1: $B = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ a_{i+11} & .. & a_{i+1n} \\ a_{i1} & .. & a_{in} \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$ se tiene que

$|B|=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}B_{1j}$ donde cada adjunto B_{1j} es una matriz cuadrada de orden n-1 con dos filas intercambiadas con respecto a A_{1j} y por hipótesis $B_{ij}=-A_{ij}$ sustituyendo en la igualdad anterior, $|B|=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}B_{1j}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-A_{1j})=-|A|$

Si se intercambian las filas i e i+k: $B=\begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ a_{i+k1} & .. & a_{i+kn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & .. & a_{in} \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{fila i} \\ \\ \leftarrow \text{fila i+k} \\ \\ \end{array}$ esta matriz se puede conseguir realizando 2k-1 intercambios de filas consecutivas; puesto que la fila i+k necesita k cambios hasta llegar a ocupar la fila i y la fila i queda en la posición de la fila i+1 y necesita k-1 intercambios para quedar como indica B en total k+k-1=2k-1. Cada uno de estos intercambios cambia de signo el determinante y 2k-1 es impar, luego $|B|=(-1)^{2k-1}|A|=-|A|$

3) Un determinante que tenga dos filas iguales, es cero.
Intercambiando entre sí las dos filas idénticas por la propiedad anterior cambia de signo su determinante y por tanto $|A|=-|A|\Rightarrow|A|=0$.

4) Si A' se obtiene a partir de A multiplicando una fila de A por un número k, entonces $|A'|=k|A|$.

Si la fila escogida es la primera $A'=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & . & . & . & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$

se tiene que:
$|A'|=ka_{11}A_{11}+ka_{12}A_{12}+\ldots+ka_{1n}A_{1n}=k(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n})=k|A|$. Cuando la fila multiplicada no es la primera los adjuntos (determinantes de orden n-1) tienen una fila multiplicada por k y por la hipótesis de inducción quedan multiplicados por k y se cumple la propiedad.

5) Si un determinante tiene dos filas proporcionales, el determinante es cero.

Por la propiedad anterior sacando el valor de proporcionalidad resulta la matriz con dos filas iguales y su determinante es cero.

6) Si en un determinante los elementos de una fila son suma de dos sumandos, dicho determinante es igual a la suma de dos determinantes, uno de ellos con esa fila formada por los primeros sumandos y el resto de las filas como las del determinante original, y el otro determinante análogo a éste, pero con los segundos sumandos en vez de los primeros.

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & . & . & . & a_{in}+b_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{i1} & b_{i2} & . & . & . & b_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + |B| \text{ para todo i=1,2,...,n}$$

Tenemos $|C| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + ... + a_{1n}C_{1n}$ donde cada adjunto C_{1k} es una matriz de orden n-1 con una fila que es suma y se puede escribir $C_{ik}=A_{ik}+B_{ik}$ como suma de adjuntos de la matriz A y de la matriz B. Sustituyendo este resultado en la igualdad anterior $|C| = a_{11}(A_{11}+B_{11}) + a_{12}(A_{12}+B_{12}) + ... + a_{1n}(A_{1n}+B_{1n}) =$

$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n} + a_{11}B_{11} + a_{12}B_{12} + ... + a_{1n}B_{1n} = |A| + |B|$

7) Si una fila es combinación lineal de otras filas, entonces, el determinante es cero.

Si la primera fila de una matriz cuadrada resulta ser una combinación de las otras dos, es decir, $f_1 = \lambda f_2 + \mu f_3$; por las propiedades 5) y 6) resulta que su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{21}+\mu a_{31} & \lambda a_{22}+\mu a_{32} & . & . & . & \lambda a_{2n}+\mu a_{3n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & . & . & . & \lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \mu a_{31} & \mu a_{32} & . & . & . & \mu a_{3n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

. En el caso de que la fila primera no fuera combinación lineal de las siguientes y si lo fuera la fila i se intercambian entre si aunque el determinante cambia de signo (propiedad 3) resultando por supuesto cero.

8) Si a una fila se le suma una combinación lineal de otras filas, entonces el determinante no varía.

Si multiplicamos la fila i de la matriz cuadrada A por k y se suma a la fila k para obtener B por las propiedades 4) y 6) el determinante no varía.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & . & . & . & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & . & . & . & ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El segundo determinante es nulo por la propiedad 5)

9) El determinante de la matriz cuadrada A es igual cualquiera que sea la fila que se tome para su desarrollo.

Según la definición: $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=0}^{n} a_{1j}A_{1j}$. Si desarrollamos por la segunda fila y según la definición tendríamos, $|B| = a_{21}B_{21} + a_{22}B_{22} + ... + a_{2n}B_{2n}$

$$= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{prop2}{=} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = -|A|$$

y puesto que los adjuntos cambian de signo $B_{1j} = -A_{2j}$, luego $|A| = \sum_{j=0}^{n} a_{2j}A_{2j} = -\sum_{j=0}^{n} a_{1j}(-A_{1j}) = \sum_{j=0}^{n} a_{1j}A_{1j}$.

Si ahora intercambiamos la segunda y la tercera fila, el determinante cambia de signo y los adjuntos también, luego tendremos una fórmula para desarrollar el determinante por cualquier fila: $|A| = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}A_{ij}$ para i=1,...,n.

10) El determinante de la traspuesta de A es igual al determinante de A, $|A^t| = |A|$

Suponemos que el resultado es cierto para matrices de orden n-1 y en la matriz de orden n:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & . & . & . & a_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} = B$$ y desarrollando el determinante por la primera fila

$|A^t| = a_{11}B_{11} + a_{21}B_{12} + ... + a_{n1}B_{1n} = \sum_{j=0}^{n} a_{j1}B_{1j}$ utilizando la hipótesis de inducción, $B_{1j} = A^t_{1j} = A_{ji}$, que resulta $|A^t| = \sum_{j=0}^{n} a_{j1}B_{1j} = \sum_{j=0}^{n} a_{j1}A_{j1} = |A|$.

A partir de este resultado, en todas las propiedades anteriores se puede sustituir la palabra fila por la palabra columna.

Observación

Las propiedades 2, 4 y 6 se resumen diciendo que la aplicación determinante

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n &\xrightarrow{|\,|} \mathbf{K} \\ A &\longrightarrow |A| \end{aligned}$$ es una **forma n-lineal alternada.**

Teorema. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea.

Para cada matriz $A \in \mathbf{M}_n$, se verifica:

i) $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$, **desarrollo del determinante de A por los elementos de la fila i-ésima**.

ii) $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$, **desarrollo del determinante de A por los elementos de la columna j-ésima**.

Demostración:

Demostremos, en primer lugar, el apartado **i)** :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{1\leftrightarrow i}{=} - \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\text{Def.}}{=}$$

$$- \left[a_{i1}(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{in}(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \right] \underset{\substack{\text{subiendo la fila i-1ª hasta la 1ª} \\ \text{intercambiándola sucesivamente} \\ \text{con la inmediata anterior}}}{=}$$

$$- \left[a_{i1}(-1)^2(-1)^{i-2} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-12} & a_{i-13} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+12} & a_{i+13} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{in}(-1)^{1+n}(-1)^{i-2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n-1} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \right] =$$

$$-\left[a_{i1}(-1)^{2+i-2}\alpha_{i1} + \cdots + a_{in}(-1)^{1+n+i-2}\alpha_{in}\right] = a_{i1}(-1)^{i+1}\alpha_{i1} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}\alpha_{in} \Rightarrow$$

$$\boxed{|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}}.$$

ii) Como $|A^t| = |A|$, si aplicamos el desarrollo por la fila j-ésima a $|A^t|$ el resultado es igual al desarrollo por la columna j-ésima de $|A|$, como queríamos demostrar.

Corolario

El desarrollo formado por los elementos de una línea, tomando como adjuntos los de una paralela a la misma es el cero de **K.**

Demostración:

Consideramos el desarrollo por los elementos de la fila i de la matriz $A \in \mathbf{M}_n$ tomando como adjuntos, por ejemplo, los de la 1ª fila. Entonces:

$$a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \cdots + a_{in}A_{1n} = a_{i1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{in}(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \underset{\text{def}}{=}$$

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\text{fila1}^a=\text{fila i}^a}{=} 0.$$

Análogamente se demuestra tomando como adjuntos los de cualquier otra fila distinta de la fila i-ésima.

Ejemplo:

Calcular el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Solución: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{fila}3^a-2\text{fila}2^a}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{fila}4^a+2\text{fila}2^a}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$

$\underset{\substack{\text{desarrollando} \\ \text{por la } 2^a \text{ columna}}}{=} 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -5 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} \underset{2^a\text{fila}+5\text{ fila }1^a}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} \underset{3^a\text{fila-}5\text{ fila }1^a}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & -11 \end{vmatrix} = \underset{\substack{\text{desarrollando} \\ \text{por la } 2^a \text{ columna}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -8 & -11 \end{vmatrix} =$

-(-11+24)= -13.

Ejercicio.

Calcular el determinante denominado de **Vandermonde** D= $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$

Solución:

$$D \underset{\substack{2^a-1^a\\3^a-1^a\\4^a-1^a}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \\ 0 & d-a & (d-a)(d+a) & (d-a)(d^2+ad+a^2) \end{vmatrix}$$

$$\underset{4^a\text{prop. det.}}{=} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & (b+a) & (b^2+ab+a^2) \\ 0 & 1 & (c+a) & (c^2+ac+a^2) \\ 0 & 1 & (d+a) & (d^2+ad+a^2) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{desarrollo por la } 1^a\text{columna}}{=} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{2^a-1^a\\3^a-1^a}}{=} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-b & c^2-b^2+a(c-b) \\ 0 & d-b & d^2-b^2+a(d-b) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-b & (c-b)(c+b+a) \\ 0 & d-b & (d-b)(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$\underset{4^a\text{prop. det.}}{=} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 1 & (c+b+a) \\ 0 & 1 & (d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{desarrollo por la } 1^a\text{columna}}{=} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & c+b+a \\ 1 & d+b+a \end{vmatrix}$$

$$\underset{2^a-1^a}{=} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & c+b+a \\ 0 & d-c \end{vmatrix} \underset{\text{def}}{=} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)}$$

4. Matriz inversa de una matriz cuadrada

Definición:

Sea $A \in M_n(K)$. Llamamos **matriz inversa de A** a una matriz $A^{-1} \in M_n(K)$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, siempre que dicha matriz exista.

Definición:

Se dice que una **matriz** $A \in M_n(K)$ es:

1) Inversible si existe A^{-1}.

2) Regular cuando $|A| \neq 0$.

3) Singular cuando $|A| = 0$.

Proposición (Caracterización de las matrices inversibles)

Sea $A \in M_n(K)$. Si $|A| \neq 0$, entonces A es inversible y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}\,A)^t$, siendo Adj A la matriz adjunta de A que se obtiene, a partir de A, sustituyendo cada elemento por su adjunto correspondiente.

Demostración:

Siendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, entonces $\mathrm{Adj}\,A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & \dots & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Por tanto, $(\mathrm{Adj}\,A)^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & \dots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$;

luego: $\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}\,A)^t = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ & \dots & & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$.

Por otra parte, aplicando el resultado del último teorema de los determinantes, se tiene:

$$A\left(\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}\,A)^t\right)=\begin{pmatrix} a_{11}\frac{A_{11}}{|A|}+a_{12}\frac{A_{12}}{|A|}+\ldots+a_{1n}\frac{A_{1n}}{|A|} & \ldots & a_{11}\frac{A_{n1}}{|A|}+a_{12}\frac{A_{n2}}{|A|}+\ldots+a_{1n}\frac{A_{nn}}{|A|} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\frac{A_{11}}{|A|}+a_{n2}\frac{A_{12}}{|A|}+\ldots+a_{nn}\frac{A_{1n}}{|A|} & \ldots & a_{n1}\frac{A_{n1}}{|A|}+a_{n2}\frac{A_{n2}}{|A|}+\ldots+a_{nn}\frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}}{|A|} & \ldots & \frac{a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\ldots+a_{1n}A_{nn}}{|A|} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\ldots+a_{nn}A_{1n}}{|A|} & \ldots & \frac{a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\ldots+a_{nn}A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}=I_n$$

4.1. Matrices Elementales.

Definición:

Una **matriz elemental** es la que se obtiene efectuando operaciones elementales en las filas de la matriz unidad. Estas operaciones elementales son:

(1) Intercambiar entre sí las filas i y j.

(2) Multiplicar la fila i por un escalar α no nulo.

(3) Sumar a la fila i, la fila j multiplicada por un escalar α no nulo.

Denotaremos por

$$I(i,j)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array},$$

$$I(\alpha\, i)=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

y

$$I(i+\alpha j) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

las matrices elementales que se obtienen al aplicar a la matriz unidad las operaciones elementales (1), (2) y (3), respectivamente.

Nota: Las operaciones elementales entre las columnas de una matriz $A \in \mathbf{M}_n$, se pueden expresar de manera análoga, como producto, a la derecha de A, por matrices elementales, las cuales se obtienen aplicando a la matriz identidad I_n la operación elemental correspondiente.

Proposición:

Se verifican los dos siguientes resultados:

1) Las matrices elementales son inversibles.

2) La inversa de una matriz elemental es también una matriz elemental.

Demostración:

1) Es inmediato ya que $|I(i,j)| = -1 \neq 0$, $|I(\alpha i)| = \alpha \neq 0$ y $|I(i+\alpha j)| = 1 \neq 0$.

2) Fácilmente se comprueba que:

$$(I(i,j))^{-1} = I(i,j) \ , \ (I(\alpha i))^{-1} = I(\frac{1}{\alpha} i) \ , \ (I(i+\alpha j))^{-1} = I(i-\alpha j) .$$

Proposición:

Efectuar una operación elemental en las filas de una matriz A equivale a efectuar dicha transformación en las filas de la matriz unidad de orden correspondiente y después multiplicarla por A por la izquierda.

Demostración:

El resultado se basa en el hecho más general de que si X e Y son matrices que pueden multiplicarse, la fila i del producto XY coincide con el producto de la fila i de X por Y, por lo que el efecto producido al aplicar una operación elemental sobre las filas de la matriz X y multiplicar luego por Y, es el mismo que si efectuamos la misma operación elemental sobre las filas de XY.

Si tomamos X = I e Y = A, se sigue ya la tesis de la proposición.

Otros resultados relativos a matrices elementales

1) Toda matriz $A \in \mathbf{M}_n$ se puede reducir a una matriz triangular mediante producto por matrices elementales.

Mediante operaciones elementales (producto por matrices elementales) siempre podemos transformar A en una matriz triangular (método de Gauss para resolución de sistemas).

2) Si A es inversible. Por ser A inversible el sistema homogéneo AX=O solo admite la solución trivial pues $X = A^{-1}O = O$, por tanto aplicando Gauss podemos reducir A a una matriz triangular B con $b_{ii} \neq 0 \;\; \forall i$, y a partir de B, mediante operaciones elementales (producto por matrices elementales) reducimos B a I_n (método de Gauss-Jordan). Es decir, existen $E_1, E_2, \ldots, E_m$ tales que $E_m \ldots E_3 E_2 E_1 A = I$ Y despejando A en la igualdad $E_m \ldots E_2\, E_1\, A = I$, se obtiene $A = (E_m \ldots E_2\, E_1)^{-1} I \; = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_m^{-1}$;y, como la inversa de una matriz elemental es también una matriz elemental, se llega a la siguiente conclusión:

Si una matriz A es inversible, entonces puede ser expresada como producto de matrices elementales. El recíproco es evidente.

3) Si A es una matriz cuadrada no inversible, puede reducirse mediante operaciones elementales en sus filas a una matriz del tipo $\begin{pmatrix} A' \\ \hline 0 \end{pmatrix}$ (al menos una fila de ceros).

4) De forma general, si A es una matriz no nula de dimensión m×n, entonces, A puede ser transformada mediante operaciones elementales (en filas y columnas) en una matriz que responda a una de las cuatro configuraciones siguientes

$$\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I_{n\times n} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad I\,.$$

Proposición:

Utilizando estos resultados puede darse una demostración sencilla de la propiedad de los determinantes relativa al determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden: $|AB| = |A||B|$.

Demostración:

En efecto:

i) Si A es una matriz elemental, caben tres posibilidades:

i₁) $A = I(i,j) \Rightarrow |AB| = -|B| = (-1)|B| = |A||B|$.

i₂) $A = I(\alpha\, i) \;\Rightarrow |AB| = \alpha|B| = |A||B|$.

i₃) $A = I(i+\alpha j) \;\Rightarrow |AB| = |B| = 1\,|B| = |A||B|$.

ii) Si A es invertible, por el resultado 1), A puede escribirse como producto de matrices elementales: $A = E_1 E_2 \dots E_k$. Aplicando reiteradamente el resultado i) se tiene: $|AB| = |E_1 E_2 \dots E_k B| = |E_1||E_2 \dots E_k B| = \dots = |E_1||E_2|\dots|E_k||B| = |E_1 E_2 \dots E_k||B| = |A||B|$.

iii) Si A no es invertible, entonces, según se ha demostrado más arriba, $|A| = 0$.

En este caso, también $|AB| = 0$, ya que A puede escribirse de la forma: $A = E'_1 E'_2 \dots E'_k C$, donde las E'_j son matrices elementales y **C** es de la forma $C = \begin{pmatrix} A' \\ \overline{0} \end{pmatrix}$.

Por tanto, aplicando reiteradamente el resultado i), se tiene: $|AB| = |E'_1 E'_2 \dots E'_k CB| = |E'_1||E'_2|\dots|E'_k||CB| = 0$, ya que CB tiene también una fila de ceros.

Proposición:

Si A es invertible, entonces $|A| \neq 0$ y $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Demostración:

Por ser A invertible, existe A^{-1} y, por definición de matriz inversa, se verifica que $A A^{-1} = I$. Tomando determinantes y calculando el determinante del producto, se obtiene: $|A A^{-1}| = |A||A^{-1}| = |I| = 1$.

Luego $|A| \neq 0$ y $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

4.2. Método de Gauss para el cálculo de la matriz inversa

Sea $A \in M_n(K)$ invertible. Si encontramos $E_1, E_2, \dots, E_m$ matrices elementales tales que $E_m \dots E_2\, E_1\, A = I$, entonces, $E_m \dots E_2\, E_1\, A\, A^{-1} = I\, A^{-1}$ y, por tanto, $E_m \dots E_2\, E_1\, I = A^{-1}$.

Luego, efectuando en las filas de la matriz unidad las mismas operaciones elementales que efectuadas sobre las filas de A nos la transforman en la matriz unidad, obtenemos la matriz inversa de A. En esto consiste precisamente el método de Gauss cuya forma práctica de realización viene dada por el siguiente esquema:

$$(A|I) \to \begin{matrix}\text{operaciones} \\ \text{elementales} \\ \dots\end{matrix} \to (I|A^{-1})$$

Ejemplo:

Hallar la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ utilizando el método de Gauss, y escribir dicha inversa como producto de matrices elementales.

$$(A \,\vdots\, I_2)=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{-2\cdot 1^a+2^a}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{7}\cdot 2^a}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) \underset{1^a-4\cdot 2^a}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right)$$

∗ La inversa de la matriz A es $\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}}$.

∗ Obsérvese que la 1ª operación elemental equivale a multiplicar por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (de tipo $I(2^a-2.1^a)$) a la izquierda de A; la 2ª operación equivale a multiplicar por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$ (de tipo $I(-\frac{1}{7}.2^a)$) a la izquierda del producto anterior y la 3ª operación equivale a multiplicar por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (de tipo $I(1^a-4.2^a)$) a la izquierda del último producto, entonces resulta que

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A=I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} A = I_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = A^{-1}}$$

5. Rango de una matriz

Definición:

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$. Un **menor de orden h de A** es el determinante de una submatriz cuadrada de orden h de A. Evidentemente, ha de ser $h \le m, n$.

Definición:

Se llama **rango de la matriz A** al orden del menor de mayor orden no nulo de A. Lo denotaremos por r(A) o bien por rg(A).

Corolario:

Si r(A) = h, entonces:

1) Existe al menos un menor de orden h no nulo de A.

2) Todos los menores de orden mayor que h son nulos.

Teorema:

El rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 5 & 14 & -8 \\ -1 & -3 & -2 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$ es una matriz de rango 2, ya que, como es fácil comprobar, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, y todos los menores de orden 3 son nulos.

Definición:

Sean f_1, f_2,…,f_k filas de una matriz cualquiera A. Diremos que las filas f_1, f_2,…,f_k son **linealmente dependientes**, cuando existan los elementos $\lambda_1,...,\lambda_k \in K$ no todos nulos, tales $(0) = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros.

Definición:

Sean f_1, f_2,…,f_k filas de una matriz cualquiera A. Diremos que las filas f_1, f_2,…,f_k son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $(0) = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros, se deduce obligatoriamente que $\lambda_i = 0, \ \forall i$.

La relación entre las filas de la matriz A es la siguiente: $\begin{cases} f_3 = 2f_1 + f_2 \\ f_4 = f_1 - f_3 \end{cases}$. Sólo hay dos filas linealmente independientes (las dos primeras) y es r(A) = 2. El siguiente teorema justifica esta coincidencia.

Teorema del rango.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$. Entonces el rango de A coincide con el número de filas linealmente independientes así como con el número de columnas linealmente independientes de A. Es decir, coincide con la dimensión del espacio de las filas y con la dimensión del espacio de las columnas de A.

Demostración:

Por simplicidad en la notación, supongamos que A es una matriz 3×4:

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ y que el rango de A es r(A) = 2.

Por definición de rango, existe un menor de orden dos de A, distinto de cero. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que sea $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto, las dos primeras filas de A son linealmente independientes. Comprobemos en primer lugar que la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras.

Por definición de rango, todos los menores de orden tres de A han de ser nulos; por tanto, se tiene que: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$, desarrollando el determinante por la tercera columna y llamando A_{ij} al adjunto de a_{ij}, no en la matriz A sino en la submatriz de A que estamos considerando.

Como $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, puede despejarse a_{33} en la igualdad anterior, obteniéndose: $a_{33} = -\frac{A_{13}}{A_{33}}a_{13} - \frac{A_{23}}{A_{33}}a_{23} = \lambda a_{13} + \mu a_{23}$, habiendo llamado λ y μ a $-\frac{A_{13}}{A_{33}}$ y $-\frac{A_{23}}{A_{33}}$ respectivamente.

Por el mismo motivo, también es $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = 0 = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34}$. Y, procediendo como antes, puede escribirse: $a_{34} = -\frac{A_{14}}{A_{34}}a_{14} - \frac{A_{24}}{A_{34}}a_{24} = \lambda a_{14} + \mu a_{24}$, ya que los A_{14}, A_{24} y A_{34} de ahora son los A_{13}, A_{23} y A_{33} de antes, respectivamente.

Considerando de nuevo el menor $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, y, aplicándole el corolario de los determinantes, se verifica que $a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} = 0$. De donde, despejando, se obtiene: $a_{32} = -\frac{A_{13}}{A_{33}}a_{12} - \frac{A_{23}}{A_{33}}a_{22} = \lambda a_{12} + \mu a_{22}$.

Análogamente se demostraría que $a_{31} = \lambda a_{11} + \mu a_{21}$. Con lo cual queda probado que $f_3 = \lambda f_1 + \mu f_2$; es decir, que la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras.

En segundo lugar, por ser $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, también se deduce que las dos primeras columnas de A son linealmente independientes y, falta demostrar que la tercera y la cuarta columna son combinaciones lineales de las dos primeras.

El razonamiento seguido en el caso de las filas puede trasladarse a este caso sin más que desarrollar los menores de orden tres por columnas en vez de filas, obteniéndose el resultado perseguido.

Definición:

Se llama **orlar un menor** de una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$, a construir otro de orden superior añadiéndole filas y columnas de A.

Consecuencias del teorema del rango:

1) Las filas o las columnas de una matriz cuadrada $A \in M_n(K)$ son linealmente independientes si y solo si $|A| \neq 0$.

En efecto:

Las filas o las columnas de una matriz cuadrada A son linealmente independientes si y solo si r(A) = n, como consecuencia inmediata del teorema. Ahora bien, por definición de rango, esto ocurre si y solo si $|A| \neq 0$.

2) Si $A \in M_n(K)$, entonces, r(A) = n si y solo si A es invertible.

3) $r(A)=r(A^t)$.

Forma práctica de calcular el rango de una matriz:

Una vez encontrado un menor no nulo de orden r (de no ser así el rango sería cero), se va orlando ese menor con una nueva fila y cada una de las demás columnas. Si todos estos menores de orden r + 1 resultasen ser nulos, entonces la nueva fila es combinación lineal de las demás, y se repetiría el proceso con otra fila; si todos los menores, al orlar con el resto de las filas, fuesen también nulos, entonces el rango sería r. Si, por el contrario, después de orlar con esa primera nueva fila, encontrásemos un menor no nulo, el rango sería al menos r + 1; nos quedaríamos con él y comenzaríamos a orlarlo con el resto de filas y de columnas, y así sucesivamente. El rango sería el orden del menor de mayor orden no nulo encontrado por este procedimiento.

De esta manera se disminuye notablemente el número de menores que hay que calcular para determinar el rango de una matriz.

Cálculo del rango de una matriz mediante operaciones elementales:

El rango de una matriz A no varía si se efectúan operaciones elementales en sus filas o columnas (es consecuencia inmediata de las propiedades 3) y 4) de los determinantes y de que el determinante de la matriz unidad es 1); por tanto, pueden realizarse operaciones de este tipo, que transformen la matriz A en otra A' de la que sea inmediato calcular el rango

Estas matrices A' se llaman **matrices escalonadas**. Son aquellas que verifican:

i) Si hay filas nulas son las finales.

ii) En cada fila, el primer elemento no nulo está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila precedente.

El rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas de dicha matriz.

Ejemplo:

Calcular el rango de la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Aplicando matrices elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{2^a+1^a \\ 3^a-2\cdot 1^a \\ 5^a-1^a}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{4^a \leftrightarrow 2^a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & -5 & 8 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{3^a+4\cdot 2^a \\ 4^a-5\cdot 2^a}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & 36 \\ 0 & 0 & 5 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{4^a+3^a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rgA=3}$$

2. Aplicando el procedimiento de orlar:

➢Observamos que el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, luego rg(A)≥2.

➢Orlamos entonces este menor con la tercera fila y la tercera columna, obteniendo el menor de orden 3 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ luego rg(A)≥3.

➢Orlamos ahora este menor con la cuarta fila y la cuarta columna, obteniendo el menor de orden cuatro $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$. Consideramos el otro menor de orden cuatro posible, orlando el menor de orden tres no nulo con la quinta fila y la cuarta columna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Luego todos los menores posibles de orden cuatro, obtenidos a partir del menor de orden tres no nulo, son nulos y por tanto rg(A)=3

El concepto de rango se aplica en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

6. Aplicación del cálculo matricial a los sistemas de ecuaciones lineales

6.1. Sistemas de Cramer:

Un sistema de ecuaciones se dice que es de **Cramer** si y solo si verifica las dos condiciones siguientes:

- Tiene igual número de ecuaciones y de incógnitas.
- La matriz A de los coeficientes tiene determinante no nulo.

Regla de Cramer:

Un sistema de Cramer tiene siempre solución única, es decir, es un sistema compatible determinado.

Demostración:

Sea AX=B la ecuación matricial del sistema de Cramer S. Como S es de Cramer, la matriz A de los coeficientes es regular $\left(|A| \neq 0\right)$, por tanto tiene inversa A^{-1} y multiplicando, a la izquierda, por A^{-1} se obtiene:

$A^{-1}AX= A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$, es decir :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow x_i = \frac{b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}}{|A|} \quad \forall i = 1, \cdots, n \Leftrightarrow$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$\forall i = 1, \cdots, n$. ***Expresión que constituye la regla de Cramer.***

Observación:

Si el sistema S ***no*** es de Cramer pero es compatible con rgA=rg A^*=h<n (compatible indeterminado) siendo, por ejemplo, el menor $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} \neq 0$, entonces el sistema S es equivalente al sistema $S' = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1h}x_h = b_1 - a_{1h+1}x_{h+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{h1}x_1 + \cdots + a_{hh}x_h = b_h - a_{hh+1}x_{h+1} - \cdots - a_{hn}x_n \end{cases}$

que es de Cramer y cuya solución depende n-h incógnitas.

Ejemplo:

Resolver el sistema: $S \equiv \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \qquad\quad -7z = 1 \\ -x + 2y - 4z = -4 \end{cases}$

Solución:

El sistema dado puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Es un sistema de Cramer por tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y ser $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$.

La solución única es:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{42} = \frac{18}{7}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \\ -1 & -4 & -4 \end{vmatrix}}{42} = -1, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{42} = -\frac{1}{7}$$

6.2. Teorema de Rouché-Frobenius

Sea $S \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$ un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, siendo A la matriz de los coeficientes y A^* la matriz ampliada ($A^*=A|B$). Bajo estas hipótesis se verifica que:

1) S es compatible si y sólo si $r(A)=r(A^*)$.

2) Si, $r(A)=r(A^*)=n$ entonces S es compatible determinado.

3) Si $r(A)=r(A^*)<n$ entonces S es compatible indeterminado.

Demostración:

1) Si el sistema S es compatible, entonces $r(A)=r(A^*)$. En efecto:

$$S \equiv \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Que S tenga solución, significa que existen escalares $x_1,\dots,x_n$ tales que $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$; luego, la última columna de A^* es combinación lineal de las anteriores (que constituían las columnas de A), y, por tanto r(A)=r(A^*).

Recíprocamente, si r(A)=r(A^*)=h, el sistema es compatible. En efecto:
Si r(A)=r(A^*)=h, existe un menor de A de orden h no nulo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} \\ & \dots & \\ a_{h1} & & a_{hh} \end{vmatrix} \neq 0$. Entonces, las restantes filas h+1,...,m, de la matriz A^* son combinación lineal de las h primeras, y el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1h}x_h + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{h1}x_1 + \dots + a_{hh}x_h + \dots + a_{hn}x_n = b_h \end{cases}$$

que, a su vez, es equivalente a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1h}x_h = b_1 - a_{1h+1}x_{h+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{h1}x_1 + \dots + a_{hh}x_h = b_h - a_{hh+1}x_{h+1} - \dots - a_{hn}x_n \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer a este último sistema, se obtiene:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 - a_{1h+1}x_{h+1} - \dots - a_{1n}x_n & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ & \dots & & \\ b_h - a_{hh+1}x_{h+1} - \dots - a_{hn}x_n & a_{h2} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} \\ & \dots\dots & \\ a_{h1} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix}}$$

...

$$x_h = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 - a_{1h+1}x_{h+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ & \dots & & \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & b_h - a_{hh+1}x_{h+1} - \dots - a_{hn}x_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} \\ & \dots\dots & \\ a_{h1} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix}}$$

De esta forma, se calculan $x_1,\dots,x_h$ en función de los parámetros $x_{h+1},\dots,x_n$.

2) Si h = n**,** entonces, $x_1,\dots,x_h$ son escalares concretos (no dependen de ningún parámetro) y constituyen la solución única del sistema, que será pues compatible determinado.

3) Si h < n, entonces, $x_1,\dots,x_h$ vienen dados en función de los parámetros $x_{h+1},\dots,x_n$.

Para cada valor que tomen dichos parámetros obtendremos una solución del sistema, que será, por tanto, compatible indeterminado.

Ejemplo:

Estudiar y resolver el sistema S= $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

Escribimos S en forma matricial: $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$. El determinante de la matriz A de los coeficientes es: $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2) \Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$. Tenemos que considerar los siguientes casos:

i) Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, entonces el sistema es de Cramer y su solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = -\frac{a+1}{a+2},\quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2},\quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

ii) Si a=1, $S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z$, luego se trata de un sistema compatible indeterminado y unas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 1-\lambda-\mu \\ y=\lambda & ,\lambda,\mu \in \mathbf{R}. \\ z=\mu \end{cases}$$

iii) Si a=-2, $S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Siendo $|A| = 0$ con $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ pero orlando este menor con la columna de términos independientes y la última fila resulta que $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$. Luego r(A)=2≠r($A^*$)=3 y en este caso el sistema es incompatible.

6.3. Sistemas homogéneos

Cualquier sistema homogéneo $AX=(0)$ es compatible pues siempre admite la llamada **solución trivial**: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ (por otra parte, es consecuencia inmediata del teorema anterior, por verificarse siempre en un sistema homogéneo que r(A)=r(A^*)).

En el caso particular del mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es decir, m = n, (por tanto, A es una matriz cuadrada), aplicando el teorema de Rouché, se obtiene el siguiente resultado:

1) El sistema tiene únicamente la solución trivial si y sólo si $|A| \neq 0$.

2) El sistema tiene infinitas soluciones si y sólo si $|A| = 0$.

6.4. Estructura de las soluciones de un sistema

Una solución de un sistema lineal se puede expresar como una n-upla de escalares $(s_1, s_2, ..., s_n)$ o también por una matriz columna $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ que cumpla cada una de las ecuaciones del sistema o que cumpla la ecuación matricial AX=B.

Sea $AX = B$ un sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Sea $AX = (0)$ su sistema homogéneo asociado. Se verifica:

1) Si S es solución del sistema homogéneo, también lo es λS, para cualquier constante λ.

Demostración:

Por ser S solución del sistema homogéneo, se verifica que AS=(0). Así, se tiene: $A\lambda S=\lambda AS=\lambda\,(0)=(0)$.

2) Si S_1 y S_2 son soluciones del sistema homogéneo, S_1+S_2 también lo es.

Demostración:

Por ser S_1 y S_2 soluciones del sistema homogéneo, se verifica que $A\,S_1.=A\,S_2=(0)$.
Por tanto, $A(S_1 + S_2)=A\,S_1 +A\,S_2 = (0) + (0) = (0)$.

3) Si el sistema $AX = (0)$ admite más soluciones que la trivial, entonces, existen k soluciones $S_1, S_2,\dots, S_k$ linealmente independientes tales que la solución general del mismo es de la forma, $S=\lambda_1 S_1+\lambda_2 S_2 +\dots+\lambda_k S_k$ siendo λ_i escalares y $k = n - r(A)$.

Demostración:

Si el sistema $AX = (0)$ admite más soluciones que la trivial es por que $r(A) = h < n$. Por tanto, pueden despejarse h incógnitas en función de las demás (sin pérdida de generalidad, podemos suponer que son las h primeras):

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{1\,h+1}x_{h+1} + \dots + \lambda_{1\,n}x_n \\ x_2 = \lambda_{2\,h+1}x_{h+1} + \dots + \lambda_{2\,n}x_n \\ \qquad\qquad \dots \\ x_h = \lambda_{h\,h+1}x_{h+1} + \dots + \lambda_{h\,n}x_n \end{cases}$$

Las igualdades anteriores pueden escribirse conjuntamente en la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_h \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{h+1}\begin{pmatrix} \lambda_{1\,h+1} \\ \dots \\ \lambda_{h\,h+1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} \lambda_{1\,h+2} \\ \dots \\ \lambda_{h\,h+2} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \dots \\ \lambda_{h\,n} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$, o bien, $S = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda_k S_K$ con

$$S=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_h \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, S_1=\begin{pmatrix} \lambda_{1\,h+1} \\ \dots \\ \lambda_{h\,h+1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, S_2=\begin{pmatrix} \lambda_{1\,h+2} \\ \dots \\ \lambda_{h\,h+2} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, S_K=\begin{pmatrix} \lambda_{1\,n} \\ \dots \\ \lambda_{h\,n} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1=x_{h+1}, \lambda_2=x_{h+2}, \lambda_k=x_n$$

Evidentemente, S_1, S_2,…, S_k son linealmente independientes (no hay más que observar cómo son sus filas h+1, h+2, ..., n) y $k=n-h=n-r(A)$, como queríamos demostrar.

4) Las soluciones del sistema $AX=B$ son de la forma: S_1+S_0, donde S_1 es una solución particular de dicho sistema y S_0 es la solución general del sistema homogéneo asociado.

Demostración:

Cualquier solución general S* del sistema AX=B, se puede expresar como $S^*=(S^*-S_1)+S_1$, de donde, por ser S* y S_1 soluciones del sistema queda:

$$A(S^*-S_1)=AS^*-AS_1=B-B=(0).$$

El recíproco es inmediato:

Si S_1 es una solución particular del sistema $AX=B$ y S_0 es la solución general del sistema homogéneo asociado, entonces, S_1+S_0 es solución de $AX=B$. En efecto:

$$A(S_1+S_0)=AS_1+AS_0=B+(0)=B.$$

7. Matrices Ortogonales

Definición:

Una matriz $A\in M_n$ se dice que es **ortogonal** cuando su inversa coincide con su traspuesta, es decir, $A^{-1}=A^t$.

Ejemplos: $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$, y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices ortogonales.

Proposición:

Si una matriz A es ortogonal, entonces, $|A|=\pm 1$.

Demostración:

$I = AA^{-1} = AA^{t}$, por ser A ortogonal. Tomando determinantes en ambos miembros, se obtiene: $1 = |A||A^{t}| = |A|^{2} \Rightarrow |A| = \pm 1$.

TEORÍA MATRICIAL USADA EN AJUSTE DE OBSERVACIONES

Teorema

1) Si $A \in M_{m\times n}$, se verifica que $A^{t}A$ es una matriz simétrica.

2) Si $A \in M_{m\times n}$, con m>n, es una matriz de rango completo, es decir, r(A) = n, entonces $r(A^{t}A) = n$.

Definición:

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}$, se llama **matriz pseudoinversa de A**, a una matriz $A^{+} \in M_{n\times m}$ que verifique las cuatro condiciones siguientes:

1) $A A^{+} A = A$

2) $A^{+} A A^{+} = A^{+}$

3) $A A^{+}$ es simétrica.

4) $A^{+} A$ es simétrica.

Teorema

Si $A \in M_{m\times n}$, existe una única matriz pseudoinversa.de A.

Proposición:

Si A es invertible, entonces $A^{+} = A^{-1}$.

Definición:

Si $A \in M_{m\times n}$, una matriz $G \in M_{n\times m}$ se dice que es una **inversa generalizada de A** si verifica que AGA = A.

Observación: En general, una matriz $A \in M_{m\times n}$ tiene **infinitas inversas generalizadas**, por ejemplo, A^{+} es una de ellas.

Ejercicio:

1) Demostrar que si A es invertible y G es una inversa generalizada de A, entonces, $G = A^{-1}$.

2) Dado el sistema compatible de ecuaciones lineales AX = K, demostrar que G K es una solución de dicho sistema, siendo G una inversa generalizada cualquiera de A.