TRANSFORMACIONES EN EL ESPACIO (R^2)

ECUACIONES

- CONSTRUIR
- CLASIFICAR

TRANSFORMACIONES EN EL ESPACIO (R^3)

ECUACIONES

- CONSTRUIR
- CLASIFICAR

ECUACIONES DE LOS MOVIMIENTOS, HOMOTECIAS Y SEMEJANZAS del Plano

Ecuaciones de los distintos Movimientos en E_2

Sea la matriz: $N = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline O'_x & a_{11} & a_{12} \\ O'_y & a_{21} & a_{22} \end{array}\right)$, donde el transformado del punto O: $\begin{pmatrix} O'_x \\ O'_y \end{pmatrix}$=O'=T(O) y M la matriz de la transformación ortogonal asociada al movimiento, es decir:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

1. Identidad.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Simetría axial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline O'_x & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ O'_y & \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

3. Giro

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline O'_x & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ O'_y & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

4. Traslación

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline O'_x & 1 & 0 \\ O'_y & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

5. Simetría deslizante: $S_d = S_e \circ T_u$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline O'_x + u & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ O'_y + v & \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \text{donde:}$$

(O'_x, O'_y) son las coordenadas de T(O).

(u, v) son las coordenadas del vector traslación.

La ecuación anterior es equivalente a:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline E&A&B\\F&B&-A\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Ecuaciones de las Homotecias y Semejanzas en E_2

Homotecias:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline (1-k)C_x&k&0\\(1-k)C_y&0&k\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Siendo k positivo o negativo según sea la Homotecia directa o inversa.

(C_x, C_y) = Centro de la Homotecia es único punto doble.

Semejanzas:

Semejanza directa $S = H_{(C,k)} \cdot G_{(C,\alpha)}$:

Siendo C = (a, b)

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k\cos\alpha&-k\,\mathrm{sen}\alpha\\k\,\mathrm{sen}\alpha&k\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\\F\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline E&A&-B\\F&B&A\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Semejanza inversa $S = H_{(C,k)} \cdot S_e$:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k\cos\alpha&k\,\mathrm{sen}\alpha\\k\,\mathrm{sen}\alpha&-k\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\\F\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A&B\\B&-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline E&A&B\\F&B&-A\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

CONSTRUIR LAS ECUACIONES DE LOS MOVIMIENTOS, HOMOTECIAS Y SEMEJANZAS del Plano

Movimientos en E_2

GIRO

Datos: elementos característicos:

- **Centro de Giro: C (C_x, C_y)**
- **Ángulo de giro: α**

Ecuación del Giro:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - C_x \\ y - C_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline O'_x & \cos\alpha & -sen\alpha \\ O'_y & sen\alpha & \cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix},$$

donde O'=(O'$_x$,O'$_y$) es el transformado del origen: T(O)=O'

SIMETRÍA AXIAL

Datos: elementos característicos:

- **Eje de simetría: ax + by + c = 0**

Ecuación de la simetría axial

Tomamos un punto cualquiera del eje de simetría P = (P_x, P_y)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ sen\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - P_x \\ y - P_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline O'_x & \cos\alpha & sen\alpha \\ O'_y & sen\alpha & -\cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix},$$

donde O'=(O'$_x$,O'$_y$) es el transformado del origen: T(O)=O'

TRASLACIÓN

Datos: elemento característico:

- **Vector de traslación:** $\vec{u}$ = (u_x, u_y)

Ecuación de la Traslación

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline u_x & 1 & 0 \\ u_y & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

SIMETRÍA DESLIZANTE:

$S_D = S_E\, T_U$

Datos: elemento característico:

- **Vector de traslación:** $\vec{u} = (u_x, u_y)$
- **Eje de simetría:** $(x, y) = (a, b) + t\,(u_x, u_y)$ (tiene de inclinación $\alpha/2$)

Ecuación de la simetría deslizante:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ sen\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline A+m & \cos\alpha & sen\alpha \\ B+n & sen\alpha & -\cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

HOMOTECIAS

Datos característicos:

- **Centro de la homotecia:** C_x y C_y (es único punto doble).
- **Razón: k**

Ecuación de la Homotecia:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - C_x \\ y - C_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline (1-k)C_x & k & 0 \\ (1-k)C_y & 0 & k \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Siendo k positivo o negativo según sea la Homotecia directa o inversa.

SEMEJANZAS (k>0)

Semejanza directa $S = H_{(C,k)} \cdot G_{(C,\alpha)}$:

Elementos característicos:

- **Centro de la Semejanza:** C_x y C_y (es único punto doble).
- **Razón:** k
- **Ángulo de rotación:** α

Ecuación de la Semejanza directa:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\,\mathrm{sen}\alpha \\ k\,\mathrm{sen}\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - C_x \\ y - C_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline E & A & -B \\ F & B & A \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Semejanza inversa $S = H_{(C,k)} \cdot S_e$:

Elementos característicos:

- **Centro de la Semejanza:** C_x y C_y (es único punto doble).
- **Razón:** k
- **Eje de simetría:** e: pasa por el centro

Ecuación de la Semejanza directa:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & k\,\mathrm{sen}\alpha \\ k\,\mathrm{sen}\alpha & -k\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - C_x \\ y - C_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline E & A & B \\ F & B & -A \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

PROCEDIMIENTO PARA CLASIFICAR LOS MOVIMIENTOS EN E_2

1. Calcular $M \cdot M^t = \begin{cases} I & \Rightarrow \text{Movimiento} \quad \Rightarrow \text{Seguir paso 2.} \\ p \cdot I & \Rightarrow \text{Homotecia} \quad \text{o} \quad \text{Semejanza.} \\ \neq \text{casos anteriores} & \Rightarrow \text{Transformación afín.} \end{cases}$

2. Calcular determinante (M).

   a. Si det(M) >0 $\Rightarrow$ Movimiento directo:

   i. Identidad. Todos los puntos son invariantes.

   ii. Giro. Solo tiene un punto invariante. Elementos característicos:

      1. Centro de giro, es el único punto característico. Se calcula resolviendo la ecuación en Derive: $N \cdot X = X \rightarrow$ Lupa $\rightarrow$ Nos dará un punto que será el centro de giro.

      2. Ángulo, se iguala la matriz definición de giro $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ con la matriz dada en el enunciado
      Se recomienda para calcular el ángulo utilizar la calculadora.

   iii. Traslación. No tiene puntos invariantes $\Rightarrow$ Con derive cuando queramos resolver $N \cdot X = X$ nos dará [], es decir no tiene solución.

   Elementos característicos:

      1. Vector de traslación. Calculamos el transformado del origen $(0, 0) \rightarrow T(O)$ este punto se obtiene agrupando todos los términos independientes de la ecuación dada. Es decir llegar a la matriz $N = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{array}\right)$, (a, b) es el transformado del origen.

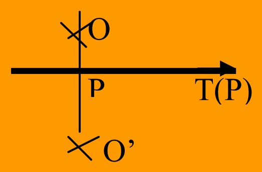
   b. Si det(M) < 0 $\Rightarrow$ Movimiento inverso:

   i. Simetría axial. Todos los puntos pertenecientes al eje de simetría son invariantes. Elementos característicos:

1. Eje de simetría. Se calcula con Derive resolviendo la ecuación NX = X $\Rightarrow$ Nos tiene que dar una recta, que es el eje de la simetría.

ii. Simetría deslizante. No tiene puntos invariantes. Al resolver la ecuación NX = X nos dará [], es decir no tiene solución. La simetría deslizante: $S_d = S_e \cdot T_u$. Elementos característicos:

1.



Se calcula el punto P que es punto medio de O y T(O)
Calculamos el vector de traslación u = T(P) – P.

2. Eje de la simetría deslizante. Debe cumplir:
Pasar por el punto P (punto medio de O y T(O) y tener la misma dirección que el vector de traslación.
Ecuación del eje de simetría es: $\vec{x} = P + t\,\vec{u}$

Procedimiento para clasificar Homotecias y Semejanzas en E_2

Homotecias, son fáciles de identificar son matrices escalares, tienen la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Elementos característicos:

- Razón de la homotecia: k (elemento de la diagonal principal).
- Centro de la homotecia: C es el único punto invariante, se calcula resolviendo la ecuación NX =X.

Semejanzas

Se dará los siguientes pasos:

1. $M \cdot M^t = pI$ (si obtenemos este resultado y la matriz M no es del tipo de las Homotecias se dice que es una **Semejanza**, si el producto $M \cdot M^t$ no nos da pI, se dice que es una **Transformación Afín**). Si es una Semejanza seguimos con el paso segundo.

2.

   a. $Det(M) > 0 \Rightarrow$ Semejanza directa $\rightarrow S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \cdot G_{(C,\alpha)}$. Elementos característicos:

i. Razón de Semejanza: $k = \sqrt{p}$

ii. Centro de la Semejanza (= al de la Homotecia). Resolver la ecuación NX = X.

iii. Ángulo de giro: α Se iguala la matriz definición del giro con la matriz Q, siendo $Q = \frac{1}{k}(M)$ (M matriz dada en el enunciado).

Matriz definición: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

b. Det(M) < 0 ⇒ Semejanza inversa → $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \cdot S_e$.

Elementos característicos:

i. Razón de Semejanza: $k = \sqrt{p}$

ii. Centro de la Semejanza (= al de la Homotecia). Resolver la ecuación NX = X.

c. Eje de semejanza es paralelo al eje de simetría axial. Debe cumplir: Pasar por el centro de la Semejanza y tener el mismo vector dirección que el eje de simetría. El Centro se conoce. Para calcular la ecuación del eje de simetría se resuelve con Derive la ecuación Q·X = X, nos dará la ecuación vectorial de una recta, es decir Ax + By = 0, cuyo vector dirección es.
(-B, A). Luego ya podemos calcular el eje de Semejanza:
$e:\ \vec{x} = C + t\,(-B, A)$.

2ª Forma

Despejar la matriz de la simetría axial de la ecuación $S = H \cdot S_e$ ⇒

$S_e = H^{-1} \cdot S$ donde la matriz de la Homotecia es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (1-k)C_x & -k & 0 \\ (1-k)C_y & 0 & -k \end{pmatrix}$

La matriz S es matriz dada en el problema. Multiplicando la matriz inversa correspondiente a la Homotecia con la matriz dada en el enunciado se obtiene la matriz correspondiente a la simetría axial, N_{se}.
Para calcular el eje de simetría: $N_{se} \cdot X = X$

ECUACIONES DE LOS MOVIMIENTOS, HOMOTECIAS Y SEMEJANZAS del Espacio

Sea la matriz:

$$N = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline O'_x & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ O'_y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ O'_z & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$, donde el transformado del punto O: $T(O) = \begin{pmatrix} O'_x \\ O'_y \\ O'_z \end{pmatrix}$

y M la matriz de la transformación ortogonal asociada al movimiento, es decir:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de los distintos Movimientos en E_3, respecto una base B = $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

6. Identidad.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

7. Simetría especular

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline O'_x & -1 & 0 & 0 \\ O'_y & 0 & 1 & 0 \\ O'_z & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

8. Giro

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline O'_x & 1 & 0 & 0 \\ O'_y & 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ O'_z & 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

9. Simetría rotacional: $S = S_\pi \cdot G_{(e,\,\alpha)}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline O'_x & -1 & 0 & 0 \\ O'_y & 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ O'_z & 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

10. Traslación

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0\\ u_2 & 0 & 1 & 0\\ u_3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

11. Simetría deslizante : $S = S_\pi \cdot\ T_{\vec{u}}$, donde $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline A+u_1 & -1 & 0 & 0\\ B+u_2 & 0 & 1 & 0\\ C+u_3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

12. Movimiento Helicoidal: $H = G_{(e,\,\alpha)} \cdot\ T_{\vec{u}}$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline A+u_1 & 1 & 0 & 0\\ B+u_2 & 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ C+u_3 & 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

CONSTRUIR LAS ECUACIONES DE LOS MOVIMIENTOS, HOMOTECIAS Y SEMEJANZAS del Espacio

"Se conocen los elementos característicos y se quiere calcular la ecuación matricial del movimiento respecto la base canónica".

La matriz de un movimiento en la base canónica se obtiene realizando la operación siguiente: $P\cdot M\cdot P^{-1}$, P es la matriz de paso y M es la matriz del movimiento en la base B. La única matriz que está respecto la canónica es la matriz de traslación.
Cálculo de los vectores de la base B:
1) El primer vector es el director del eje o perpendicular al plano de simetría (según dato). Normalizar el vector
2) El segundo vector se obtiene aplicando el producto escalar ya que debe ser cero. Normalizar el vector
3) El tercero se obtiene aplicando el producto vectorial. Normalizar el vector.

Clasificación	$R=\left\{A,\left\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right\}\right\}$ Referencia ortonormal	Matriz de cambio de la referencia R a la canónica	Ecuación matricial de la transformación en la base Canónica
Giro Elementos característicos: **Eje de giro** **Ángulo de giro**	A un punto cualquiera del eje. (invariante) $A(x_A, y_A, z_A)$ $\vec{u}$ vector director del eje normalizado $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$	$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\x_A&u_1&v_1&w_1\\y_A&u_2&v_2&w_2\\z_A&u_3&v_3&v_3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\x_A&u_1&v_1&w_1\\y_A&u_2&v_2&w_2\\z_A&u_3&v_3&w_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\alpha&-sen\alpha\\0&0&sen\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\x_A&u_1&v_1&w_1\\y_A&u_2&v_2&w_2\\z_A&u_3&v_3&w_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$
Simetría especular Elementos característicos: **Plano de simetría**	A un punto cualquiera del plano. (invariante) $A(x_A, y_A, z_A)$ $\vec{u}$ vector normal	$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\x_A&u_1&v_1&w_1\\y_A&u_2&v_2&w_2\\z_A&u_3&v_3&v_3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\x_A&u_1&v_1&w_1\\y_A&u_2&v_2&w_2\\z_A&u_3&v_3&w_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\x_A&u_1&v_1&w_1\\y_A&u_2&v_2&w_2\\z_A&u_3&v_3&w_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$

	al plano normalizado $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$		
Simetría rotacional: **S = G·S** Elementos característicos: **Eje de giro** **Ángulo de giro** **Plano de simetría**	A punto de intersección del plano y eje (invariante) $A(x_A, y_A, z_A)$ $\vec{u}$ vector director del eje normalizado $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$	$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_A & u_1 & v_1 & w_1 \\ y_A & u_2 & v_2 & w_2 \\ z_A & u_3 & v_3 & v_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_A & u_1 & v_1 & w_1 \\ y_A & u_2 & v_2 & w_2 \\ z_A & u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -sen\alpha \\ 0 & 0 & sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_A & u_1 & v_1 & w_1 \\ y_A & u_2 & v_2 & w_2 \\ z_A & u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Traslación Elementos característicos: **Vector de traslación**	$\vec{v}$ vector traslación $\vec{v}=(t_x, t_y, t_z)$	No se utiliza otro sistema de referencia. Se trabaja en la referencia canónica Las coordenadas del **punto** transformado del origen son (t_x,t_y,t_z), coinciden con las del **vector de traslación**	$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_x & 1 & 0 & 0 \\ t_y & 0 & 1 & 0 \\ t_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C$
Simetría deslizante: **S = S·T** Elementos característicos: **Plano de simetría** **Vector de traslación**	A punto cualquiera del plano. $A(x_A, y_A, z_A)$ $\vec{u}$ vector normal al plano normalizado $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ $\vec{v}$ vector traslación	$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_A & u_1 & v_1 & w_1 \\ y_A & u_2 & v_2 & w_2 \\ z_A & u_3 & v_3 & v_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_A & u_1 & v_1 & w_1 \\ y_A & u_2 & v_2 & w_2 \\ z_A & u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_A & u_1 & v_1 & w_1 \\ y_A & u_2 & v_2 & w_2 \\ z_A & u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_x & 1 & 0 & 0 \\ t_y & 0 & 1 & 0 \\ t_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

	$\vec{v}=(t_x, t_y, t_z)$		
Movimiento Helicoidal: **H = G·T** Elementos característicos: **Eje de giro** **Ángulo de giro** **Vector de traslación**	A punto cualquiera del eje. $A(x_A, y_A, z_A)$ $\vec{u}$ vector director al eje, normalizado $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ $\vec{v}$ vector traslación $\vec{v}=(t_x, t_y, t_z)$	$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\x_A&u_1&v_1&w_1\\y_A&u_2&v_2&w_2\\z_A&u_3&v_3&v_3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\x_A&u_1&v_1&w_1\\y_A&u_2&v_2&w_2\\z_A&u_3&v_3&w_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\alpha&-sen\alpha\\0&0&sen\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\x_A&u_1&v_1&w_1\\y_A&u_2&v_2&w_2\\z_A&u_3&v_3&w_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\t_x&1&0&0\\t_y&0&1&0\\t_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$

RESUMEN DE LAS ECUACIONES OBTENIDAS

<table>
<tr><th>Clasificación</th><th>Referencia ortonormal
$R=\left\{A,\left\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right\}\right\}$</th><th>Ecuación matricial de la transformación en la base R</th></tr>
<tr><td>Giro
Elementos característicos:
Eje de giro
Ángulo de giro</td><td>A un punto cualquiera del eje. (invariante)
$A(x_A, y_A, z_A)$
$\vec{u}$ vector director del eje normalizado
$\vec{u}=(u_1,u_2, u_3)$</td><td>$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\alpha&-sen\alpha\\0&0&sen\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Simetría especular
Elementos característicos:
Plano de simetría</td><td>A un punto cualquiera del plano. (invariante)
$A(x_A, y_A, z_A)$
$\vec{u}$ vector normal al plano normalizado
$\vec{u}=(u_1,u_2, u_3)$</td><td>$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Simetría rotacional:
S = G·S
Elementos característicos:
Eje de giro
Ángulo de giro
Plano de simetría</td><td>A punto de intersección del plano y eje (invariante)
$A(x_A, y_A, z_A)$

$\vec{u}$ vector director del eje normalizado
$\vec{u}=(u_1,u_2, u_3)$</td><td>$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&\cos\alpha&-sen\alpha\\0&0&sen\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$</td></tr>
</table>

Traslación Elementos característicos: **Vector de traslación**	$\vec{v}$ vector traslación $\vec{v} = (t_x, t_y, t_z)$	$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\t_x&1&0&0\\t_y&0&1&0\\t_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}_C$
Simetría deslizante: **S = S·T** Elementos característicos: **Plano de simetría** **Vector de traslación**	A punto cualquiera del plano. $A(x_A, y_A, z_A)$ $\vec{u}$ vector normal al plano normalizado $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$	$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\t_x&1&0&0\\t_y&0&1&0\\t_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$
Movimiento Helicoidal: **H = G·T** Elementos característicos: **Eje de giro** **Ángulo de giro** **Vector de traslación**	A punto cualquiera del eje. $A(x_A, y_A, z_A)$ $\vec{u}$ vector director al eje, normalizado $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$	$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\alpha&-sen\alpha\\0&0&sen\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\t_x&1&0&0\\t_y&0&1&0\\t_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$

Procedimiento para determinar las ecuaciones de las Homotecias y Semejanzas en E_3

Homotecia

Se tiene los elementos característicos de la Homotecia:

- **Centro: $C = (C_x, C_y, C_z)$**
- **Razón: k**

La ecuación matricial de la Homotecia es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - C_x \\ y - C_y \\ z - C_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (1-k)C_x & k & 0 & 0 \\ (1-k)C_y & 0 & k & 0 \\ (1-k)C_z & 0 & 0 & k \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Semejanza

Se tiene los elementos característicos de la Semejanza:

- **Centro: $C = (C_x, C_y, C_z)$**
- **Razón: k**
- **Eje de giro:** $\vec{x} = C + t\,\vec{u}$
- **Ángulo de giro: α**

Ecuación matricial de la Semejanza:

Matriz de la Homotecia

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (1-k)C_x & k & 0 & 0 \\ (1-k)C_y & 0 & k & 0 \\ (1-k)C_z & 0 & 0 & k \end{array}\right)$$

Matriz del Giro

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - C_x \\ y - C_y \\ z - C_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ O'_x & 1 & 0 & 0 \\ O'_y & 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ O'_z & 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Multiplicando las dos matrices se obtiene la matriz de la Semejanza.

PROCEDIMIENTO PARA CLASIFICAR LOS MOVIMIENTOS EN E_3

Se realizarán los siguientes pasos:

1. Calcular $\quad \mathbf{M \cdot M^t} = \begin{cases} I \quad \text{Movimiento} \Rightarrow \text{Seguir paso 2.} \\ p \cdot I \quad \text{Homotecia o Semejanza} \\ \neq \text{de los casos anteriores Transformación afín.} \end{cases}$

2. Si det(M) = 1 ⇒ Movimiento directo:

- **Identidad, todos los puntos son invariantes**.
- **Giro, recta de puntos invariantes**.
- **Traslación, no hay puntos invariantes y la dimensión de vectores invariantes: dim F = 3.**
- **Mov. Helicoidal, no hay puntos invariantes y dim F = 1.**

Si det(M) = -1 ⇒ Movimiento inverso:

- **Simetría especular, plano de puntos invariantes**.
- **Simetría rotacional, 1 punto invariante.**
- **Simetría deslizante, no tiene puntos invariantes.**

3. Cálculo de puntos invariantes

3.1 Movimiento directo

Con DERIVE:

- **GIRO**

  N·X = X → Lupa (resolver), marcamos x, y, z → si el resultado es una recta (intersección de dos planos) → la recta dada es el eje de giro.

  Cálculo del ángulo de giro

  Se iguala la traza de la matriz definición del giro y la traza de la matriz M dada en el enunciado, es decir: $1 + 2\cos\alpha$ = traza matriz M dada.

- **N·X = X → Lupa (resolver), marcamos x, y, z → no tiene solución [] → No tiene puntos invariantes.**

  <u>Si el movimiento es una traslación</u> se reconoce inmediatamente ya que la matriz N debe tener la siguiente estructura:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline A & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

<u>Si es Movimiento helicoidal</u>, $H = G_{(e,\alpha)} \cdot T_{\vec{u}}$

Para calcular sus elementos característico dar los siguientes pasos:

1. Cálculo del vector de traslación.

$M \cdot X = X \rightarrow$ nos da la dirección del eje e paralelo a $\vec{u}$

Derive nos presenta la recta en forma paramétrica (k) $\rightarrow$

$\vec{u} = (f_1(k), f_2(k), f_3(k))$

Cálculo del parámetro k del vector $\vec{u}$

$H = G_{(e,\alpha)} \cdot T_{\vec{u}} \rightarrow$ despejamos $G_{(e,\alpha)} = H \cdot T_{-\vec{u}}$

Tenemos las siguientes matrices:

N $\rightarrow$ matriz dada en el enunciado

$$T_{-\vec{u}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -f_1(k) & 1 & 0 & 0 \\ -f_2(k) & 0 & 1 & 0 \\ -f_3(k) & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Multiplicamos estas dos matrices $(N \cdot T_{-\vec{u}}) = N_G$ matriz de giro.

$\rightarrow N_G X = X \rightarrow$ Formamos la matriz $(N_G - I)$ e imponemos la condición de que el $rg(N_G - I) = 2$ es decir tomamos un determinante de orden tres donde obligatoriamente una de las columnas es el vector de traslación e igualamos a cero y despejamos k.

Sustituimos k en el vector de traslación y obtenemos $\vec{u}$

Cálculo del parámetro del eje de giro

Sustituir k en la matriz de giro y resolver con Derive:

$N_G \cdot X = X \rightarrow$ Lupa (resolver), marcamos x, y z $\rightarrow$ nos da la ecuación del eje.

Cálculo del ángulo de giro: $1 + 2\cos\alpha =$ traza M_G

3.2 Movimiento inverso

Con DERIVE:

- **Simetría especular**

  N·X = X → Lupa (resolver), marcamos x, y, z → nos dará como solución un plano, que será el plano de simetría.

- **Simetría rotacional** $S = S_\pi \cdot G_{(e,\alpha)}$

  N·X = X → Lupa (resolver), marcamos x, y, z → nos dará como solución un punto → punto invariante

  Cálculo del eje de giro

  Eje de giro pasa por el punto invariante y el vector director se obtiene resolviendo M·X = - X (Derive)

  Cálculo del plano

  El plano y el eje son perpendiculares entre si, el vector director del eje coincide con el vector normal del plano cuyas componentes son los coeficientes de la "x", "y" y "z" del plano y para calcular el término independiente obligamos que pase por el punto invariante.

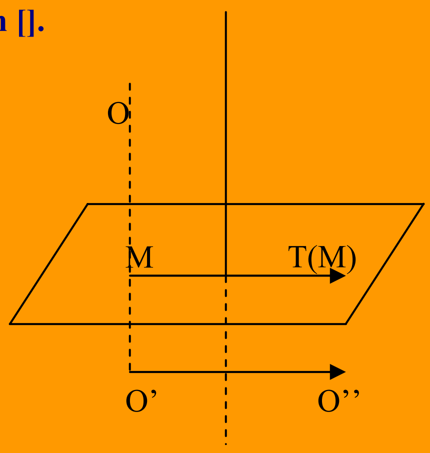
$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

  Cálculo del ángulo de giro

$$1 + 2\cos\alpha = \text{traza } M_G$$

- **Simetría deslizante:** : $S = S_\pi \cdot T_{\vec{u}}$

  N·X = X → Lupa (resolver), marcamos x, y, z → no tiene solución [].



Cálculo del vector traslación

1. **$M = \dfrac{O + T(O)}{2}$**
2. **Calcular T(M) $\rightarrow$ transformado de M**
   Sustituir en X las coordenadas del punto medio M en la ecuación: X' = N X
3. **Cálculo del vector de traslación: $\vec{u}$ = T(M) - M**

Cálculo del plano

$S_D = S_\pi \cdot T_{\vec{u}} \Rightarrow S_\pi = T_{-\vec{u}}\, S_D$

La matriz de S_D es la dada en el enunciado.

$$T_{-\vec{u}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -u_1 & 1 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 & 0 \\ -u_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El producto de estas os matrices nos da la matriz de la simetría especula: $N_\pi \Rightarrow N_\pi\ X = X \rightarrow$ Lupa (resolver), marcamos x, y, z $\rightarrow$ se obtiene el plano de la simetría especular.

Procedimiento para clasificar las Homotecias y Semejanzas en E_3

Ecuación de las Homotecias:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (1-k)C_x & k & 0 & 0 \\ (1-k)C_y & 0 & k & 0 \\ (1-k)C_z & 0 & 0 & k \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$N = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (1-k)C_x & k & 0 & 0 \\ (1-k)C_y & 0 & k & 0 \\ (1-k)C_z & 0 & 0 & k \end{array}\right), \quad M = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Elementos de la Homotecia

- **Razón** de la homotecia: k elemento de la diagonal principal de la matriz M.
- **Centro** el único punto invariante: C = (C_x, C_y, C_z)
  Se calcula resolviendo con derive: $N\overline{X} = \overline{X}$.

Semejanzas $S = H_{(C,k)} \circ G_{(e,\alpha)}$

Se dará los siguientes pasos:

1. $M \cdot M^t = p \cdot I$ (si $\neq I$ y $\neq p \cdot I \Rightarrow$ transformación afín)

2. Si $Det(M) > 0 \Rightarrow$ Semejanza directa.
   Si $Det(M) < 0 \Rightarrow$ Semejanza inversa.

3. Cálculo de los elementos característicos
   Semejanza directa o Semejanza inversa

- **Razón.** $k = \sqrt{p} \Rightarrow$ con $k > 0$
  Explicación: $M \cdot M^t = p \cdot I$; sabemos que $M \cdot M^t = kQ \cdot kQ^t = k^2\, Q \cdot Q^t \Rightarrow$
  $\Rightarrow k^2 I$. Luego $k^2 = p \Rightarrow k = \sqrt{p}$

- **Centro**: único punto invariante, se calcula resolviendo con Derive $NX = X$ nos dará un punto.

- **Eje de giro.**

  - **Primera forma de cálculo**

    Se calcula la dirección del eje de giro:
    La matriz correspondiente al giro es:
    $$\begin{cases} Q = \dfrac{1}{k} \cdot M, & \text{si es una semejanza directa en } E_3 \\ Q = \dfrac{1}{-k} \cdot M, & \text{si es una semejanza inversa en } E_3 \end{cases}$$
    Y resolvemos con Derive $QX = X$, nos dará la ecuación de una recta como intersección de dos planos, pasamos dicha ecuación a paramétricas y los coeficientes de los parámetros serán las coordenadas del vector director del eje de giro.

    La ecuación del eje de semejanza es la recta que pasa por el Centro y tiene como vector director la dirección del eje de giro.
    Ecuación en forma vectorial es: $\vec{x} = C + t\,\vec{u}$

  - **Segunda forma para calcular el eje de giro**

    Despejar el Giro de $S = H_{(C,\pm k)} \circ G_{(e,\alpha)}$. Es decir:
    $$G_{(e,\alpha)} = H^{-1}_{(C,\pm k)} S = H_{\left(C,\frac{1}{\pm k}\right)} S$$
    Con Derive resolvemos $N_G \overline{X} = \overline{X}$ y nos dará el eje de giro.

- **Ángulo de giro: $1 + 2\cos\alpha$ = Traza de M_G**

Nota.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - C_x \\ y - C_y \\ z - C_z \end{pmatrix}$$

$O'_x = C_x - K\, C_x = (1 - k)\, C_x$

$O'_y = C_y - K\, C_y = (1 - k)\, C_y$

$O'_z = C_z - K\, C_z = (1 - k)\, C_z$

Luego: $$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (1-k)C_x & k & 0 & 0 \\ (1-k)C_y & 0 & k & 0 \\ (1-k)C_z & 0 & 0 & k \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$