Mediante marcadores puede escoger el tipo de problema

PROBLEMAS DE MOVIMIENTOS EN EL PLANO

1. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\frac{1}{5} \\ y-\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

2. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

3. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+4 \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

4. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

5. Consideramos los giros G_1 de centro $A_1(1,2)$ y ángulo α_1 =60º y G_2 con centro $A_1(0,-1)$ y ángulo α_2 = 30º:

a) Efectuar el producto de G_1 por G_2, clasificando y hallando los elementos característicos de la transformación obtenida.

b) Para α_2 =300º efectuar el producto de G_1 por G_2, clasificando y hallando los elementos característicos de la transformación obtenida.

Solución

6. Componer el giro G_2 del problema 5 apartado a) con la simetría axial S_r de eje la recta.

$$r \equiv x + 2y + 4 = 0$$

¿Qué tipo de transformación se obtiene?

Solución

7. Analizar para qué valores de los parámetros a, b y c, la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & b \\ 0 & a-1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

es un movimiento. En este caso, clasificarlo.

Solución

8. Hallar las ecuaciones del giro plano G de centro el punto C(2, 3) y ángulo $\alpha = -90^{\circ}$.

Solución

9. Hallar las ecuaciones de la simetría axial plana S de eje la recta $e \equiv y = x - 1$.

Solución

10. Escribir la ecuación de la traslación de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Solución

11. Hallar las ecuaciones de la simetría deslizante en el plano cuya descomposición canónica es $S_D = T_{\vec{u}} \circ S_e$ siendo la ecuación del eje de simetría $e \equiv y = 2x - 4$ y el vector traslación $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solución

12. Componer el giro G_1 del problema 5 con la traslación de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

13. Componer la simetría axial de eje la recta $r \equiv x + 2y + 4 = 0$, del problema 6, con la traslación de vector $\vec{u} = (5,7)$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

14. Componer las simetrías axiales S_1 y S_2 de ejes las rectas r_1 que pasa por el punto $A_1(2,3)$ y es paralela al vector $\vec{r}_1 = (5,2)$ y r_2 que pasa por el punto $A_2(-1,1)$ y es paralela al vector $\vec{r}_2 = (-3,1)$, respectivamente. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

15. Componer las simetrías axiales S_1 y S_2 de ejes las rectas r_1 que pasa por el punto $A_1(2,3)$ y es paralela al vector $\vec{r}_1 = (5,2)$ y r_2 que pasa por el punto $A_2(-1,1)$ y es paralela al vector $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, respectivamente. Estudiar la transformación obtenida..

Solución

16. Efectuar el producto de tres simetrías axiales $S_3 \circ S_2 \circ S_1$, de ejes respectivos:

$e_1 \equiv x = 1$ $e_2 \equiv y = 1$ y $e_3 \equiv x = -1$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

17. Efectuar el producto de cuatro simetrías axiales $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$, siendo las tres primeras las mismas que en el problema 16 y S_4 la simetría de eje la recta $e_4 \equiv y - 1$.

Solución

18. Hallar la ecuación del giro que transforma los puntos A(3,1) y B(-1,-2) en los puntos A'(2,2) y B'(5,-2), respectivamente.

Solución

19. Si A, B, C y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo, determinar la transformación $S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$.

Solución

20. Determinar el giro que transforma la recta x+y=0 en la recta $\left(\sqrt{3}+1\right)x + \left(-\sqrt{3}+1\right)y = 2$.

Solución

1. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\frac{1}{5} \\ y-\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

La ecuación de T es de la forma X' = A + M (X – A) donde:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \text{ y } M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Para empezar a clasificar la transformación geométrica, podemos decir M≠kI, luego no es una homotecia.

Aplicando el procedimiento para su clasificación:

1. $MM^t = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = I_2, luego M es ortogonal, y por tanto, la transformación T es un **movimiento.**

2. $|M| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{vmatrix} = 1$, luego se trata de un **movimiento directo** del plano.

3. $M \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ T no es la identidad ni una traslación, T es un **giro**.

Elementos característicos: centro C y ángulo de giro α :

Cálculo del centro: C es el único punto doble; se obtiene resolviendo el sistema $X = C + M\overrightarrow{CX}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\frac{1}{5} \\ y-\frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8x+4y = \frac{16}{5} \\ -4x+8y = \frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Por tanto, C = $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$, es el centro de giro.

Obsérvese que se veía directamente en el enunciado, pero sin clasificar la transformación desconocemos si era el único.

Cálculo del ángulo:

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{5} = \cos\alpha \\ \frac{4}{5} = \operatorname{sen}\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 126^{\circ}\ 52'\ 11.6''}$$

Inicio

2. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

La ecuación de T es de la forma X' = T(O) + MX donde $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y el transformado del origen es el punto $T(O) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La ecuación anterior es equivalente : $\overline{X}' = N\overline{X}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aplicando el procedimiento de la página 15

1. $MM^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, luego M es ortogonal, y por tanto, la transformación T es un **movimiento.**

2. $|M| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, se trata de un **movimiento inverso** del plano.

3. El conjunto de puntos dobles o invariantes es la solución del sistema $(N - I)\overline{X} = 0$. Analizando los rangos:

Analizando los rangos:

$$\mathrm{rg}(M-I)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=1$$

$$\mathrm{rg}(N-I)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}=1$$

Luego T es una **simetría axial**

Elementos característico: eje de simetría

$$(N-I)\overline{X}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow 2-x-y=0$$

El eje de la simetría axial es la recta de ecuación: $e \equiv y = 2 - x$

Inicio

3. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\ y+4\end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

La ecuación de T **no** es de la forma X' = A + M (X – A) si no X' = A + M (X +B), entonces debemos operar para llegar a la expresión general X' = T(O) + MX, es decir:

X' = A + M (X +B) ⇔ X' = (A+ MB) + MX, efectuando los cálculos:

(A+ MB) = $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$, siendo la ecuación: $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

Sabemos que la ecuación de T también se puede escribir $\overline{X}'=N\overline{X}$

$$\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}$$

Aplicamos el procedimiento indicado en página 15 y observamos que $M = I_2$, luego se trata de una **traslación** ya que $T(O) \neq O$.

Elementos característico: vector de la traslación $\vec{u}=\overrightarrow{OT(O)}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$

Inicio

4. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

La ecuación de T **no** es de la forma X' = A + M (X – A), entonces debemos operar para llegar a la expresión general X' = T(O) + MX, es decir:

X' = A + M (X +B) ⇔ X' = (A+ MB) + MX, efectuando los cálculos:

(A+ MB) = $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo la ecuación: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

La ecuación anterior es equivalente : $\overline{X}' = N\overline{X}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aplicando el procedimiento de la página 15

1. $MM^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, luego M es ortogonal, y por tanto, la transformación T es un **movimiento.**

2. $|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, se trata de un **movimiento inverso** del plano.

3. El conjunto de puntos dobles o invariantes es la solución del sistema $(N - I)\overline{X} = 0$. Analizando los rangos:

$$\mathrm{rg}(M - I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathrm{rg}(N - I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

se observa que el sistema anterior es incompatible. No hay, por tanto, puntos dobles y T es una **simetría deslizante.**

Elementos característico: eje de simetría y vector de traslación

1º) El transformado del origen, según se ha visto, era. $T(O) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = O'$

El punto medio del segmento $\overline{OO'}$ pertenece al eje e de la simetría deslizante y tiene por coordenadas:

$$P = \frac{O + O'}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Su transformado, P’, también pertenecerá a dicho eje y el vector $\overrightarrow{PP'}$ será, precisamente, el vector traslación $\vec{u}$ de la simetría deslizante.

$$N\overline{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow P'=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}=\overrightarrow{PP'}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

El vector de traslación es el (1,1).

2º) El eje de la simetría deslizante pasa por P=(1,0) y es paralelo al vector de traslación $\left(\vec{u}\,//\,e\right)$, es decir, a los vectores invariantes por M:

$$(M-I)\vec{X}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow -x+y=0\Rightarrow y=x$$

Luego, el **eje e** tiene de ecuación $y-0=x-1\Rightarrow y=x-1$

Segundo método para el cálculo del eje:

$$S_D=S_e\cdot T_{\vec{u}}\Rightarrow S_e=S_D\cdot T_{-\vec{u}}\Rightarrow N_{S_e}=N_{S_D}\cdot N_{T_{-\vec{u}}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

El eje e lo constituyen los puntos dobles mediante la simetría axial S_e y son la solución del sistema:

$$\left(N_{S_e}-I\right)\overline{X}=0\text{, es decir,}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow 1-x+y=0\Rightarrow e\equiv y=x-1$$

Inicio

5. Consideramos los giros G_1 de centro $A_1(1,2)$ y ángulo $\alpha_1 = 60º$ y G_2 con centro $A_1(0,-1)$ y ángulo $\alpha_2 = 30º$:

a) Efectuar el producto de G_1 por G_2, clasificando y hallando los elementos característicos de la transformación obtenida.

b) Para $\alpha_2 = 300º$ efectuar el producto de G_1 por G_2, clasificando y hallando los elementos característicos de la transformación obtenida.

Solución

a) Para componer G_1 con G_2, obtengamos la matriz del producto $N = N_{G_2} \cdot N_{G_1}$.

La ecuación de G_1 es de la forma: $X' = A_1 + M_1\, \overrightarrow{A_1X}$

para $M_1 = \begin{pmatrix} \cos\,\alpha_1 & -\text{sen}\,\alpha_1 \\ \text{sen}\,\alpha_1 & \cos\,\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\,60^\circ & -\text{sen}\,60^\circ \\ \text{sen}\,60^\circ & \cos\,60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la ecuación de arriba, queda:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La ecuación anterior es equivalente a la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Luego, $N_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Siguiendo los mismos pasos para G_2, se tiene:

$$X' = A_2 + M_2\, \overrightarrow{A_2X}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\text{sen}\,\alpha_2 \\ \text{sen}\,\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\text{sen}\,30^\circ \\ \text{sen}\,30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación de G_2:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Luego, $N_{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Por tanto, $N = N_{G_2} \cdot N_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 \\ \frac{3\sqrt{3}-3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aplicando el procedimiento indicado en página 15:

1. $MM^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, luego M es ortogonal, y por tanto, la transformación T es un **movimiento.**

2. $|M| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, luego se trata de un **movimiento directo** del plano.

3. $M \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ T no es la identidad ni una traslación, T es un **giro**.

Elementos característicos: centro C y ángulo de giro α:

Cálculo del centro: C es el único punto doble; se obtiene resolviendo el sistema $(N-I)\overline{X} = 0$.

$$\left(N-I\right)\bar{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 \\ \frac{3\sqrt{3}-3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-y+\frac{1+\sqrt{3}}{2}=0 \\ x-y+\frac{3\sqrt{3}-3}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $C\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$ es el centro de giro.

Cálculo del ángulo:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0=\cos\alpha \\ 1=\operatorname{sen}\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 90^{o}}$$

Luego, $G_2 \cdot G_1$ es otro giro de **centro** $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$ y **ángulo** $\alpha_1+\alpha_2=90^0$.

b)

Por ser $\alpha_1+\alpha_2=60^0+300^0=360^\circ$, el producto $G_2 \cdot G_1$ es una **traslación**.

Para obtener el vector traslación, hallemos la matriz $N=N_{G_2}\cdot N_{G_1}$.

En apartado anterior, para el giro G_1 se obtuvo $N_{G_1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}+\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La ecuación de G_2 es del tipo:

$$X'=A_2+M_2\,\overrightarrow{A_2X}$$

siendo $M_2=\begin{pmatrix} \cos\,\alpha_2 & -\operatorname{sen}\,\alpha_2 \\ \operatorname{sen}\,\alpha_2 & \cos\,\alpha_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\,300^\circ & -\operatorname{sen}\,300^\circ \\ \operatorname{sen}\,300^\circ & \cos\,300^\circ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la ecuación de G_2:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

siendo $N_{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Multiplicando ambas matrices se obtiene:

$$N = N_{G_2} \cdot N_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}-3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, $G_2 \cdot G_1$ **es una traslación de vector** $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}-3}{2} \end{pmatrix}$**.**

Inicio

6. Componer el giro G_2 del problema 5 apartado a) con la simetría axial S_r de eje la recta.

$$\mathbf{r \equiv x + 2y + 4 = 0}$$

¿Qué tipo de transformación se obtiene?

Solución

Busquemos la matriz asociada al producto del giro G_2 por la simetría axial S_r, es decir, $N = N_{S_r} \cdot N_{G_2}$.

Al resolver el problema 5 página 11, se obtuvo:

$$N_{G_2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Hallemos ahora N_{S_r}.

La ecuación de S_r es del tipo:

$X' = A + M_{S_r}\,\overrightarrow{AX}$, siendo A un punto cualquiera de la recta r y M_{S_r} la matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, siendo $\frac{\alpha}{2}$ la inclinación de r.

La ecuación del eje puede escribirse en la forma: $r \equiv y = -\frac{1}{2}x - 2$, luego, la pendiente de r es $m_r = -\frac{1}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Operando en la igualdad anterior, se obtiene:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$4-4\cos\alpha = 1+\cos\alpha \Rightarrow 5\cos\alpha = 3 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

Además, $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$.

Como $\frac{\alpha}{2} > 90^\circ$ (pues tg $\frac{\alpha}{2}$ < 0), se verifica que $\alpha > 180^\circ$ y $\operatorname{sen}\alpha < 0$.

Luego, $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$.

Por tanto, $M_{S_r} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Tomamos como punto de r, por ejemplo, el punto A=(0,-2) y la ecuación de S_r queda:

$$S_r \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{16}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

O bien:

$$S_r \equiv \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{16}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix},$$

El producto de los dos movimientos,

$$N=N_{S_r}\cdot N_{G_2}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{11}{10} & \frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{11}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & \frac{2}{5}-\frac{3\sqrt{3}}{10}\end{pmatrix}.$$

Clasificación:

Por ser el producto de un movimiento directo por uno inverso, se trata de un movimiento inverso.

Aplicando el procedimiento para su clasificación:

1. $MM^t=\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10}+\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10}+\frac{2}{5}\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=I_2$, luego M es ortogonal,

y por tanto, la transformación T es un **movimiento.**

2. $|M|=\begin{vmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10}+\frac{2}{5}\end{vmatrix}=-1$, luego se trata de un **movimiento inverso** del plano.

3. El conjunto de puntos dobles o invariantes es la solución del sistema $(N-I)\overline{X}=0$.

Analizando los rangos:

$$rg(M-I)=rg\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{7}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{3}{5}\end{pmatrix}=1$$

$$rg(N-I)=rg\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{11}{10} & \frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{7}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{11}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{3}{5}\end{pmatrix}=2$$

Al ser $rg(M-I)\neq rg(N-I)$, la transformación producto carece de puntos dobles y es, por tanto, una **simetría deslizante.**

Inicio

7. Analizar para qué valores de los parámetros a, b y c, la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & b \\ 0 & a-1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

es un movimiento. En este caso, clasificarlo.

Solución

La aplicación vectorial asociada a T tiene por matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a-1 & a^2 \end{pmatrix}$.

T es un movimiento si y sólo si M es una matriz ortogonal, es decir, si $MM^t = I$.

$$MM^t = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a-1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ b & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2 & a-1+ba^2 \\ a-1+a^2b & (a-1)^2+a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ha de ser $\begin{cases} 1 = 1+b^2 \Rightarrow b = 0 \\ 0 = a-1+ba^2 = a-1 \Rightarrow a = 1 \\ 0 = a-1+ba^2 = 0+0 = 0 \\ 1 = (a-1)^2 + a^4 = 0+1 = 1 \end{cases}$

Luego T es un movimiento para a = 1 y b = 0.

En este caso, queda $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego se trataría de movimientos cuya matriz M asociada es I_2 y por tanto, T es la **transformación identidad** del plano cuando c =0.

Si $c \neq 0$, se trata de la **traslación** de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$.

Inicio

8. Hallar las ecuaciones del giro plano G de centro el punto C(2, 3) y ángulo $\alpha = -90^{\circ}$.

Solución

La ecuación del giro es de la forma: $X' = C + M\overrightarrow{CX}$, donde M es la matriz del giro vectorial asociado a G.

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-90^{\circ}\right) & -\text{sen}\left(-90^{\circ}\right) \\ \text{sen}\left(-90^{\circ}\right) & \cos\left(-90^{\circ}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación de arriba, queda:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La ecuación anterior es equivalente a la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

O bien:

$$\begin{cases} x' = -1 + y \\ y' = 5 - x \end{cases}$$

Inicio

9. Hallar las ecuaciones de la simetría axial plana S de eje la recta $e \equiv y = x - 1$.

Solución

La ecuación del eje puede escribirse en la forma $e \equiv y = x - 1$, observándose que la pendiente del eje es m = 1.

Llamando $\frac{\alpha}{2}$ a la inclinación del eje, se verifica, pues, que tg $\frac{\alpha}{2}$ =1. Luego, $\frac{\alpha}{2}$ =45º y $\alpha = 90^{\circ}$.

La matriz de la simetría vectorial asociada a S es:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \text{sen}\,90^\circ \\ \text{sen}\,90^\circ & -\cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación de la simetría S es de la forma: $X' = A + M\overrightarrow{AX}$, siendo A un punto del eje.

Tomamos como punto A, por ejemplo el (1, 0) y ya queda:

$$S \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Otra manera de escribir la ecuación matricial de S es:

$$S \equiv \bar{X}' = N\bar{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

O bien:

$$\begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = -1 + x \end{cases}$$

Inicio

10. Escribir la ecuación de la traslación de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Solución

La ecuación matricial de una traslación genérica de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es de la forma: $\bar{X}' = N\bar{X}$, siendo

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el caso del enunciado, la ecuación anterior queda:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Es decir, $\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y + 6 \end{cases}$

Inicio

11. Hallar las ecuaciones de la simetría deslizante en el plano cuya descomposición canónica es $S_D = T_{\vec{u}} \circ S_e$ siendo la ecuación del eje de simetría $e \equiv y = 2x - 4$ y el vector traslación $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solución

1º) Hallemos en primer lugar la ecuación de la simetría axial S_e:

$S_e \equiv X' = A + M\overrightarrow{AX}$, siendo A un punto del eje e y M la matriz de la simetría vectorial asociada. Puede tomarse, por ejemplo, A=(2,0) como punto de e.

$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, siendo $\frac{\alpha}{2}$ la inclinación del eje.

$e \equiv y = 2x - 4 \Rightarrow \text{pte } e = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$. Se verifica, entonces, que:

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 2$. Elevando al cuadrado y despejando $\cos\alpha$, queda:

$1 - \cos\alpha = 4(1+\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\frac{4}{5}$. Como $\frac{\alpha}{2} < 90^\circ$ (pues $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$), se colige que $\alpha < 180^\circ$ y $\operatorname{sen}\alpha > 0$.

Luego, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$.

Por tanto, $M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

La ecuación de S_e queda:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\bar{X}' = N_{S_e}\bar{X} \text{, es decir, } \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

2º) Ecuaciones de la traslación de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$T_{\vec{u}} \equiv \bar{X}' = N_{T_{\vec{u}}}\bar{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

3º) Producto de la simetría por la traslación:

$$S_D \equiv \bar{X}' = N_{T_{\vec{u}}} \cdot N_{S_e}\bar{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{21}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\begin{cases} x' = \frac{21}{5} - \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$$

Inicio

12. Componer el giro G_1 del problema 5 con la traslación de vector $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

Hallemos la matriz $N = N_{T_{\vec{u}}} \cdot N_{G_1}$.

En el problema 5 página 30 se obtuvo $N_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}+\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La matriz de la traslación de vector $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ es $N_{T_{\vec{u}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $N = N_{T_{\vec{u}}} \cdot N_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}+\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 6-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La transformación producto es un movimiento directo por ser el producto de dos movimientos directos.

Por ser $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ para $\alpha = 60^\circ$, se trata de un **giro** de **ángulo** 60° (algo que se conocía de antemano por la teoría).

El centro será el único punto doble:

$$(N-I)\overline{X}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}+\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 6-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}+7=0 \\ \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}+12=0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-5\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{3\sqrt{3}+9}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $\left(\dfrac{5-5\sqrt{3}}{2},\dfrac{9+3\sqrt{3}}{2}\right)$ es el centro del giro

Inicio

13. Componer la simetría axial de eje la recta $r \equiv x + 2y + 4 = 0$, del problema 6, con la traslación de vector $\vec{u}=(5,7)$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

Busquemos la matriz del producto $N = N_{T_{\vec{u}}} \cdot N_{S_r}$.

En la resolución del problema 6 página 14 se obtuvo $N_{S_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{16}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

La matriz de la traslación de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ es $N_{T_{\vec{u}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicando ambas matrices se obtiene:

$$N = N_{T_{\vec{u}}} \cdot N_{S_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{17}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{19}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar una simetría axial (movimiento inverso) por una traslación (movimiento directo) se obtiene un movimiento inverso del plano.

El conjunto de puntos dobles o invariantes es la solución del sistema $(N - I)\overline{X} = 0$.

Analizando los rangos:

$$\mathrm{rg}(M-I)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5}\end{pmatrix}=1$$

$$\mathrm{rg}(N-I)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{17}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{19}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5}\end{pmatrix}=2$$

Por tanto, el sistema $(N-I)\overline{X}=0$ es incompatible y la transformación producto $T=T_{\vec{u}}\cdot S_r$ es una **simetría deslizante.**

Elementos característicos: eje de la simetría y vector de la traslación

La descomposición canónica de T es de la forma $T=S_e\cdot T_{\vec{v}}=T_{\vec{v}}\cdot S_e$, con e y $\vec{v}$ paralelos.

1º) El **eje** e es la recta que pasa por el punto $P=\frac{O+T(O)}{2}=\begin{pmatrix}\frac{17}{10}\\ \frac{19}{10}\end{pmatrix}$ y es paralela a los vectores invariantes por M.

Estos vectores son la solución del sistema:

$$(M-I)\vec{X}=\vec{0}\Leftrightarrow x+2y=0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x\ .$$

Así, unas ecuaciones paramétricas del eje son:

$$e\equiv\begin{cases}x=\frac{17}{10}+\lambda\\ y=\frac{19}{10}-\frac{1}{2}\lambda\end{cases}$$

2º) El **vector de traslación** es $\vec{v}=\overrightarrow{PP'}$, siendo $P'=T(P)$.

$$N\overline{P}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{29}{10}\\ \frac{13}{10}\end{pmatrix}\Rightarrow P'=\begin{pmatrix}\frac{29}{10}\\ \frac{13}{10}\end{pmatrix}$$

Resultando, $\vec{v}=\overrightarrow{PP'}=\begin{pmatrix}\frac{29}{10}\\ \frac{13}{10}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{17}{10}\\ \frac{19}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\ -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

Inicio

14. Componer las simetrías axiales S_1 y S_2 de ejes las rectas r_1 que pasa por el punto $A_1(2,3)$ y es paralela al vector $\vec{r}_1 = (5,2)$ y r_2 que pasa por el punto $A_2(-1,1)$ y es paralela al vector $\vec{r}_2 = (-3,1)$, respectivamente. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

Hallemos en primer lugar las ecuaciones de ambas simetrías para luego efectuar su producto.
La ecuación de S_1 es de la forma:

$$X' = A_1 + M_1 \overrightarrow{A_1X}$$

siendo $M_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_1 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & -\cos\alpha_1 \end{pmatrix}$, para un ángulo α_1 tal que la pendiente de r_1 sea $\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}$, es decir, $\frac{2}{5}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha_1}{1+\cos\alpha_1}} = \frac{2}{5} \Rightarrow 25(1-\cos\alpha_1) = 4(1+\cos\alpha_1) \Rightarrow \cos\alpha_1 = \frac{21}{29}.$$

Por otra parte, $\operatorname{sen}\alpha_1 > 0$ (por ser $\frac{\alpha_1}{2} < 90^\circ$, ya que $\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} > 0$, y, por tanto, $\alpha_1 < 180^\circ$).

$$\operatorname{sen}\alpha_1 = \sqrt{1-\cos^2\alpha_1} = \frac{20}{29}.$$

Luego, $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix}$ y la ecuación de S_1 es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{44}{29} \\ \frac{110}{29} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{44}{29} & \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{110}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \text{ siendo } N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{44}{29} & \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{110}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix} \text{ la matriz asociada a } S_1.$$

Procediendo de igual manera para S_2, se tiene que:

La ecuación de S_2 es de la forma:

$$X' = A_2 + M_2 \overrightarrow{A_2 X}$$

siendo $M_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & \operatorname{sen}\alpha_2 \\ \operatorname{sen}\alpha_2 & -\cos\alpha_2 \end{pmatrix}$, para un ángulo α_2 tal que la pendiente de r_2 sea $\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}$, es decir, $-\frac{1}{3}$.

Por ser $\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} < 0$, se verifica que $\frac{\alpha_2}{2} > 90^\circ$, luego, $\alpha_2 > 180^\circ$ y $\operatorname{sen}\alpha_2 < 0$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha_2}{1+\cos\alpha_2}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 9(1-\cos\alpha_2) = 1+\cos\alpha_2 \Rightarrow \cos\alpha_2 = \frac{4}{5}.$$

$$\operatorname{sen}\alpha_2 = -\sqrt{1-\cos^2\alpha_2} = -\frac{3}{5}.$$

Luego, $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ y la ecuación de S_2 es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \text{ siendo } N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \text{ la matriz asociada a } S_2.$$

El producto $S_2 \cdot S_1$ tiene de matriz asociada:

$$N = N_2 \cdot N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{448}{145} & \frac{24}{145} & \frac{143}{145} \\ -\frac{134}{145} & -\frac{143}{145} & \frac{24}{145} \end{pmatrix}.$$

Por ser los ejes de simetría de S_1 y S_2 (r_1 y r_2, respectivamente) rectas secantes, su **producto** $S_2 \cdot S_1$ es un **giro** G cuyo centro C es el punto de intersección de ambos ejes:

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 \equiv \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{2} \\ r_2 \equiv \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-1}{1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{23}{11} \\ y = \dfrac{15}{11} \end{array}\right.$$

El **centro** es el punto $C\left(-\frac{23}{11}, \frac{15}{11}\right)$.

El **ángulo** de giro α se obtiene a partir de la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{24}{145} & \dfrac{143}{145} \\ -\dfrac{143}{145} & \dfrac{24}{145} \end{pmatrix}.$$

Han de ser $\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{24}{145} \\ \text{sen}\alpha = -\dfrac{143}{145} \end{array}\right. \Rightarrow \alpha = 279^\circ\ 31'\ 38''$.

Inicio

15. Componer las simetrías axiales S_1 y S_2 de ejes las rectas r_1 que pasa por el punto $A_1(2,3)$ y es paralela al vector $\vec{r}_1 = (5,2)$ y r_2 que pasa por el punto $A_2(-1,1)$ y es paralela al vector $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, respectivamente. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

En este problema, la simetría S_2 tiene de eje la recta que pasa por el punto $A_2=(-1,1)$ y es paralela al vector $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La ecuación de S_2 es, entonces, de la forma:

$$X' = A_2 + M_2\, \overrightarrow{A_2X}$$

siendo $M_2 = \begin{pmatrix} \cos\ \alpha_2 & \text{sen}\ \alpha_2 \\ \text{sen}\ \alpha_2 & -\cos\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, para un ángulo α_2 tal que $\text{tg}\dfrac{\alpha_2}{2} = \dfrac{2}{5}$.

En la solución del problema 14 se obtuvo que, en este caso, es $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix}$.

Sustituyendo arriba se obtiene la ecuación de S_2:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

o bien,

$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{28}{29} & \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{70}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$, siendo $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{28}{29} & \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{70}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix}$ la matriz asociada a S_2.

Para la simetría S_1, que no ha variado respecto al problema 15, ya se obtuvo allí que $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{44}{29} & \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{110}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix}$.

La matriz asociada al producto $S_2 \cdot S_1$ es:

$$N = N_2 \cdot N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{29} & 1 & 0 \\ -\frac{40}{29} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que corresponde a una **traslación** (como era de esperar, pues los ejes de ambas simetrías son rectas paralelas) de **vector** $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{16}{29} \\ -\frac{40}{29} \end{pmatrix}$.

Inicio

16. Efectuar el producto de tres simetrías axiales $S_3 \circ S_2 \circ S_1$, de ejes respectivos:

$e_1 \equiv x = 1$ $e_2 \equiv y = 1$ y $e_3 \equiv x = -1$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

Para efectuar el producto de las tres simetrías, calculemos cada una de sus matrices asociadas N_i, i = 1, 2, 3.

La ecuación de S_1 es de la forma:

$$X' = A_1 + M_1 \overrightarrow{A_1X}$$

siendo A_1 un punto cualquiera del eje e_1, por ejemplo, $A_1=(1,0)$, y M_1 la matriz asociada a la simetría vectorial correspondiente a S_1.

Es $M_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_1 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & -\cos\alpha_1 \end{pmatrix}$, para un ángulo α_1 tal que la inclinación del eje e_1 sea $\frac{\alpha_1}{2}$.

Como e_1 es paralelo al eje de ordenadas, se verifica que $\frac{\alpha_1}{2} = 90^\circ$ y, por tanto, $\alpha_1 = 180^\circ$.

Sustituyendo en M_1, queda:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & \operatorname{sen} 180^\circ \\ \operatorname{sen} 180^\circ & -\cos 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y ya se obtiene la ecuación de S_1:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego, $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Procedamos exactamente de la misma forma para S_2 y S_3, pero, expresándolo esta vez de forma esquemática:

$$S_2 \equiv X' = A_2 + M_2 \overrightarrow{A_2X}$$

$A_2 \in e_2$, por ejemplo, A_2=(0,1)

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos\ \alpha_2 & \text{sen}\ \alpha_2 \\ \text{sen}\ \alpha_2 & -\cos\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\alpha_2}{2} = 0^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 0^\circ \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} \cos\ 0^\circ & \text{sen}\ 0^\circ \\ \text{sen}\ 0^\circ & -\cos\ 0^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego, $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Análogamente para S_3: $S_3 \equiv X' = A_3 + M_3 \overrightarrow{A_3X}$

$A_3 \in e_3$, por ejemplo, A_3=(-1,0)

$$M_3 = \begin{pmatrix} \cos\ \alpha_3 & \text{sen}\ \alpha_3 \\ \text{sen}\ \alpha_3 & -\cos\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\alpha_3}{2} = \text{inclinación de } e_3 = 90^\circ \Rightarrow \alpha_3 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow M_3 = \begin{pmatrix} \cos\ 180^\circ & \text{sen}\ 180^\circ \\ \text{sen}\ 180^\circ & -\cos\ 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_3 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego, $N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

El producto $T = S_3 \cdot S_2 \cdot S_1$ tiene de matriz asociada:

$$N = N_3 \cdot N_2 \cdot N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estudio de la transformación obtenida:

Al haber multiplicado un número impar de movimientos inversos (simetrías axiales), se ha obtenido otro movimiento inverso.

El conjunto de puntos dobles o invariantes es la solución del sistema $(N - I)\overline{X} = 0$.

Analizando los rangos:

$$\text{rg}(M - I) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{rg}(N - I) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Al no coincidir los rangos anteriores, el sistema $(N - I)\overline{X} = 0$ es incompatible y la transformación producto es una **simetría deslizante.**

Elementos característicos: eje de la simetría y vector de la traslación

La descomposición canónica de T es de la forma $T = S_e \cdot T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \cdot S_e$, con e y $\vec{v}$ paralelos.

1º) El **eje** e es la recta que pasa por el punto $P = \dfrac{O + T(O)}{2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y es paralela a los vectores invariantes por M.

Éstos son la solución del sistema:

$$(M - I)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \ .$$

Luego, un vector director del eje es, por ejemplo, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y unas ecuaciones paramétricas del eje son:

$$e \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -1 \end{cases}$$

2º) El **vector de traslación** es $\vec{v}=\overrightarrow{PP'}$, siendo $P'=T(P)$.

$$N\bar{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\\1\end{pmatrix}\Rightarrow P'=\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$$

Obteniéndose, $\vec{v}=\overrightarrow{PP'}=\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$.

Inicio

17. Efectuar el producto de cuatro simetrías axiales $S_4\circ S_3\circ S_2\circ S_1$, siendo las tres primeras las mismas que en el problema 16 y S_4 la simetría de eje la recta $e_4\equiv y-1$.

Solución

Hallemos en primer lugar la matriz N_4 asociada a la simetría S_4 para efectuar posteriormente el producto $N_4\cdot N_3\cdot N_2\cdot N_1$.

La ecuación de S_4 es de la forma:

$$S_4\equiv X'=A_4+M_4\,\overrightarrow{A_4X}$$

siendo A_4 un punto cualquiera del eje e_4, por ejemplo, $A_4=(0,-1)$, y M_4 la matriz asociada a la simetría vectorial correspondiente a S_4.

Es $M_4=\begin{pmatrix}\cos\alpha_4 & \operatorname{sen}\alpha_4\\ \operatorname{sen}\alpha_4 & -\cos\alpha_4\end{pmatrix}$, para un ángulo α_4 tal que la inclinación del eje e_4 sea $\frac{\alpha_4}{2}$.

Como e_4 es paralelo al eje de abscisas, se verifica que $\frac{\alpha_4}{2}=0^\circ$ y, por tanto, $\alpha_4=0^\circ$.

Sustituyendo en M_4, queda:

$$M_4=\begin{pmatrix}\cos 0^\circ & \operatorname{sen} 0^\circ\\ \operatorname{sen} 0^\circ & -\cos 0^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Y ya puede escribirse la ecuación de S_4:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-0\\y+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}.$$

Luego, $N_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$.

El producto $S_4\cdot S_3\cdot S_2\cdot S_1$ tiene por matriz asociada:

$$N=N_4\cdot N_3\cdot N_2\cdot N_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\-4&0&1\end{pmatrix}$$

que corresponde a una **traslación** de **vector** $\vec{u}=\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$.

Obsérvese que al haber multiplicado un número par de movimientos inversos (simetrías axiales), se ha obtenido un movimiento directo.

Inicio

18. Hallar la ecuación del giro que transforma los puntos A(3,1) y B(-1,-2) en los puntos A'(2,2) y B'(5,-2), respectivamente.

Solución

Sea G el giro buscado de centro C(a, b) y ángulo α.

La ecuación de G es de la forma: $X'=C+M\,\vec{CX}$

siendo $M=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha\\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Es decir:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha\\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$$

Como los puntos A(3, 1) y A'(2, 2) son puntos homólogos, se verifica que:

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha\\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3-a\\1-b\end{pmatrix}$$

Análogamente, por ser B'(5, -2) el transformado de B(-1, -2), se verifica también que:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-a \\ -2-b \end{pmatrix}$$

Restando miembro a miembro las dos últimas ecuaciones matriciales, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 4\cos\alpha - 3\,\text{sen}\,\alpha \\ 4 = 4\,\text{sen}\,\alpha + 3\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = 1 \\ \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Por tanto, $\alpha = 90^\circ$ y $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Utilizando de nuevo que A y A' son puntos homólogos, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-a \\ 1-b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 = a-1+b \\ 2 = b+3-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

El giro buscado G tiene por centro el punto C(2, 1) y ángulo $\alpha = 90^\circ$.
Su ecuación es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Inicio

19. Si A, B, C y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo, determinar la transformación $S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$.

Solución

Supongamos que $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

La simetría central S_A coincide con el giro de centro A y ángulo 180º, que tiene por ecuación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\text{sen}\,180^\circ \\ \text{sen}\,180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_1 & -1 & 0 \\ 2a_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz asociada a S_A es $N_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_1 & -1 & 0 \\ 2a_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si utilizamos una notación similar para los otros tres vértices B, C y D, se verifica igualmente que:

$N_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\,b_1 & -1 & 0 \\ 2\,b_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $N_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2c_1 & -1 & 0 \\ 2c_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $N_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2d_1 & -1 & 0 \\ 2d_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

De manera que la transformación producto $S_D \cdot S_C \cdot S_B \cdot S_A$ tiene de matriz asociada:

$$N = N_D \cdot N_C \cdot N_B \cdot N_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(b_1 - a_1) - 2(c_1 - d_1) & 1 & 0 \\ 2(b_2 - a_2) - 2(c_2 - d_2) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero, por ser A, B, C y D los vértices consecutivos de un paralelogramo, se verifica que los vectores $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ y $\vec{DC} = (c_1 - d_1, c_2 - d_2)$ son iguales; luego, tienen las mismas coordenadas, es decir:

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = c_1 - d_1 \\ b_2 - a_2 = c_2 - d_2 \end{cases}$$

Por tanto, es:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el producto $S_D \cdot S_C \cdot S_B \cdot S_A$ es la **transformación identidad** del plano.

Inicio

20. Determinar el giro que transforma la recta x+y=0 en la recta $\left(\sqrt{3}+1\right)x+\left(-\sqrt{3}+1\right)y=2$.

Solución

El **centro** del giro será la intersección de las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ \left(\sqrt{3}+1\right)x+\left(-\sqrt{3}+1\right)y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

El **ángulo** de giro es el que forman las rectas:

$$\cos(\vec{r},\vec{s})=\frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|}=\frac{(1,1)\cdot\left(1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=60^{\circ}$$

Por tanto, se trata de un giro de centro $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y amplitud de 60º.

Inicio