Cónicas

1.- Hacer un estudio completo de las siguientes *cónicas*:

a) $11x^2 + 14y^2 - 4xy + 40x + 20y + 45 = 0$ **Solución**

b) $x^2 - 8xy + y^2 - 4x - 4y + 1 = 0$ **Solución**

c) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 8y = 0$ **Solución**

d) $4x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 4y - 10 = 0$ **Solución**

2.- Hallar la ecuación de la *cónica* que pasa por los puntos $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{3}{2},\frac{-3}{4}\right)$.

Solución

3.- Hallar el *centro* y las *asíntotas* de la cónica: $2 + x^2 + 2xy = 0$.

Solución

4.- Clasificar la siguiente *cónica* según los valores del parámetro "a":

a) $x^2 - 2axy + 2ay^2 - 2x + 4ay = 0$ **Solución**

b) $ax^2 - 2xy + ay^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ **Solución**

5.- Hallar λ y μ sabiendo que las ecuaciones $x^2 + \lambda y^2 = 1$, $x'y' = \mu$, corresponden a una misma *cónica* expresada en dos sistemas de referencia *ortonormales* distintos.

Solución

6.-

a) Clasificar la siguiente *cónica* según los valores del parámetro "a":

$$x^2 + 2ay^2 - 2axy - 2x + 4ay = 0.$$

b) Hacer un estudio completo de la *cónica* anterior para a = 2:

Ecuación reducida

Parámetro de la *cónica*

Eje y *vértice*

Foco y *directriz*

Dibujo de la *cónica*.

Solución

7.-

a) Clasificar la siguiente *cónica* según los valores del parámetro "a":

$$a + 2x + 2y + ax^2 + 2xy + ay^2 = 0.$$

b) Hacer un estudio completo de la *cónica* anterior para a = 0

Ecuación reducida

Semiejes, *excentricidad* y *parámetro* de la *cónica*

Centro, si procede

Ejes y *vértices*

Focos y *directrices*
Asíntotas, si procede
Dibujo de la *cónica*.

Solución

8.- Dada la *cónica* $2x^2-y^2+4xy-x=0$, se pide:
a) Clasificación
b) *Ecuación reducida*
c) *Semiejes* y *excentricidad*
d) *Centro*
e) *Ejes*
f) *Asíntotas*
g) *Vértices*
h) Dibujo de la *cónica*.

Solución

9.- Dada la *cónica* de ecuación: $9x^2+6xy-22x+y^2-34y+49=0$. Se pide:
a) Ecuación matricial.
b) Clasificación.
c) *Ecuación reducida,*
d) *Parámetro* de la *cónica*.
e) *Vértice* y *eje*.
f) *Foco* y *directriz*.

Solución

10.-Dada la *cónica* $x^2 + y^2 + kxy - 10x - 2y + 1 = 0$, se pide:
a) La ecuación matricial
b) Ecuación de las *Asíntotas* y eje focal para el valor $k = 2$.
c) *Ecuación reducida* para el valor $k = 1$
d) Hallar la *excentricidad* para el valor $k = \frac{1}{2}$.
e) Clasificar según los valores del parámetro $k \in \Re$
f) Demostrar que la *excentricidad* de cualquier *hipérbola equilátera* es $e = \sqrt{2}$

Solución

11.- Dada la *cónica* de ecuación: $1+2x+4y+3x^2+4xy=0$ Se pide:
a) Clasificación
b) *Ecuación reducida*
c) *Semiejes*, *excentricidad* y *Parámetro* de la *cónica*
d) *Centro*, si procede
e) *Ejes* y *Vértices*
f) *Focos* y *directrices*
g) *Asíntotas*, si procede

h) Dibujo de la *cónica* y de los elementos hallados en los apartados anteriores.

Solución

12.- Sea la *cónica* de ecuación: $2x^2+y^2+2\sqrt{2}xy+2y=0$ Se pide:

a) Clasificación

b) *Ecuación reducida*

c) *Excentricidad* y *Parámetro* de la *cónica*

d) *Vértice*, si procede

e) *Ejes*

f) Dibujo de la *cónica*

Solución

13.- Dada la *cónica* de ecuación $3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10x - 10y + 10 = 0$, se pide:

a) Ecuación matricial.

b) Clasificación.

c) *Ecuación reducida*

d) *Semiejes*, *excentricidad* y *Parámetro* de la *cónica*.

e) *Centro* y *Ejes*.

f) *Asíntotas*

Solución

14.- Dada la *cónica* de ecuación $2x^2 - 2xy + 3y^2 + 6x - 8y + 3 = 0$, se pide:

a) Ecuación matricial.

b) Clasificación.

c) *Ecuación reducida*

d) *Semiejes* y *Parámetro* de la *cónica*.

e) *Centro*.

f) *Ejes* (indicando cuál es el eje focal).

g) *Vértices* principales (sobre el eje focal).

Solución

15.- Dada la *cónica* de ecuación $x^2+2xy+2y^2-2x-1=0$

Se pide:

a) Clasificación

b) *Ecuación reducida*

c) *Centro*

d) *Ejes*

Solución

16.- Dada la *cónica* de ecuación $x^2 - 2y^2 + 4x + 1 = 0$. Se pide:

a) Clasificación

b) *Ecuación reducida*

c) *Semiejes* y *excentricidad*
d) *Centro*
e) *Ejes*
f) *Asíntotas*

Solución

17.- Sea la *cónica* de ecuación: $\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -a\\ -1 & a & 1\\ -a & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} = 0$.

a.- Clasificarla según los valores del parámetro real "a".
b.- Para a = 0, se pide:

Clasificación
Ecuación reducida
Semiejes, *excentricidad* y *parámetro* de la *cónica*
Centro
Ejes
Asíntotas

Solución

18.- a) Probar que sólo uno de los siguientes polinomios de segundo grado en x y en y representa una *elipse*

1. $x^2+4xy+y^2=7$
2. $2x+5y-3+x^2+3xy+2y^2=0$
3. $9y^2-24xy-40y+16x^2-30x=5$
4. $5y^2+5x^2-1-8xy+4x-2y=0$

b) Hallar el *centro*, los *ejes*, los *focos* y las *asíntotas* de la *cónica* $y^2+4xy+x^2-7=0$.

Solución

19.- Clasificar la *cónica* $2xy+4x-1=0$ y hallar su *excentricidad*, *eje* focal y *focos*.

Solución

20.- Dada la *cónica* $x^2 + y^2 -2xy - 6x + 2y + 7 = 0$, se pide:

a) Las coordenadas del *foco*.
b) La ecuación de la *directriz*.

Solución

21.- Dada la *cónica* de ecuación $36x^2 + 29y^2 + 24xy - 96x - 22y - 115 = 0$. Se pide:

a) Clasificación
b) *Ecuación reducida*

c) *Semiejes*, *parámetro* y *excentricidad*

d) *Centro* y *ejes*

e) Directrices

Solución

22.- Dada la *cónica* de ecuación: $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$. Se pide:

a) Ecuación matricial

b) Clasificación

c) *Ecuación reducida*

d) *Excentricidad* y *parámetro* de la *cónica*

e) *Vértice* y *eje*

f) *Foco* y *directriz*

g) Gráfica de la *cónica* donde aparezcan los elementos que se calculan en los dos apartados anteriores.

Solución

23.- Sea la *cónica* de ecuación: $11x^2 + 17y^2 - 6\sqrt{3}xy - 40 = 0$

a) ¿Es el *Centro* de la *cónica* el origen del sistema de referencia? ¿Son los *ejes* de la *cónica* paralelos a los de *coordenadas*? En caso negativo, calcular el ángulo α que forman con ellos.

b) Utilizando el apartado anterior, calcular la *Ecuación reducida* de la *cónica*.

c) Hallar las ecuaciones de los *ejes*.

d) *Directrices*.

e) *Focos*.

f) *Vértices*.

Solución

24.-

a) Clasificar la siguiente *cónica* según los valores del parámetro "a":

$$(a^2 + 4)x^2 + 9y^2 + 6axy - 4(a^2 + 1)x - 12ay + 4a^2 - 8 = 0.$$

b) Hacer un estudio completo de la *cónica* anterior para $a = 1$:

Ecuación reducida y área de la *cónica*.

Semiejes, *excentricidad* y parámetro de la *cónica*.

Centro, ejes, focos y vértices principales.

Ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (0,2) y son tangentes a la *cónica*.

Dibujo de la *cónica*.

Solución

25.- Dada la *cónica* de ecuación $8x^2 - 6\sqrt{2}xy + y^2 - 36\sqrt{2}x + 14y + 49 = 0$. Se pide:

a) Clasificar la *cónica*

b) La *Ecuación reducida.*

c) La *excentricidad*.

d) La ecuación del *eje* focal.

e) Las ecuaciones de las *asíntotas*.

Solución

26.- Dada la *cónica* de ecuación $x^2 + 2ay^2 - 2axy - 2x + 4ay = 0$, se pide:

a) Clasificar la *cónica* en función del parámetro "a".

b) Para a = -10, hallar

b1) *Ecuación reducida*.

b2) *Centro*, si procede.

b3) *Ejes*, indicando cuál es el focal.

b4) *Asíntotas*, si procede.

b5) Dibujo de la *cónica* y de los elementos geométricos hallados en los apartados anteriores

Solución

27.- Dada la *cónica* de ecuación: $x^2 + y^2 + 2kxy + 2x + 1 = 0$, se pide:

a) Clasificar la *cónica* en función del parámetro "k".

b) Para k = -1

b1) *Ecuación reducida* y *parámetro* de la cónica.

b2) *Vértice* y *eje* de la cónica.

b3) Dibujo de la *cónica* y de los elementos geométricos hallados en los apartados anteriores.

Solución

28.- Dada la *cónica* de ecuación: $2 + x^2 + 2xy = 0$, se pide:

a) Clasificarla

b) Coordenadas del *centro*

c) *Asíntotas*

Solución

29.- a) Determinar entre todas las *cónicas* de la familia

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + y + 3 + \lambda(xy + y^2 - 2x + y + 1) = 0$$

aquellas no degeneradas cuyos *centros* están sobre la recta $x - y - 2 = 0$

b) Clasificar la *cónica* para $\lambda=1$.

Solución

30.- Dada la *elipse*: $x^2+y^2-xy+x+y=0$. Se pide:

a) *Centro*
b) *Excentricidad* y *semiejes*
c) *Ejes* de simetría
d) Ecuación de las *rectas tangentes* a la *elipse* y paralelas a la recta y = x

Solución

31. Dada la *cónica* de ecuación: $5x^2 + 5y^2 + 2xy - 6x - 6y - 3 = 0$, se pide:
a) *Ecuación reducida*. b) *Excentricidad*. c) *Centro*. d) *Ejes*.

Solución

32.- Dadas las *cónicas*

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 1 = 0$$
$$4x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 4y - 3 = 0$$

Se pide:
a) Calcular los puntos de *intersección* de ambas *cónicas*.
b) Hallar la ecuación de la *recta* r que pasa por ambos puntos de *intersección*.
c) Calcular los *puntos de corte* de la recta r con cada uno de los *ejes* focales de ambas *cónicas*.

Solución

33.- Hallar las coordenadas del *centro*, las ecuaciones de los *ejes* y las *asíntotas* de la *hipérbola* $6x^2 - 12xy + y^2 + 3x + 2y - 13 = 0$.

Solución

34.- Escribir la *Ecuación reducida* de la *cónica* $x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x + 1 = 0$ y determinar la *excentricidad*.

Solución

35.- Sea la *cónica* de ecuación: $\lambda x^2 + \lambda y^2 - 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$.

a.- Clasificarla según los valores del parámetro real "λ".
b.- Para $\lambda = 0$, se pide:

Ecuación reducida
Semiejes
Excentricidad
Centro
Asíntotas

Solución

36.- a) Clasificar las siguientes *cónicas*:

a1) $2 + x^2 + 2xy = 0$
a2) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 8y = 0$
a3) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 1 = 0$

b) Hallar los *semiejes* a y b, y las ecuaciones de los *ejes* de la *elipse*

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 4y = 0$$

Solución

37. Dada la *cónica* $\alpha x^2 - 2xy + \alpha y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ con $\alpha \in R$. Se pide:

a) Para $\alpha = -2$ la *Ecuación reducida* y la *excentricidad*

b) Para $\alpha = -1$ el *eje* focal

c) Para $\alpha = 0$ las *asíntotas*

d) Clasificar la *cónica* si $\alpha = -\frac{1}{3}$

Solución

38.- Dada la *cónica* de ecuación $4x^2 - 400x + By^2 - 1800y = 80036$. Se pide:

a) Clasificarla para los valores: B = 4, 0, -9.

b) Para B = - 9, calcular: *semiejes, distancia focal, excentricidad y parámetro* de la cónica.

c) Siguiendo con B = - 9, hallar: *centro, vértices, focos y asíntotas.*

Solución

39.- Hacer un estudio completo de la siguiente *cónica*: $x^2+y^2-xy+x+y=0$.

Solución

40.- Dada la *cónica* que pasa por los puntos

$$(3,4), (-3,9), (-3,-1), (-9,4) \text{ y } \left(\frac{3}{5}, 0\right).$$

Hacer un estudio completo:

Ecuación reducida

Semiejes

Excentricidad, distancia entre focos y parámetro de la cónica

Centro de la cónica

Ejes

Vértices

Focos

Directrices

Solución

Problemas propuestos.

P1.- Hallar la ecuación de la *cónica* que pasa por los puntos

(7,1), (5,-3), (-1, -3), (-3,1) y (-3,-7).

Calcular sus elementos característicos, la Ecuación reducida y representar la *cónica*.

Solución

P2.- Hallar la *cónica* que pasa por los puntos (1,0), (3,2) y (1,-4) y tal que e=0.

Solución

P3.- Hallar la ecuación de la *elipse* cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados, su centro es C(-2,1); el eje mayor es paralelo a OY, su longitud es 10 y la distancia focal 8.

Solución

P4.- Dada la cónica $25x^2 + 36y^2 + 150x - 288y - 99 = 0$. Hallar: a) Ecuaciones de la *recta normal* y de la recta tangente que pasa por E(3/5,0). b) Ecuaciones de las rectas que pasan por (9,9) y son tangentes a la elipse.

Solución

P5.- Estudiar las siguientes *cónicas*:

a) $x^2 + y^2 + 2xy + 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 14 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 2xy + x + y - 2 = 0$

c) $xy - x = 0$ d) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y + 1 = 0$

e) $2x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0$ f) $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 6\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y + 10 = 0$

g) $xy + x - y = 0$ h) $8x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}xy + 2x + 1 = 0$.

Solución

1.- Hacer un estudio completo de las siguientes *cónicas*:
a) $11x^2 + 14y^2 - 4xy + 40x + 20y + 45 = 0$

Solución:

Clasificación

$$A=\begin{pmatrix}45 & 20 & 10\\ 20 & 11 & -2\\ 10 & -2 & 14\end{pmatrix},\quad \begin{cases}A_{00}=150>0\\ |A|=-750\neq 0\end{cases}\Rightarrow \text{ Elipse}$$

$$(a_{11}+a_{22})|A| = + \cdot - < 0 \Rightarrow \boxed{\textbf{ELIPSE REAL}}$$

Ecuación reducida

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$$

λ_1 y λ_2 valores propios de $A_c = \begin{pmatrix}11 & -2\\ -2 & 14\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 10\\ \lambda_2 = 15\end{cases}$, ya que se toma como λ_1 el valor propio de menor valor absoluto.

$$k=\frac{|A|}{A_{00}}=-5$$

$$\boxed{10x''^2+15y''^2-5=0\Rightarrow \frac{x''^2}{5/10}+\frac{y''^2}{5/15}=1}$$

Semiejes

$$\boxed{a^2=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}},\ b^2=\frac{1}{3}\Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Excentricidad y parámetro de la cónica

$$a^2=\frac{1}{2},\quad b^2=\frac{1}{3}\Rightarrow \boxed{p=\frac{b^2}{a}=\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$$c^2=a^2-b^2=\frac{1}{6}\Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow \boxed{e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Centro

$$\begin{cases}20+11x-2y=0\\ 10-2x+14y=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{C\ (-2,-1)}$$

Ejes

Eje focal $x'' \equiv \begin{cases}\text{Pasa por el centro } C(-2,-1)\\ \text{Es paralelo a los vectores propios asociados a } \lambda_1 = 10\end{cases}$

$$(A_c-\lambda_1 I)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x-2y=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

Luego, $x'' \equiv \boxed{y+1=\frac{1}{2}(x+2)}$.

El eje no focal $y'' \equiv \begin{cases}\text{Pasa por el centro } C(-2,-1)\\ \text{Es perpendicular al eje focal}\end{cases}$

Por tanto, $y'' \equiv \boxed{y+1=-2(x+2)}$

Vértices

Se hallan intersecando el eje focal con la circunferencia de centro el de la cónica y radio $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{cases} y+1=\frac{1}{2}(x+2) \\ (x+2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_1\left(\frac{\sqrt{10}}{5}-2,\frac{\sqrt{10}}{10}-1\right) \\ A_2\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}-2,-\frac{\sqrt{10}}{10}-1\right) \end{cases}}$$

Los vértices secundarios se hallarían de manera análoga, intersecando el eje no focal con la circunferencia de centro el de la cónica y radio $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{cases} y+1=-2(x+2) \\ (x+2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} B_1\left(\frac{\sqrt{15}}{15}-2,-\frac{\sqrt{15}}{15}-1\right) \\ B_2\left(-\frac{\sqrt{15}}{15}-2,\frac{\sqrt{15}}{15}-1\right) \end{cases}}$$

Focos

Se hallan intersecando el eje focal con la circunferencia de centro el de la cónica y radio c:

$$c^2=a^2-b^2=\frac{1}{6}\Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\begin{cases} y+1=\frac{1}{2}(x+2) \\ (x+2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} F_1\left(\frac{\sqrt{30}}{15}-2,\frac{\sqrt{30}}{30}-1\right) \\ F_2\left(-\frac{\sqrt{30}}{15}-2,-\frac{\sqrt{30}}{30}-1\right) \end{cases}}$$

Directrices

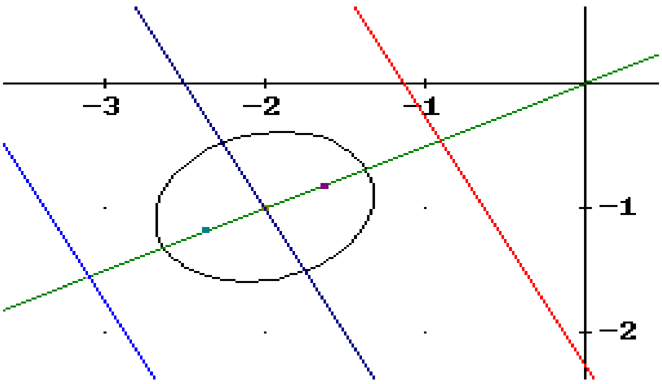
Son rectas paralelas al eje no focal y’’ y tales que distan $\frac{a^2}{c}$ del centro de la cónica:

$$dir \equiv y=-2x+m \Leftrightarrow 2x+y-m=0$$

$$d(C,dir)=\frac{|-4-1-m|}{\sqrt{4+1}}=\frac{a^2}{c}=\frac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow |5+m|=\frac{\sqrt{30}}{2}\Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{30}}{2}-5\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} dir_1 \equiv 2x+y-\frac{\sqrt{30}}{2}+5=0 \\ dir_2 \equiv 2x+y+\frac{\sqrt{30}}{2}+5=0 \end{cases}}$$

Dibujo de la cónica



1.- Hacer un estudio completo de las siguientes *cónicas*:

b) $x^2 - 8xy + y^2 - 4x - 4y + 1 = 0$

***Solución*:**

Ecuación matricial

$$X^t AX = O \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0}$$

Clasificación

$$A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -15 < 0 \Rightarrow \text{Cónica de tipo hiperbólico.}$$

$|A| = -55 \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **HIPÉRBOLA**.

Ecuación reducida

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$$

$$k = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{11}{3}; \quad |A_c - \lambda I| = \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} -3 \\ 5 \end{cases}$$

De acuerdo con el criterio expresado anteriormente, tomamos para λ_1 el valor propio de signo contrario a k, es decir, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 5$;.

Por tanto, la Ecuación reducida queda:

$$\boxed{-3x''^2 + 5y''^2 + \frac{11}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{\left(\sqrt{11/3}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{11/15}\right)^2} = 1}.$$

Semiejes

$$\boxed{a^2 = \frac{11}{9} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{11}}{3}, \quad b^2 = \frac{11}{15} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{11}{15}}}$$

Excentricidad y parámetro de la cónica

$$\boxed{e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{8}{5}} > 1}, \text{ ya que } a^2 = \frac{11}{9}, \ b^2 = \frac{11}{15}, \ c^2 = a^2 + b^2 = \frac{88}{45}.$$

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a} = \frac{3\sqrt{11}}{15}}$$

Centro y ejes

Para calcular el *centro*, resolvemos el sistema $\begin{cases} -2 + x - 4y = 0 \\ -2 - 4x + y = 0 \end{cases}$, obteniéndose el punto.

C = (-2/3, -2/3).

Los ejes son rectas que pasan por el centro y tienen la dirección de los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

Los vectores propios asociados a λ_1 son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1+3 & -4 \\ -4 & 1+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Por tanto, el *eje focal* tiene de ecuación: $\boxed{y + \frac{2}{3} = x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = x}$.

El *eje no focal* es perpendicular al anterior, luego tiene de ecuación:

$y+\frac{2}{3}=-(x+\frac{2}{3}) \Leftrightarrow y=-x-\frac{4}{3}$.

Para calcular los *vértices*, intersecamos el eje focal con la circunferencia de centro C y radio a:

$$\begin{cases}(x+\frac{2}{3})^2+(y+\frac{2}{3})^2=\frac{11}{9}\\ y=x\end{cases}$$

obteniéndose los puntos $V_1\ (\frac{-4+\sqrt{22}}{6},\frac{-4+\sqrt{22}}{6})$ y $V_2\ (\frac{-4-\sqrt{22}}{6},\frac{-4-\sqrt{22}}{6})$.

Focos y directrices

Los *focos* son los puntos de intersección del eje focal con la circunferencia de centro C y radio c:

$$\begin{cases}(x+\frac{2}{3})^2+(y+\frac{2}{3})^2=\frac{88}{45}\\ y=x\end{cases}$$

obteniéndose los puntos $F_1\ (\frac{2\sqrt{55}-10}{15},\frac{2\sqrt{55}-10}{15})$ y $F_2\ (-\frac{2\sqrt{55}+10}{15},-\frac{2\sqrt{55}+10}{15})$.

Las *directrices* son rectas paralelas al eje no focal que distan del centro $\frac{a^2}{c}$:

Su ecuación ha de ser, por tanto, de la forma y = -x + n, determinando n de modo que $\frac{a^2}{c}=\frac{\sqrt{55}}{6\sqrt{2}}=\frac{\left|-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-n\right|}{\sqrt{2}}$. Resulta $n=\frac{-8\pm\sqrt{55}}{6}$, luego, las directrices son las rectas $y=-x+\frac{-8\pm\sqrt{55}}{6}$.

Asíntotas

Las *asíntotas* son rectas que pasan por el centro y tienen de pendiente m, siendo m solución de la ecuación $1+m^2-8m=0$.

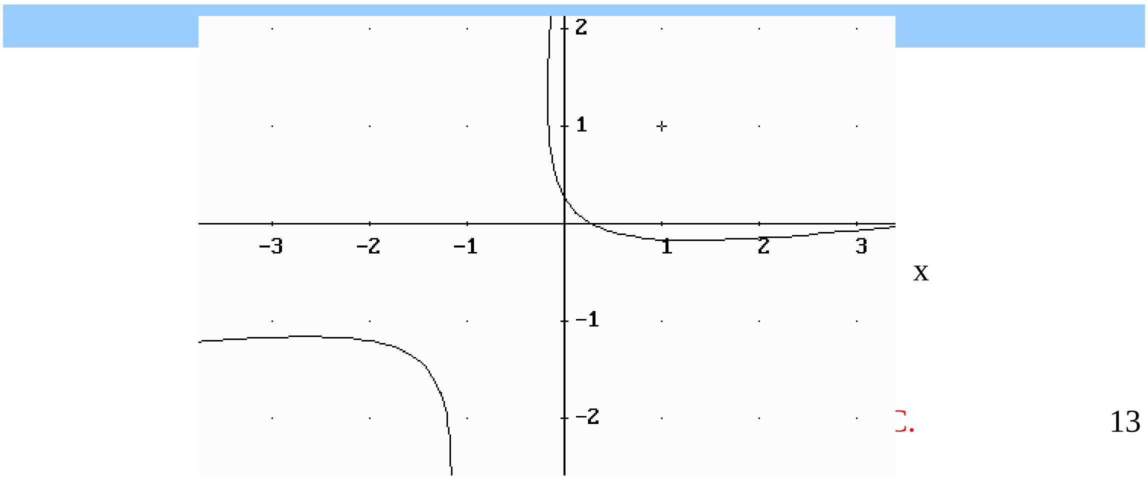
Al resolver la ecuación anterior, se obtienen dos valores para m:

$m_1=4-\sqrt{15},\ m_2=4+\sqrt{15}$.

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$y+\frac{2}{3}=(4-\sqrt{15})(x+\frac{2}{3})$, $y+\frac{2}{3}=(4+\sqrt{15})(x+\frac{2}{3})$.

Dibujo de la cónica



1.- Hacer un estudio completo de las siguientes *cónicas*:

c) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 8y = 0$

Solución:

Ecuación matricial

$$X^tAX = O \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} = 0}.$$

Clasificación

$$A_{00} = \begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ Cónica de tipo parabólico.}$$

$|A| = -4 \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **PARÁBOLA**.

Ecuación reducida

es del tipo $\lambda_2 y''^2 + 2b_1 x'' = 0$, siendo $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} = 1 + 4 = 5$,

$$\text{y } b_1 = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{a_{11} + a_{22}}} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

Tomamos el signo de b_1 contrario al de λ_2, resultando la Ecuación reducida:

$$\boxed{5y''^2 - \frac{4}{5}\sqrt{5}\,x'' = 0 \Leftrightarrow y''^2 = 4\frac{\sqrt{5}}{25}\,x''}.$$

Parámetro de la cónica

$$\boxed{p = 2\frac{\sqrt{5}}{25}}$$

Eje y vértice

De todas las rectas que tienen por dirección la dada por los vectores propios de A_c asociados al valor propio λ_2, vamos a considerar la recta r que corta a la parábola en único punto. Dicho punto será el vértice V de la parábola.

Los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 5$, son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix}1-5 & -2\\ -2 & 4-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow -4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

Por tanto, la pendiente de la recta r es -2, y tiene una ecuación de la forma:

$y = -2x + k$.

Hay que hallar k de forma que el discriminante Δ de la ecuación de segundo grado que se obtiene al intersecar la parábola y la recta r, sea nulo:

$$\begin{cases}4x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 4y - 10 = 0\\ y = -2x + k\end{cases} \Leftrightarrow \quad 25x^2 + (-20k + 18)x + \left(4k^2 + 8k\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta = (-20k + 18)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (4k^2 + 8k) = 0 \Rightarrow k = \frac{81}{20}.$$

El *vértice* es ya la solución del sistema anterior para $k = \frac{81}{20}$, es decir:

$$25x^2 - 99x + \frac{9801}{100} = 0 \Rightarrow x = \frac{99}{50} \Rightarrow y = -2\frac{99}{50} + \frac{81}{20} = \frac{9}{100} \Rightarrow \boxed{V = \left(\frac{99}{50}, \frac{9}{100}\right)}.$$

El *eje* es la recta que pasa por el vértice y es perpendicular a r, es decir, tiene de pendiente 1/2. Su ecuación es, por tanto:

$\boxed{y-\frac{9}{100}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{99}{50}\right)}$.

Foco y directriz

Para calcular el foco y la directriz, intersecamos el eje con la circunferencia de centro V y radio $\frac{p}{2}$, siendo p el parámetro de la parábola, $p=2\frac{\sqrt{5}}{25}$:

$$\begin{cases} y-\frac{9}{100}=\frac{1}{2}(x-\frac{99}{50}) \\ (x-\frac{99}{50})^2+(y-\frac{9}{100})^2=\frac{1}{125} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{19}{10},\ \ y=\frac{1}{20} \\ x=\frac{103}{50},\ \ y=\frac{13}{100} \end{cases}.$$

¿Cuál de los dos puntos anteriores es el foco y cuál pertenece a la directriz?

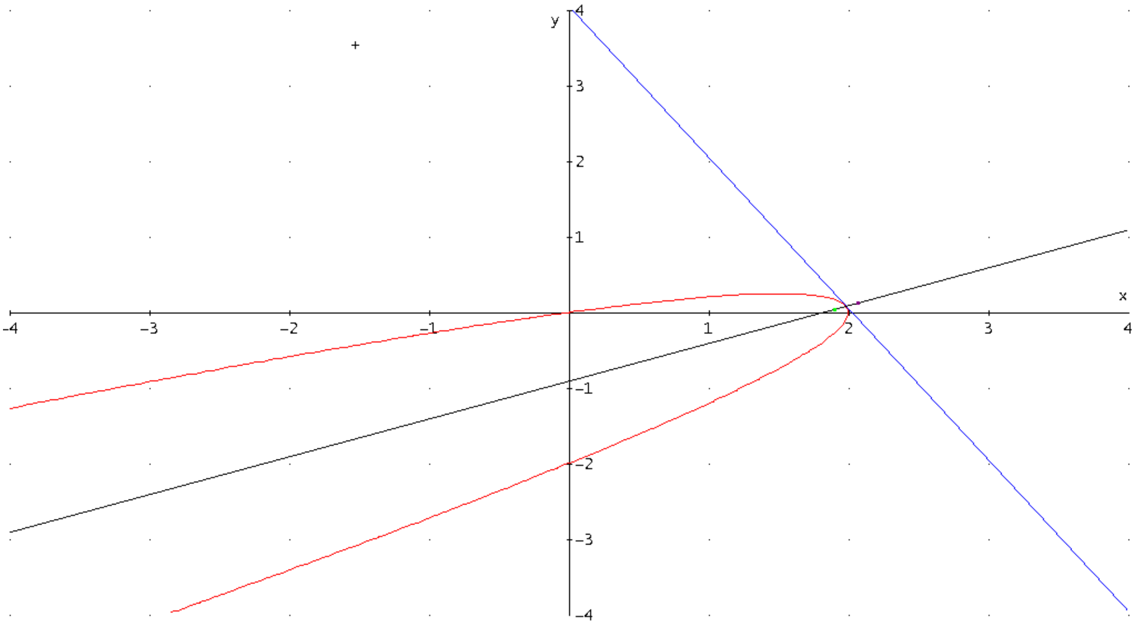
Para averiguarlo, analicemos el discriminante de la ecuación del apartado anterior para k = 0:

$\Delta=18>0$. Por tanto, para k = 0, la correspondiente recta perpendicular al eje corta a la parábola en dos puntos, luego la cónica se dirige hacia la izquierda.

El *foco* es, entonces, el punto $\boxed{F\left(\frac{19}{10},\frac{1}{20}\right)}$ y la directriz es la recta perpendicular al eje que pasa por el punto $\left(\frac{103}{50},\frac{13}{100}\right)$. Por consiguiente, la ecuación de la *directriz* es:

$\boxed{dir\equiv y-\frac{13}{100}=-2\left(x-\frac{103}{50}\right)}$.

Dibujo de la cónica



1.- Hacer un estudio completo de las siguientes *cónicas*:
d) $4x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 4y - 10 = 0$

Solución:

Ecuación matricial

$$X^tAX = O \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10 & 1 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} = 0}.$$

Clasificación

$A_{00} = \begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Cónica de tipo parabólico.

$|A| = -25 \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **PARÁBOLA**.

Ecuación reducida

es del tipo $\lambda_2 y''^2 + 2b_1 x'' = 0$, siendo $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} = 4 + 1 = 5$,

y $b_1 = \pm\sqrt{\dfrac{-|A|}{a_{11} + a_{22}}} = \pm\sqrt{\dfrac{25}{5}} = \pm\sqrt{5}$.

Tomamos el signo de b_1 contrario al de λ_2, resultando la Ecuación reducida:

$$\boxed{5y''^2 - 2\sqrt{5}\,x'' = 0 \Leftrightarrow y''^2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}x''}.$$

Parámetro de la cónica

$$\boxed{p = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

Eje y vértice

De todas las rectas que tienen por dirección la dada por los vectores propios de A_c asociados al valor propio λ_2, vamos a considerar la recta r que corta a la parábola en único punto. Dicho punto será el vértice V de la parábola.

Los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 5$, son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix}4-5 & -2\\ -2 & 1-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

Por tanto, la pendiente de la recta r es $-\dfrac{1}{2}$, y tiene una ecuación de la forma:

$$\mathbf{y = -\frac{x}{2} + k}.$$

Hay que hallar k de forma que el discriminante Δ de la ecuación de segundo grado que se obtiene al intersecar la parábola y la recta r, sea nulo:

$$\begin{cases}4x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 4y - 10 = 0\\ y = -\dfrac{x}{2} + k\end{cases} \Leftrightarrow 25x^2 - 20kx + \left(4k^2 + 16k - 40\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 400k^2 - 4\cdot 25\cdot(4k^2 + 16k - 40) = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{2}.$$

El *vértice* es ya la solución del sistema anterior para $k = \dfrac{5}{2}$, es decir:

$25x^2-50x+25=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2 \Rightarrow \boxed{V=(1,2)}$.

El *eje* es la recta que pasa por el vértice y es perpendicular a r, es decir, tiene de pendiente 2. Su ecuación es, por tanto:

$\boxed{y-2=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x}$.

Foco y directriz

Para calcular el foco y la directriz, intersecamos el eje con la circunferencia de centro V y radio $\frac{p}{2}$, siendo p el parámetro de la parábola, $p=\frac{\sqrt{5}}{5}$:

$$\begin{cases} y-2=2(x-1) \\ (x-1)^2+(y-2)^2=\frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{10},\ y=\frac{9}{5} \\ x=\frac{11}{10},\ y=\frac{11}{5} \end{cases}.$$

¿Cuál de los dos puntos anteriores es el foco y cuál pertenece a la directriz?

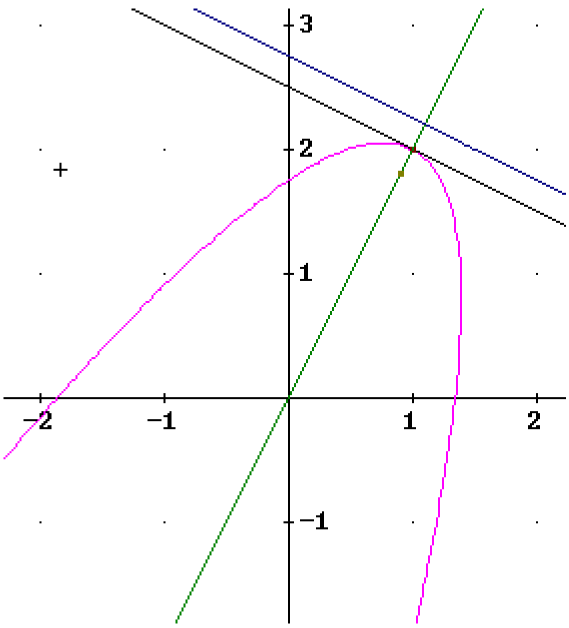
Para averiguarlo, analicemos el discriminante de la ecuación del apartado anterior para k = 0:

$\Delta=-4\cdot 25(-40)>0$. Por tanto, para k = 0, la correspondiente recta perpendicular al eje corta a la parábola en dos puntos, luego la cónica se dirige hacia la izquierda.

El *foco* es, entonces, el punto $\boxed{F\left(\frac{9}{10},\frac{9}{5}\right)}$ y la directriz es la recta perpendicular al eje que pasa por el punto $\left(\frac{11}{10},\frac{11}{5}\right)$. Por consiguiente, la ecuación de la *directriz* es:

$\boxed{\text{dir} \equiv y-\frac{11}{5}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{11}{10}\right)}$.

Dibujo de la cónica



2.- Hallar la ecuación de la *cónica* que pasa por los puntos $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{3}{2},\frac{-3}{4}\right)$.

Solución:

$$x^2+Ay^2+Bxy+Cx+Dy+E=0$$

$$\begin{cases} (0,0)\in \text{cónica} \Rightarrow E=0 \\ (2,0)\in \text{cónica} \Rightarrow 4+2C+E=0 \\ (0,-2)\in \text{cónica} \Rightarrow 4A-2D+E=0 \\ \left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)\in \text{cónica} \Rightarrow \frac{9}{4}+\frac{1}{16}A+\frac{3}{8}B+\frac{3}{2}C+\frac{1}{4}D+E=0 \\ \left(\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right)\in \text{cónica} \Rightarrow \frac{9}{4}+\frac{9}{16}A-\frac{9}{8}B+\frac{3}{2}C-\frac{3}{4}D+E=0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema lineal de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, se obtiene:

$$A=4,\ B=-4,\ C=-2,\ D=8 \ \text{ y } \ E=0$$

Resultando la ecuación de la cónica:

$$\boxed{x^2+4y^2-4xy-2x+8y=0}$$

3.- Hallar el centro y las asíntotas de la *cónica*: $2 + x^2 + 2xy = 0$.

Solución:

$$2 + x^2 + 2xy = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow \text{Cónica de tipo hiperbólico.}$$

$|A| = -2 \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una hipérbola.

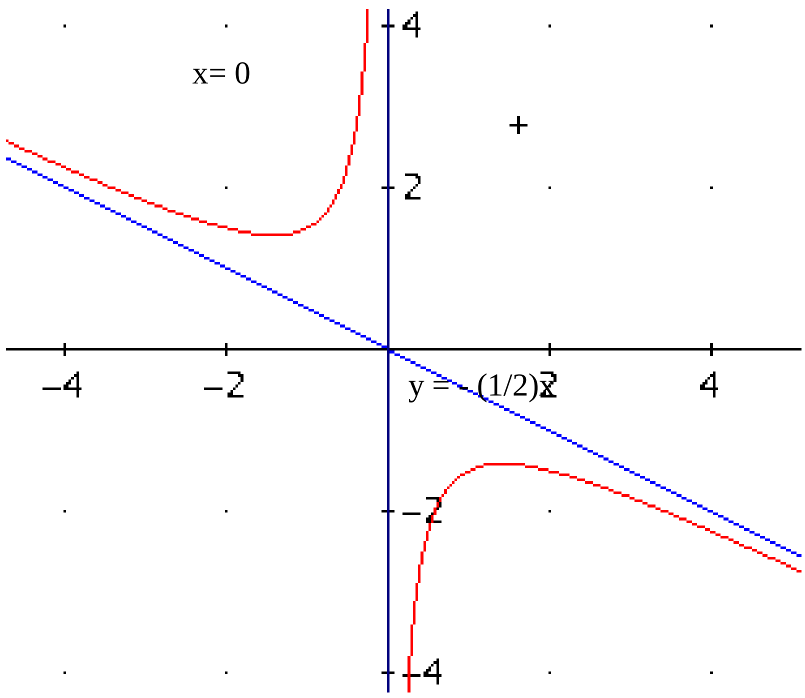
Centro:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \boxed{C\ (0,0)}$$

Asíntotas:

$$\frac{2}{x^2} + 1 + 2\frac{y}{x} = 0 \Rightarrow 1 + 2m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x}$$

La otra asíntota pasa por C y tiene pendiente infinita: $\boxed{x = 0}$.



4.- Clasificar la siguiente *cónica* según los valores del parámetro "a":

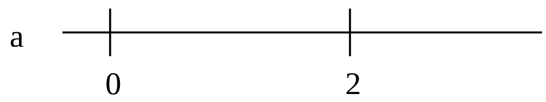
a) $x^2 - 2axy + 2ay^2 - 2x + 4ay = 0$

Solución:

a) La matriz de la cónica es $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2a \\ -1 & 1 & -a \\ 2a & -a & 2a \end{pmatrix}$

$$|A| = -2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & 2a \end{vmatrix} = a(2-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$



Estudiemos las diferentes posibilidades:

1) $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ HIPÉRBOLA

2) $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} = 0 \Rightarrow \text{Tipo parabólico} \\ |A| = 0 \Rightarrow \text{Cónica degenerada} \end{cases}$

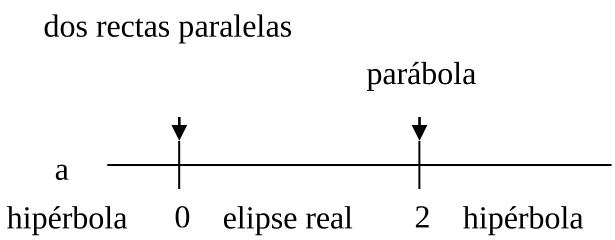
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} + A_{22} = 0 + (-1) = -1 < 0 \Rightarrow \text{RECTAS PARALELAS}$$

3) $0 < a < 2 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Elipse ¿real ó imaginaria?

$$(a_{11} + a_{22})|A| = (1 + 2a)(-2a) = + \cdot - < 0 \Rightarrow \text{ELIPSE REAL}$$

4) $a = 2 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} = 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ PARÁBOLA

5) $a > 2 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ HIPÉRBOLA



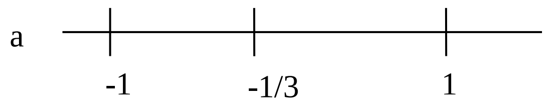
4.- Clasificar la siguiente *cónica* según los valores del parámetro "a":

b) $ax^2 - 2xy + ay^2 - 2x + 2y + 3 = 0$

Solución:

b) La matriz de la cónica es $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

$$|A| = 3a^2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases} ;\ A_{00} = \begin{vmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$



Estudiemos las diferentes posibilidades:

1) $a < -1 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ elipse ¿real ó imaginaria?

$(a_{11} + a_{22})|A| = (2a)\cdot + = - \cdot + < 0 \Rightarrow$ ELIPSE REAL

2) $a = -1 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} = 0 \Rightarrow \text{Tipo parabólico} \\ |A| \neq 0 \Rightarrow \text{ no degenerada} \end{cases} \Rightarrow$ PARÁBOLA

3) $-1 < a < -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ HIPÉRBOLA

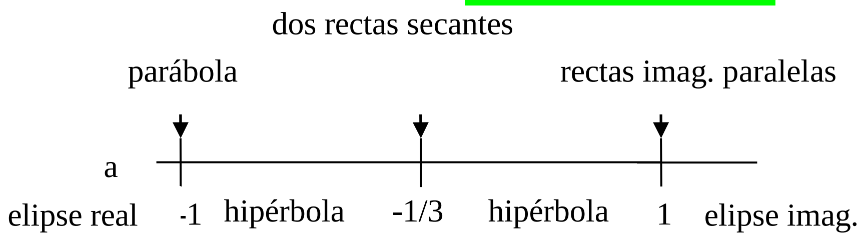
4) $a = -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \\ |A| = 0 \end{cases} \Rightarrow$ DOS RECTAS SECANTES

5) $-\frac{1}{3} < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ HIPÉRBOLA

6) $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} + A_{22} = 2 + 2 = 4 > 0 \Rightarrow$ RECTAS IMAGINAR. PARALELAS.

7) $a > 1 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ elipse ¿real ó imaginaria?

$(a_{11} + a_{22})|A| = (2a)\cdot + = + \cdot + > 0 \Rightarrow$ ELIPSE IMAGINARIA



5.- Hallar λ y μ sabiendo que las ecuaciones $x^2 + \lambda y^2 = 1$, $x'y' = \mu$, corresponden a una misma *cónica* expresada en dos sistemas de referencia ortonormales distintos.

Solución:

$$x^2 + \lambda y^2 = 1 \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$x'y' = \mu \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Girando y trasladando los ejes se pasa de una ecuación a otra, luego:

$\exists k \in R,\ k \neq 0$, tal que $A = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda k \end{pmatrix}$, ya que la ecuación de una cónica en un sistema de referencia puede multiplicarse por un número distinto de cero.

Teniendo en cuenta los invariantes en la ecuación de una cónica, se verifica:

$$\mathrm{Tr}(A_c) = \mathrm{Tr}(B_c) \Leftrightarrow k + k\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{vmatrix} = k^3 = |B| = \frac{1}{4}\mu \Rightarrow \mu = 4k^3$$

$$A_{00} = k^2\lambda = -k^2 = B_{00} = -\frac{1}{4} \Rightarrow k = \pm\frac{1}{2}$$

Para”+” se obtiene: $\mu = 4\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

Para”-” se obtiene: $\mu = -\frac{1}{8}4 = -\frac{1}{2}$

Por tanto, han de ser $\boxed{\lambda = -1 \ \text{ y } \ \mu = \pm\frac{1}{2}}$.

6.-

a) Clasificar la siguiente *cónica* según los valores del parámetro "a":

$$a + 2x + 2y + ax^2 + 2xy + ay^2 = 0.$$

b) Hacer un estudio completo de la *cónica* anterior para a = 2:

- **Ecuación reducida**
- ***Parámetro* de la *cónica***
- ***Eje* y *vértice***
- ***Foco* y *directriz***
- **Dibujo de la *cónica*.**

***Solución*:**

a) La matriz de la cónica es $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2a \\ -1 & 1 & -a \\ 2a & -a & 2a \end{pmatrix}$

$|A| = -2a = 0 \Rightarrow a = 0$

$A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & 2a \end{vmatrix} = a(2-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$

$$a \quad \underset{0}{+}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{2}{+}\!\!-\!\!-\!\!-$$

Estudiemos las diferentes posibilidades:

1) $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ HIPÉRBOLA

2) $0 < a < 2 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Elipse ¿real ó imaginaria?

$(a_{11} + a_{22})|A| = (1+2a)(-2a) = + \cdot - < 0 \Rightarrow$ ELIPSE REAL

3) $a > 2 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ HIPÉRBOLA

4) $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} = 0 \Rightarrow \text{Tipo parabólico} \\ |A| = 0 \Rightarrow \text{Cónica degenerada} \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} + A_{22} = 0 + (-1) = -1 < 0 \Rightarrow$ RECTAS PARALELAS

5) $a = 2 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} = 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ PARÁBOLA

dos rectas paralelas ↓ (a = 0) parábola ↓ (a = 2)

a: hipérbola | 0 | elipse real | 2 | hipérbola

b) A la vista del apartado anterior, para a = 2, la cónica es una **parábola** cuya matriz asociada es:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 4\end{pmatrix} \text{ con } A_{00}=0 \text{ y } |A|=-4.$$

Ecuación reducida

$$\lambda_2 y``^2 + 2b_1 x`` = 0$$

siendo $\lambda_2 = a_{11}+a_{22}=5$, ó bien λ_2 = valor propio no nulo de $A_c=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, y $b_1=\pm\sqrt{\dfrac{-|A|}{a_{11}+a_{22}}}=\pm\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Como b_1 ha de tener signo contrario a λ_2, se toma $b_1=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Resultando la Ecuación reducida: $5y``^2-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}x``=0$, es decir:

$$\boxed{y``^2=\frac{4\sqrt{5}}{25}x``}$$

Parámetro de la cónica

$$2p=\frac{4\sqrt{5}}{25}\Rightarrow \boxed{p=\frac{2\sqrt{5}}{25}}$$

Eje y vértice

El eje de la parábola x`` tiene la dirección de los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1=0$ de la matriz A_c:

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x-2y=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

Luego, el eje y``, perpendicular a x`` y que corta a la cónica en el vértice, tiene una ecuación de la forma:

$$y``\equiv y=-2x+k$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación de la parábola, obteniéndose:

$$x^2+4(-2x+k)^2-24x(-2x+k)-2x+8(-2x+k)=0\Rightarrow$$

$$25x^2-2(9+10k)x+4k(k+2)=0$$

cuyo discriminante Δ ha de ser nulo para que tenga solución única (la abscisa x del vértice): $\Delta=4(9+10k)^2-4\cdot 25\cdot 4k(k+2)=0\Leftrightarrow -20k+81=0\Rightarrow k=\dfrac{81}{20}$

La abscisa del vértice es, entonces, la solución única de la ecuación $2(9+10k)x+4k(k+2)=0$ para $k=\dfrac{81}{20}$:

$$2500x^2 - 9900x + 9801 = 0 \Rightarrow x = \frac{99}{50}$$

Como el vértice ha de pertenecer al eje $y`` \equiv y = -2x + \frac{81}{20}$, su ordenada ha de ser:

$$y = -2\frac{99}{50} + \frac{81}{20} = \frac{9}{100}$$

El vértice es, por tanto, el punto $\boxed{V\left(\frac{99}{50}, \frac{9}{100}\right)}$.

Y el eje de la parábola es la recta que pasa por el vértice y tiene de pendiente $\frac{1}{2}$:

$$\boxed{y - \frac{9}{100} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{99}{50}\right)}$$

Foco y directriz

Como ambos se encuentran a una distancia $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{5}}{25}$ del vértice, intersecamos el eje x`` con la circunferencia de centro V y radio $\frac{p}{2}$:

$$\begin{cases} y - \frac{9}{100} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{99}{50}\right) \\ \left(x - \frac{99}{50}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{100}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{25}\right)^2 = \frac{1}{125} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior se obtienen los dos puntos: $\left(\frac{19}{10}, \frac{1}{20}\right)$ y $\left(\frac{103}{50}, \frac{13}{100}\right)$

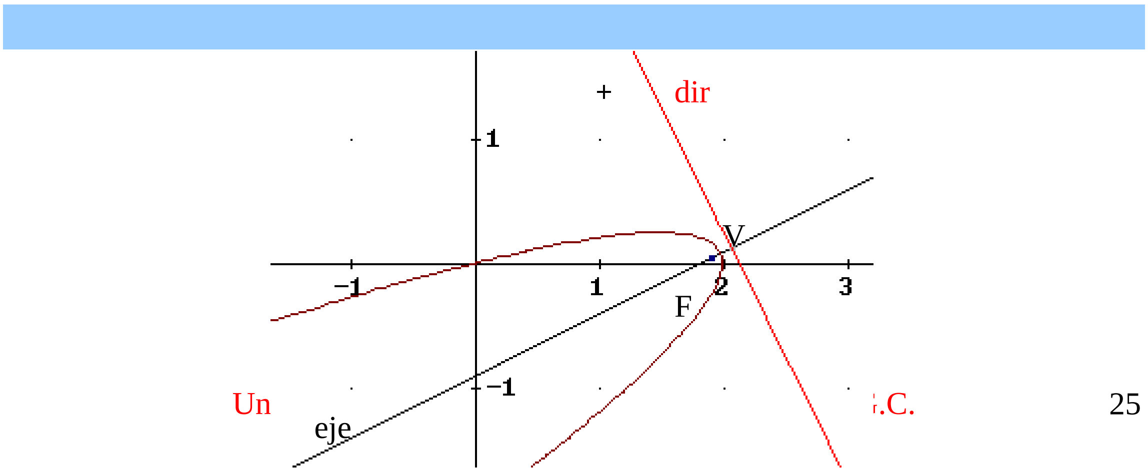
¿Cuál de ambos es el foco?

Si se interseca la parábola con la recta paralela al eje y`` que pasa por el origen, se obtienen dos puntos de corte, ya que el discriminante Δ para $k = 0$ es positivo:

$\Delta = 4(9 + 10k)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4k(k+2) = 4 \cdot 81 = 324 > 0$ Luego, la parábola se abre hacia la izquierda del vértice y el foco F es, de ambos puntos, el que tiene menor abscisa: $\boxed{F\left(\frac{19}{10}, \frac{1}{20}\right)}$. La directriz d es la recta que pasa por el otro punto y es paralela al eje y``:

$$\boxed{d \equiv y - \frac{13}{100} = -2\left(x - \frac{103}{50}\right)}$$

Dibujo de la cónica



7.-

a) Clasificar la siguiente *cónicas* según los valores del parámetro "a":

$$a + 2x + 2y + ax^2 + 2xy + ay^2 = 0.$$

b) Hacer un estudio completo de la *cónica* anterior para a = 0

Ecuación reducida

semiejes, *excentricidad* y *Parámetro* de la *cónica*

Centro, si procede

Ejes y *vértices*

Focos y *directrices*

Asíntotas, si procede

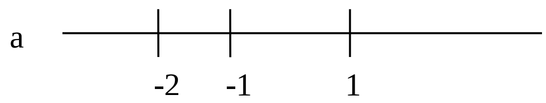
Dibujo de la *cónica*.

Solución:

a) La matriz de la cónica es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a+2)(a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$A_{00} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$



Estudiemos las diferentes posibilidades:

1) $a < -2 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Elipse ¿real ó imaginaria?

$(a_{11} + a_{22})|A| = 2a\left[(a+2)(a-1)^2\right] = - \cdot - > 0 \Rightarrow$ ELIPSE IMAGINARIA

2) $-2 < a < -1 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Elipse ¿real ó imaginaria?

$(a_{11} + a_{22})|A| = 2a\left[(a+2)(a-1)^2\right] = - \cdot + < 0 \Rightarrow$ ELIPSE REAL

3) $-1 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ HIPÉRBOLA

4) $1 < a \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Elipse ¿real ó imaginaria?

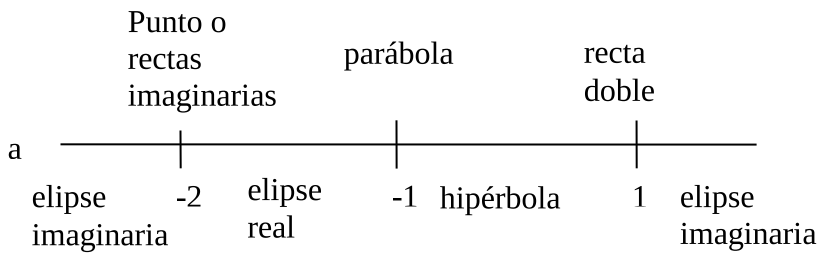
$(a_{11} + a_{22})|A| = 2a\left[(a+2)(a-1)^2\right] = + \cdot + > 0 \Rightarrow$ ELIPSE IMAGINARIA

5) $a = -2 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \\ |A| = 0 \end{cases} \Rightarrow$ PUNTO

6) a = -1 $\Rightarrow \begin{cases} A_{00} = 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ PARÁBOLA

7) a = 1 $\Rightarrow \begin{cases} A_{00} = 0 \\ |A| = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Parábola degenerada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} + A_{22} = 0 \Rightarrow \text{RECTA DOBLE}$$



b) $x + y + xy = 0$

Ecuación matricial

$$X^t A X = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 .$$

Nota: También puede utilizarse $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, llegando al mismo resultado.

Clasificación

$$A_{00} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \text{Cónica de tipo hiperbólico.}$$

$|A| = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **HIPÉRBOLA**.

Ecuación reducida

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$$

$$k = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{1/4}{-1/4} = -1 \ ; \ |A_c - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

De acuerdo con el criterio expresado anteriormente, tomamos para λ_1 el valor propio de signo contrario a k, es decir, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Por tanto, la **Ecuación reducida** queda:

$\boxed{\frac{1}{2}x''^2 - \frac{1}{2}y''^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{2} = 1}$. Es una hipérbola equilátera.

semiejes, excentricidad y parámetro de la cónica

$\boxed{a^2 = 2 = b^2 \Rightarrow a = b = \sqrt{2}}$

$\boxed{e = \sqrt{2}}$, por ser hipérbola equilátera.

$\boxed{p = \frac{b^2}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}}$

Centro

Para calcular el *centro*, resolvemos el sistema $\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-1,-1)}$.

Ejes y vértices

Los ejes son rectas que pasan por el centro y tienen la dirección de los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

Los vectores propios asociados a λ_1 son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x + y = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Por tanto, el *eje focal* tiene de ecuación: $\boxed{y + 1 = 1(x+1) \Leftrightarrow y = x}$.

El *eje no focal* es perpendicular al anterior, luego tiene de ecuación:

$\boxed{y + 1 = -1(x+1) \Leftrightarrow y = -x - 2}$.

Para calcular los *vértices*, intersecamos el eje focal con la circunferencia de centro C y radio a=1:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$$

obteniéndose los puntos $\boxed{V_1\ (0,0)\ \text{ y }\ V_2\ (-2,-2)}$.

Focos y directrices

Los *focos* son los puntos de intersección del eje focal con la circunferencia de centro C y radio c:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$$

obteniéndose los puntos $F_1(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)$ y $F_2(-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}-1)$.

Las *directrices* son rectas paralelas al eje no focal que distan del centro $\frac{a^2}{c}$:

Su ecuación ha de ser, por tanto, de la forma y = -x + n, es decir, x + y – n = 0, determinando n de modo que $\frac{a^2}{c}=1=\frac{|-1-1-n|}{\sqrt{2}}$. Resulta $n=-2\pm\sqrt{2}$, luego, las directrices son las rectas $y=-x-2\pm\sqrt{2}$.

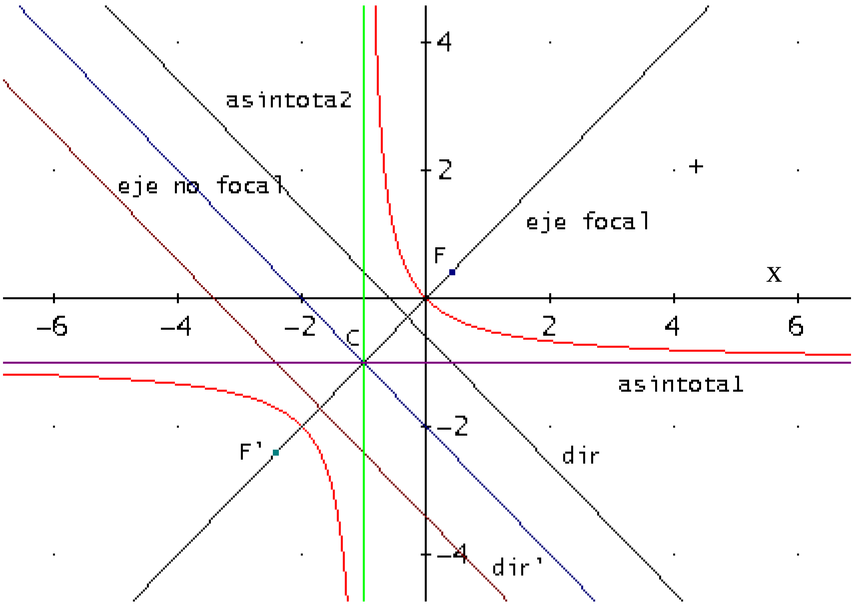
Asíntotas

Las *asíntotas* son rectas que pasan por el centro y tienen de pendiente m, siendo m solución de la ecuación $a_{11}+2a_{12}m+a_{22}m^2=0 \Leftrightarrow 0+m+0=0 \Rightarrow m=0$.

Una asíntota tiene, entonces, de ecuación: **y = -1**

La otra, pasa por el centro y es paralela al eje de ordenadas OY: **x = -1**.

Dibujo de la cónica



8.- Dada la *cónica* $2x^2-y^2+4xy-x=0$, se pide:

a) Clasificación
b) Ecuación reducida
c) *semiejes* y *excentricidad*
d) *Centro*
e) *Ejes*
f) *Asíntotas*
g) *Vértices*
h) Dibujo de la *cónica*.

Solución:

a) Clasificación

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0$$; Cónica no degenerada.

$$A_{00} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 < 0$$ Se trata de una **hipérbola**.

b) Ecuación reducida. Hallamos los valores propios de A_{00}

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3) \Rightarrow \lambda_1 = 3 \text{ y } \lambda_2 = -2$$ y al ser $k = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{1/4}{-6} = -\frac{1}{24}$

Se toma primeramente el valor propio de distinto signo al termino independiente $3(x'')^2 - 2(y'')^2 - \frac{1}{24} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{(x'')^2}{1/72} - \frac{(y'')^2}{1/48} = 1} \Rightarrow$

c) Semiejes: el semieje real es $\boxed{a = \frac{\sqrt{2}}{12}}$,

El semieje imaginario es $\boxed{b = \frac{\sqrt{3}}{12}}$.

En la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$, en este caso $c^2 = \frac{1}{72} + \frac{1}{48} = \frac{5}{144} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{12}$, por tanto, el valor de la **excentricidad** es $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{12}}{\frac{\sqrt{2}}{12}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}$

Distancia entre focos $d(F,F') = 2 \cdot c = 2\frac{\sqrt{5}}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{5}}$

Siendo el **parámetro de la cónica** $p=\frac{b^2}{a}=\frac{1/48}{\sqrt{2}/12}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{8}}$

d) El **centro** es la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{2}+2x+2y=0 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) = \boxed{(1/12, 1/6)}.$$

e) El **eje focal** es una recta que pasa por el centro (1/12, 1/6) y es paralelo a los vectores propios asociados a $\lambda_1=3$.

Por tanto, resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 2\beta.$$

Eje focal o real $\boxed{y-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{12}\right)}$; **Eje no focal o imaginario** $\boxed{y-\frac{1}{6}=-2\left(x-\frac{1}{12}\right)}$

f) Asíntotas

$$\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}=0 \Rightarrow -m^2+4m+2=0 \Rightarrow m=2\pm\sqrt{6}$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y-\frac{1}{6}=\left(2+\sqrt{6}\right)\left(x-\frac{1}{12}\right) \\ y-\frac{1}{6}=\left(2-\sqrt{6}\right)\left(x-\frac{1}{12}\right) \end{array}\right.}$$

g) Vértices:

Se hallan intersecando el eje focal con la circunferencia de centro el de la cónica y radio $a=\sqrt{2}/12$:

$$\left\{\begin{array}{l} y-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{12}\right) \\ \left(x-\frac{1}{12}\right)^2+\left(y-\frac{1}{6}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} A_1\left(\frac{1}{12}+\frac{\sqrt{10}}{30},\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{10}}{60}\right) \\ A_2\left(\frac{1}{12}-\frac{\sqrt{10}}{30},\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{10}}{60}\right) \end{array}\right.}$$

Focos

Se hallan intersecando el eje focal con la circunferencia de centro el de la cónica y radio c:

$$\left\{\begin{array}{l} y-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{12}\right) \\ \left(x-\frac{1}{12}\right)^2+\left(y-\frac{1}{6}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{12}\right)^2 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} F_1\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\ F_2\left(-\frac{1}{12},\frac{1}{12}\right) \end{array}\right.}$$

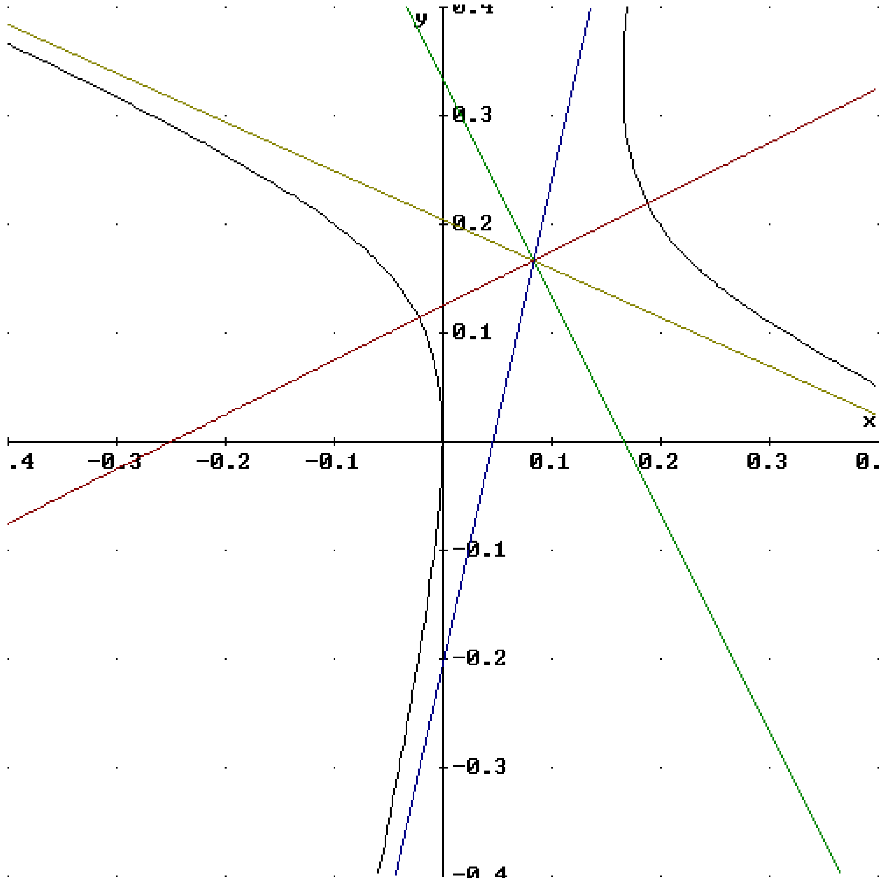
Directrices

Son rectas paralelas al eje no focal y'' y tales que distan $\frac{a^2}{c}$ del centro de la cónica; de tal forma que cortan al eje focal en los puntos:

$$\begin{cases} y-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{12}\right) \\ \left(x-\frac{1}{12}\right)^2+\left(y-\frac{1}{6}\right)^2=\left(\frac{1/32}{\sqrt{5}/12}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1\left(\frac{3}{20},\frac{1}{5}\right) \\ D_2\left(\frac{1}{60},\frac{2}{15}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} dir_1 \equiv y-\frac{1}{5}=-2\left(x-\frac{3}{20}\right) \\ dir_2 \equiv y-\frac{2}{15}=-2\left(x-\frac{1}{60}\right) \end{cases}}$$

h) Dibujo de la cónica



9.- Dada la *cónica* de ecuación: $9x^2+6xy-22x+y^2-34y+49=0$. Se pide:

a) Ecuación matricial.
b) Clasificación.
c) Ecuación reducida.
d) *Parámetro* de la *cónica*.
e) *Vértice* y *Eje*.
f) *Foco* y *directriz*.

Solución:

a) Ecuación matricial

$$\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}49 & -11 & -17\\ -11 & 9 & 3\\ -17 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$$

b) Clasificación

$$|A|=\begin{vmatrix}49 & -11 & -17\\ -11 & 9 & 3\\ -17 & 3 & 1\end{vmatrix}=-1600\neq 0$$; Cónica no degenerada.

$A_{00}=\begin{vmatrix}9 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=0$ Se trata de una **parábola**.

c) Ecuación reducida. Por ser una parábola los valores propios de A_{00} son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=a_{11}+a_{22}=9+1=10$ y es del tipo $\lambda_2 y''^2+2b_1x''=0$, siendo

$$b_1=\pm\sqrt{\frac{-|A|}{a_{11}+a_{22}}}=\pm\sqrt{\frac{1600}{10}}=\pm 4\sqrt{10}.$$

Tomamos el signo de b_1 contrario al de λ_2, resultando la Ecuación reducida:

$$10y''^2-8\sqrt{10}\,x''=0 \Leftrightarrow y''^2=\frac{4\sqrt{10}}{5}x''.$$

d) Parámetro de la cónica $y''^2=2px''$; $p=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

e) Eje y vértice

De todas las rectas que tienen por dirección la dada por los vectores propios de A_c asociados al valor propio λ_2, vamos a considerar la recta r que corta a la parábola en único punto. Dicho punto será el vértice V de la parábola.

Los vectores propios asociados a $\lambda_2=10$, son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix}9-10 & 3\\ 3 & 1-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow -x+3y=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x$$

Por tanto, la pendiente de la recta r es $\frac{1}{3}$, y tiene una ecuación de la forma: $y=\frac{x}{3}+k$.

Hay que hallar k de forma que el discriminante Δ de la ecuación de segundo grado que se obtiene al intersecar la parábola y la recta r, sea nulo (solución única):

$$\begin{cases} 9x^2+6xy-22x+y^2-34y+49=0 \\ y=\frac{x}{3}+k \end{cases} \Rightarrow 100x^2+60(k-5)x+\left(9k^2-306k+441\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=60^2(k-5)^2-4\cdot 100\cdot\left(9k^2-306k+441\right)=0 \Rightarrow k=1.$$

El *vértice* es ya la solución del sistema anterior para $k=1$, es decir:

$$25x^2-60x+36=0 \Rightarrow x=\frac{6}{5} \Rightarrow y=\frac{1}{3}+\frac{6}{5}=\frac{7}{5} \Rightarrow \boxed{V=\left(\frac{6}{5},\frac{7}{5}\right)}.$$

El *eje* es la recta que pasa por el vértice y es perpendicular a r, es decir, tiene de pendiente (-3). Su ecuación es, por tanto: $\boxed{y-\frac{7}{5}=-3\left(x-\frac{6}{5}\right)}$.

f) Foco y directriz

Para calcular el foco y la directriz, intersecamos el eje con la circunferencia de centro V y radio $\frac{p}{2}$, siendo p el parámetro de la parábola, $p=\frac{2\sqrt{10}}{5}$:

$$\begin{cases} y-\frac{7}{5}=-3\left(x-\frac{6}{5}\right) \\ \left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{7}{5}\right)^2=\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1,\ y=2 \\ x=\frac{7}{5},\ y=\frac{4}{5} \end{cases}.$$

¿Cuál de los dos puntos anteriores es el foco y cuál pertenece a la directriz?

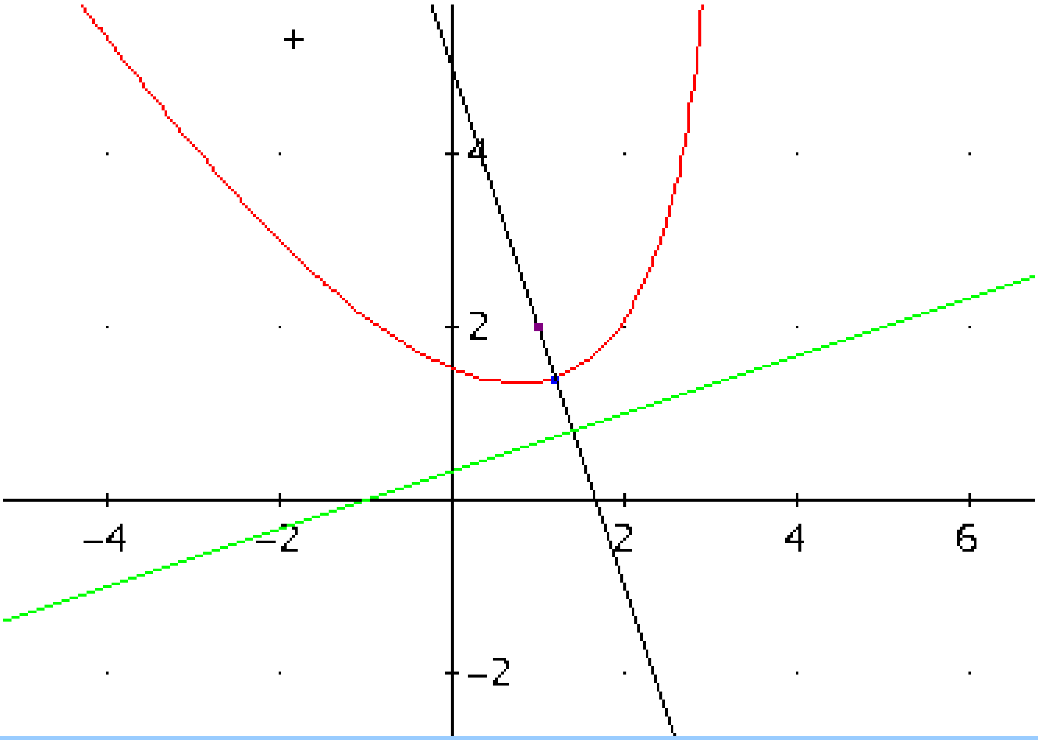
Para averiguarlo, analicemos el discriminante de la ecuación del apartado anterior para k = 0:

$\Delta<0$. Por tanto, para k = 0, la correspondiente recta perpendicular al eje no corta a la parábola en dos puntos, luego la cónica se dirige hacia la arriba.

El *foco* es, entonces, el punto $\boxed{F(1,2)}$ y la directriz es la recta perpendicular al eje que pasa por el punto $\left(\frac{7}{5},\frac{4}{5}\right)$. Por consiguiente, la ecuación de la *directriz* es:

$$\boxed{dir\equiv y-\frac{4}{5}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{5}\right)}$$

g) Dibujo de la cónica



10.-Dada la *cónica* $x^2 + y^2 + kxy - 10x - 2y + 1 = 0$, se pide:

a) La ecuación matricial

b) Ecuación de las *Asíntotas* y *Eje* focal para el valor $k = 2$.

c) Ecuación reducida para el valor $k = 1$

d) Hallar la *excentricidad* para el valor $k = \frac{1}{2}$.

e) Clasificar según los valores del parámetro $k \in \Re$

f) Demostrar que la *excentricidad* de cualquier *hipérbola equilátera* es $e = \sqrt{2}$

Solución:

a) $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -5 & 1 & k \\ -1 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0}$.

b) Si k = 2 entonces

$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $|A_c| = -3$, $|A| = -9$ la cónica es una hipérbola cuyo centro es $x = -1, \quad y = 3$ solución del sistema $\begin{cases} -5 + x + 2y = 0 \\ -1 + 2x + y = 0 \end{cases}$,

Las pendientes de sus asíntotas, son las raíces del polinomio $1 + 4m + m^2 = 0$, por tanto, $m = -2 \pm \sqrt{3}$

Los valores propios de A$_c$ son las raíces de $|A_c - \lambda I_2| = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$.

El eje focal pasa por el centro y su pendiente es, la pendiente del vector propio asociado al valor propio $\lambda = -1$, que resulta ser $m = -1$

Asíntotas $\boxed{(y-3) = \left(-2 \pm \sqrt{3}\right)(x+1)}$.

Eje focal $\boxed{(y-3) = -1(x+1)} \Rightarrow y = -x + 2$.

c) Si $k = 1 \Rightarrow |A| = -16, \quad |A_c| = 0$ y la cónica, resulta ser, una parábola cuya Ecuación reducida es $\lambda_2 (y')^2 \pm 2bx' = 0$.

$\lambda_2 = a_{11} + a_{22} = 2$, $b = -\sqrt{\frac{-|A|}{\lambda_2}} = 2\sqrt{2}$. Ecuación reducida $\boxed{(y')^2 - 2\sqrt{2}x' = 0}$.

d) Si $k=\frac{1}{2}$ los valores propios de $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ son $\lambda=\frac{1}{2}$ y $\lambda=\frac{3}{2}$ por tanto

$a^2=2k$, $b^2=\frac{2}{3}k$, $\Rightarrow c=\sqrt{2k-\frac{2}{3}k}$ y la excentricidad en este caso es:

$$\boxed{e=\frac{\sqrt{\frac{4}{3}k}}{\sqrt{2k}}=\frac{2}{\sqrt{6}}}.$$

e) $|A_c|=1-k^2$, $|A|=-(k-5)^2$, así pues el valor de $k\in R$ lo descomponemos en los intervalos y valores siguientes:

1.- Si $k<-1 \Rightarrow |A_c|<0,\quad |A|<0$ son **hipérbolas**.

2.- Si $k=-1 \Rightarrow |A_c|=0,\quad |A|<0$ es una **parábola**.

3.- Si $-1<k<1 \Rightarrow |A_c|>0,\quad |A|<0$ y $a_{11}>0$ son **elipses**.

4.- Si $k=1 \Rightarrow |A_c|=0,\quad |A|<0$ es una **parábola**.

5.- Si $1<k<5 \Rightarrow |A_c|<0,\quad |A|<0$ son **hipérbolas**.

6.- Si $k=5 \Rightarrow |A_c|<0,\quad |A|=0$ son dos **rectas secantes**.

7.- Si $5<k \Rightarrow |A_c|<0,\quad |A|<0$ son **hipérbolas**.

f) En una hipérbola equilátera se verifica que a=b y $c^2=a^2+b^2=2a^2$ y como la excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2a^2}}{a}=\sqrt{2}$.

11.- Dada la *cónica* de ecuación: $1+2x+4y+3x^2+4xy=0$ Se pide:

a) Clasificación

b) Ecuación reducida

c) *semiejes*, *excentricidad* y *Parámetro* de la cónica

d) *Centro*, si procede

e) *Ejes* y *vértices*

f) *Focos* y *directrices*

g) *Asíntotas*, si procede

h) Dibujo de la *cónica* y de los elementos hallados en los apartados anteriores.

Solución:

Ecuación matricial

$$X^tAX=0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0}$$

a) Clasificación

$A_{00}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4<0 \Rightarrow$ Cónica de tipo hiperbólico.

$|A|=-8\neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **HIPÉRBOLA**.

b) Ecuación reducida

$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+k=0$

$k=\dfrac{|A|}{A_{00}}=\dfrac{-8}{-4}=2$; $|A_c-\lambda I|=\lambda^2-3\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda=\begin{cases}-1\\ 4\end{cases}$

De acuerdo con el criterio expresado anteriormente, tomamos para λ_1 el valor propio de signo contrario a k, es decir, $\lambda_1=-1, \lambda_2=4$;.

Por tanto, la Ecuación reducida queda:

$$\boxed{-x''^2+4y''^2+2=0 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{2}-\frac{y''^2}{1/2}=1}.$$

c) Semiejes

$\boxed{a=\sqrt{2},\ \ b=\sqrt{2}/2}$

Excentricidad y parámetro de la cónica

$\boxed{e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{5/2}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}>1}$, ya que $a^2=2$, $b^2=\dfrac{1}{2}$, $c^2=a^2+b^2=\dfrac{5}{2}$.

$$\boxed{p=\frac{b^2}{a}=\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

d) Centro

Para calcular el *centro*, resolvemos el sistema $\begin{cases}1+3x+2y=0\\ 2+2x+0y=0\end{cases}$, obteniéndose el punto.

$\boxed{C=(-1, 1)}$.

e) Los **ejes** son rectas que pasan por el centro y tienen la dirección de los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

Los vectores propios asociados a λ_1 son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} 3+1 & 2 \\ 2 & 0+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x+y=0 \Leftrightarrow y=-2x .$$

Por tanto, el *eje focal* tiene de ecuación: $y-1=-2(x+1)$.

El *eje no focal* es perpendicular al anterior, luego tiene de ecuación: $y-1=\frac{1}{2}(x+1)$.

Vértices

Para calcular los *vértices*, intersecamos el eje focal con la circunferencia de centro C y radio a:

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2=2 \\ y-1=-2(x+1) \end{cases}$$

obteniéndose los puntos $V_1\left(\frac{-5+\sqrt{10}}{5},\frac{5-\sqrt{10}}{5}\right)$ y $V_2\left(\frac{-5-\sqrt{10}}{5},\frac{5+\sqrt{10}}{5}\right)$.

f) Focos y directrices

Los *focos* son los puntos de intersección del eje focal con la circunferencia de centro C y radio c:

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-)^2=\frac{5}{2} \\ y-1=-2(x+1) \end{cases}$$

obteniéndose los puntos $F_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\text{-}1,1\text{-}\sqrt{2}\right)$ y $F_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\text{-}1,1+\sqrt{2}\right)$.

Las *directrices* son rectas paralelas al eje no focal que distan del centro $\frac{a^2}{c}$:

Su ecuación ha de ser, por tanto, de la forma y = (1/2)x + n, determinando n de modo que $\frac{a^2}{c}=\frac{2}{\sqrt{5/2}}=\frac{\left|\frac{1}{2}(-1)-\frac{2}{3}-n\right|}{\sqrt{5/2}}$. Resulta $n=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2}$, luego, las directrices son las rectas $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\pm\sqrt{2}$.

g) Asíntotas

Las *asíntotas* son rectas que pasan por el centro y tienen de pendiente m, siendo m solución de la ecuación $3+4m=0$.

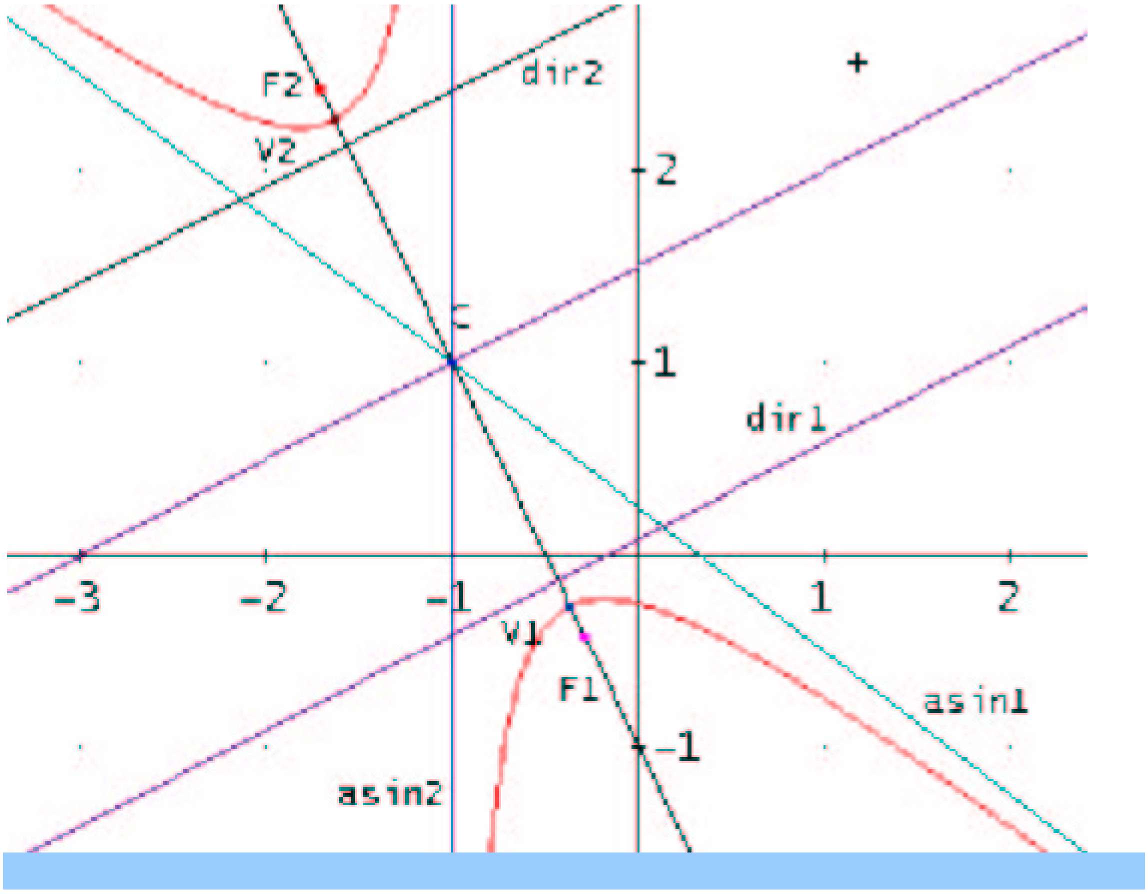
Al resolver la ecuación anterior, se obtienen un valor para m:

$m_1=-3/4$. La otra asíntota pasa por el centro y es paralela al eje de ordenadas

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y-1=-\frac{3}{4}(x+1)\ ,\ x=-1.$$

h) Dibujo de la cónica



12.- Sea la *cónica* de ecuación: $2x^2+y^2+2\sqrt{2}xy+2y=0$ Se pide:

a) Clasificación
b) Ecuación reducida
c) *Excentricidad* y *Parámetro* de la *cónica*
d) *Vértice*, si procede
e) *Ejes*
f) Dibujo de la *cónica*

Solución:

Ecuación matricial

$$X^tAX=0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0}.$$

a) Clasificación

$A_{00}=\begin{vmatrix}2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ Cónica de tipo parabólico.

$|A|=-2\neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **PARÁBOLA**.

b) Ecuación reducida

es del tipo $\lambda_2 y''^2+2b_1x''=0$, siendo $\lambda_2=a_{11}+a_{22}=2+1=3$,

$$y\ \ b_1=\pm\sqrt{\frac{-|A|}{a_{11}+a_{22}}}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Tomamos el signo de b_1 contrario al de λ_2, resultando la Ecuación reducida:

$$\boxed{3y''^2-2\sqrt{\frac{2}{3}}\,x''=0 \Leftrightarrow y''^2=2\frac{\sqrt{6}}{9}\,x''}.$$

c) Excentricidad

e=1, por ser una Parábola.

Parámetro de la cónica

$$\boxed{p=\frac{\sqrt{6}}{9}}$$

d) e) Eje y vértice

De todas las rectas que tienen por dirección la dada por los vectores propios de A_c asociados al valor propio λ_2, vamos a considerar la recta r que corta a la parábola en único punto. Dicho punto será el vértice V de la parábola.

Los vectores propios asociados a $\lambda_2=3$, son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix}2-3 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow -x+\sqrt{2}y=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

Por tanto, la pendiente de la recta r es $\frac{1}{\sqrt{2}}$, y tiene una ecuación de la forma:

$y=\frac{1}{\sqrt{2}}x+k$.

Hay que hallar k de forma que el discriminante Δ de la ecuación de segundo grado que se obtiene al intersecar la parábola y la recta r, sea nulo:

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+2\sqrt{2}xy+2y=0 \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x+k \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+k\right)^2+2\sqrt{2}x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+k\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+k\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=8(3k+1)^2-4\cdot 9\cdot(2k^2+4k)=8(1-12k)=0\Rightarrow k=\frac{1}{12}.$$

El *vértice* es ya la solución del sistema anterior para $k=\frac{1}{12}$, es decir:

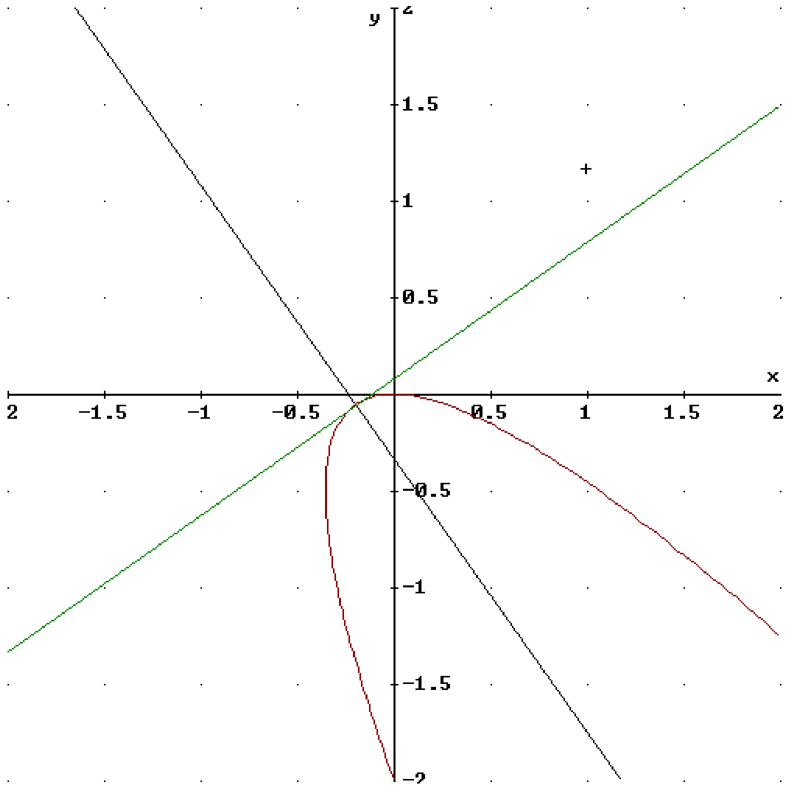
$$648x^2+180\sqrt{2}x+25=0\Rightarrow x=-\frac{5\sqrt{2}}{36}\Rightarrow y=-\frac{5\sqrt{2}}{36}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{12}=-\frac{1}{18}\Rightarrow$$

$$\boxed{V=\left(-\frac{5\sqrt{2}}{36},-\frac{1}{18}\right)}.$$

El *eje* es la recta que pasa por el vértice y es perpendicular a r, es decir, tiene de pendiente -√2. Su ecuación es, por tanto:

$$\boxed{y+\frac{1}{18}=-\sqrt{2}\left(x+\frac{5\sqrt{2}}{36}\right)}.$$

f) Dibujo de la cónica



13.- Dada la *cónica* de ecuación $3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10x - 10y + 10 = 0$, se pide:

a) **Ecuación matricial.**
b) **Clasificación.**
c) ***Ecuación reducida.***
d) ***Semiejes*, *excentricidad* y *Parámetro* de la *cónica*.**
e) ***Centro* y *Ejes*.**
f) ***Asíntotas*.**

Solución:

a) Ecuación matricial

$$X^tAX = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 5 & -5\\ 5 & 3 & -4\\ -5 & -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} = 0}$$

b) Clasificación

$$A_{00} = \begin{vmatrix}3 & -4\\ -4 & -3\end{vmatrix} = -25 < 0 \Rightarrow \text{Cónica de tipo hiperbólico.}$$

$|A| = -50 \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **HIPÉRBOLA**.

c) Ecuación reducida

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$$

$$k = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{-50}{-25} = 2;\ \ |A_c - \lambda I| = \lambda^2 - 25 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases}-5\\ 5\end{cases}$$

De acuerdo con el criterio expresado anteriormente, tomamos para λ_1 el valor propio de signo contrario a k, es decir, $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 5$;.

Por tanto, la Ecuación reducida queda:

$$\boxed{-5x''^2 + 5y''^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{5/2} - \frac{y''^2}{5/2} = 1}.$$

Se trata de una hipérbola equilátera

d) Semiejes

$$\boxed{a = b = \sqrt{\frac{5}{2}}}$$

Excentricidad y parámetro de la cónica

$\boxed{e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{5}{5/2}} = \sqrt{2} > 1}$, ya que $a^2 = \frac{5}{2}$, $b^2 = \frac{5}{2}$, $c^2 = a^2 + b^2 = 5$.

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a} = \frac{\sqrt{10}}{5}}$$

e) Centro

Para calcular el *centro*, resolvemos el sistema $\begin{cases}5 + 3x - 4y = 0\\ -5 - 4x - 3y = 0\end{cases}$, obteniéndose el punto.

C = (-7/5, 1/5).

Los **ejes** son rectas que pasan por el centro y tienen la dirección de los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

Los vectores propios asociados a λ_1 son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} 3+5 & -4 \\ -4 & -3+5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 8x-4y=0 \Leftrightarrow y=2x .$$

Por tanto, el *eje focal* tiene de ecuación: $y-\frac{1}{5}=2(x+\frac{7}{5})$.

El *eje no focal* es perpendicular al anterior, luego tiene de ecuación: $y-\frac{1}{5}=-\frac{1}{2}(x+\frac{7}{5})$.

f) Asíntotas

Las *asíntotas* son rectas que pasan por el centro y tienen de pendiente m, siendo m solución de la ecuación $-3m^2-8m+3=0$.

Al resolver la ecuación anterior, se obtienen dos valores para m:

$m_1=-3$ y $m_2=\frac{1}{3}$. La otra asíntota pasa por el centro y es paralela al eje de ordenadas

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y-\frac{1}{5}=\frac{1}{3}(x+\frac{7}{5}); y-\frac{1}{5}=-3(x+\frac{7}{5}).$$

14.- Dada la *cónica* de ecuación $2x^2 - 2xy + 3y^2 + 6x - 8y + 3 = 0$, se pide:

a) Ecuación matricial.
b) Clasificación.
c) *Ecuación reducida.*
d) *Semiejes* y *Parámetro* de la *cónica*.
e) *Centro*.
f) *Ejes* (indicando cuál es el eje focal).
g) *Vértices* principales (sobre el eje focal).

Solución:

a) Ecuación matricial

$$X^t AX = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0}.$$

b) Clasificación

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} A_{00} = |A_c| = 5 > 0 \\ |A| = -20 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Elipse}$$

$$(a_{11} + a_{22})|A| = + \cdot - < 0 \Rightarrow \boxed{\textbf{ELIPSE REAL}}$$

c) Ecuación reducida

$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$

λ_1 y λ_2 valores propios de $A_c = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A_c = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_c - \lambda I| = \lambda^2 + 5\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \end{cases},$$

ya que se toma como λ_1 el valor propio de menor valor absoluto.

$$k = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{-20}{5} = -4$$

$$\boxed{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)x''^2 + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)y''^2 - 4 = 0 \Rightarrow \frac{x''^2}{\frac{8}{5-\sqrt{5}}} + \frac{y''^2}{\frac{8}{5+\sqrt{5}}} = 1}$$

d) Semiejes

$$\boxed{a^2 = \frac{8}{5-\sqrt{5}} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{8}{5-\sqrt{5}}}, \quad b^2 = \frac{8}{5+\sqrt{5}} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{5}}}}$$

Parámetro de la cónica

$$\boxed{p=\frac{b^2}{a}=\frac{\frac{8}{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{8}{5-\sqrt{5}}}}=\sqrt{4-\frac{8}{5}\sqrt{5}}}$$

$$c^2=a^2-b^2=\frac{1}{6}\Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow \boxed{e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

e) Centro

$$\begin{cases}3+2x-y=0\\-4-x+3y=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{C\ (-1,1)}$$

f) Ejes

$$\text{Eje focal } x'' \equiv \begin{cases}\text{Pasa por el centro } C\ (-1,1)\\ \text{Es paralelo a los vectores propios asociados a } \lambda_1=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$$(A_c-\lambda_1 I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -1\\ -1 & 3-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x-y=0\Rightarrow$$

$y=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x$, Luego, $x''\equiv \boxed{y-1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)(x+1)}$.

$$\text{El eje no focal } y''\equiv\begin{cases}\text{Pasa por el centro } C\ (-1,1)\\ \text{Es perpendicular al eje focal}\end{cases}$$

Por tanto, $y''\equiv \boxed{y-1=-\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}(x+1)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)(x+1)}$

g) Vértices (principales)

Se hallan intersecando el eje focal con la circunferencia de centro el de la cónica y radio $a=\sqrt{\frac{8}{5-\sqrt{5}}}$:

$$\begin{cases}y-1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)(x+1)\\ (x+1)^2+(y-1)^2=a^2=\frac{8}{5-\sqrt{5}}\end{cases}\Rightarrow \boxed{\begin{cases}A_1\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\\ A_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}-2,1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\end{cases}}$$

15.- Dada la *cónica* de ecuación $x^2+2xy+2y^2-2x-1=0$
Se pide:
- **a) Clasificación**
- **b) *Ecuación reducida***
- **c) *Centro***
- **d) *Ejes***

***Solución*:**

Ecuación matricial

$$X^tAX=0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0}.$$

a) Clasificación

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{cases}A_{00}=|A_c|=1>0\\ |A|=-3\neq 0\end{cases} \Rightarrow \text{ Elipse}$$

$$(a_{11}+a_{22})|A|=+\cdot-<0 \Rightarrow \boxed{\textbf{ELIPSE REAL}}$$

b) Ecuación reducida

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+k=0$$

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 \text{ valores propios de } A_c=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A_c-\lambda I|=\lambda^2-3\lambda+1=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\\ \lambda_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$
, ya que se toma como λ_1 el valor propio de menor valor absoluto.

$$k=\frac{|A|}{A_{00}}=\frac{-3}{1}=-3$$

$$\boxed{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)x''^2+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)y''^2-3=0 \Rightarrow \frac{x''^2}{\dfrac{6}{3-\sqrt{5}}}+\frac{y''^2}{\dfrac{6}{3+\sqrt{5}}}=1}$$

c) Centro

$$\begin{cases}-1+x+y=0\\ x+2y=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{C\ (2,-1)}$$

f) Ejes

$$\text{Eje focal } x'' \equiv \begin{cases}\text{Pasa por el centro } C\ (2,-1)\\ \text{Es paralelo a los vectores propios asociados a } \lambda_1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$$\left(A_c-\lambda_1 I\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & 1\\ 1 & 2-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x+y=0\Rightarrow$$

$y=-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x$, Luego, $x''\equiv\boxed{y+1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)(x-2)}$.

El eje no focal $y''\equiv\begin{cases}\text{Pasa por el centro C } (2,-1)\\ \text{Es perpendicular al eje focal}\end{cases}$

Por tanto, $y''\equiv\boxed{y+1=-\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}(x-2)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)(x-2)}$

16.- Dada la *cónica* de ecuación $x^2 - 2y^2 + 4x + 1 = 0$. Se pide:

a) Clasificación
b) Ecuación reducida
c) *Semiejes* y *excentricidad*
d) *Centro*
e) *Ejes*
f) *Asíntotas*

Solución:

Ecuación matricial

$$X^tAX = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} = 0}$$

a) Clasificación

$$A_{00} = |A_c| = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Cónica de tipo hiperbólico.}$$

$|A| = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **HIPÉRBOLA**.

b) Ecuación reducida

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$$

$$k = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{6}{-2} = -3;\quad |A_c - \lambda I| = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases}1\\ -2\end{cases}$$

De acuerdo con el criterio expresado anteriormente, tomamos para λ_1 el valor propio de signo contrario a k, es decir, $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$;.

Por tanto, la Ecuación reducida queda:

$$\boxed{x''^2 - 2y''^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{3} - \frac{y''^2}{3/2} = 1}.$$

c) Semiejes

$$\boxed{a = \sqrt{3};\ b = \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Excentricidad y parámetro de la cónica

$\boxed{e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{9/2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1}$, ya que $a^2 = 3$, $b^2 = \frac{3}{2}$, $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$.

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a} = \frac{\sqrt{10}}{5}}$$

d) Centro

Para calcular el *centro*, resolvemos el sistema $\begin{cases}2 + x = 0\\ -2y = 0\end{cases}$,

obteniéndose el punto. $\boxed{C = (-2,0)}$.

Los **ejes** son rectas que pasan por el centro y tienen la dirección de los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

Los vectores propios asociados a λ_1 son las soluciones del sistema:

$\begin{pmatrix}1-1 & 0\\ 0 & -2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow y=0$.

Por tanto, el *eje focal* tiene de ecuación: $y=0$.

El *eje no focal* es perpendicular al anterior, luego tiene de ecuación: $x=-2$.

e) Asíntotas

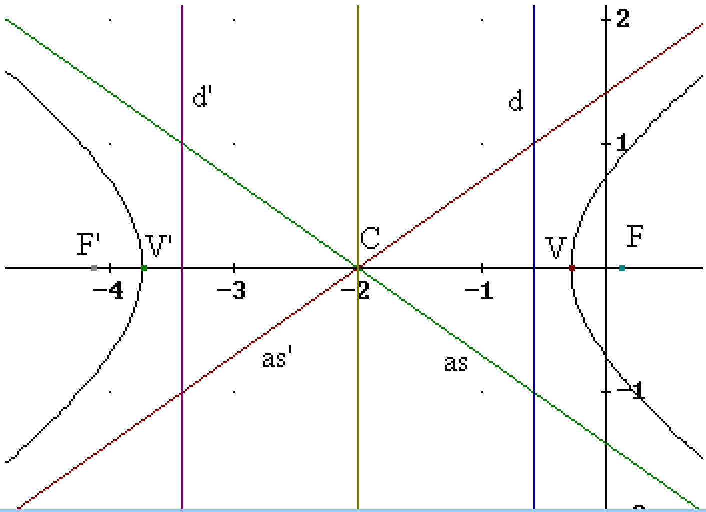
Las *asíntotas* son rectas que pasan por el centro y tienen de pendiente m, siendo m solución de la ecuación $-2m^2+1=0$.

Al resolver la ecuación anterior, se obtienen dos valores para m:

$m_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $m_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La otra asíntota pasa por el centro y es paralela al eje de ordenadas

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y-0=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2);\; y-0=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2).$$



17.- Sea la *cónica* de ecuación: $\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ -1 & a & 1 \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$.

a.- Clasificarla según los valores del parámetro real "a".

b.- Para a = 0, se pide:

Clasificación

Ecuación reducida

semiejes, *excentricidad* y *Parámetro* de la *cónica*

Centro

Ejes

Asíntotas

Solución:

a.- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ -1 & a & 1 \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}$

$$A_{00} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$|A| = (a-1)^2(-a-1) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

	Caso1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
a	$(-\infty,-1)$	**-1**	**(-1, 1)**	**1**	$(1,\infty)$
A_{00}	+	**0**	**-**	**0**	+
$\lvert A\rvert$	+	**0**	**-**	**0**	**-**
Clasificación	**Elipse real**	**Rectas Par.**	**Hipérbola**	**Recta doble**	**Elipse real**

$$(a_{11} + a_{22})|A| = 2a(a-1)^2(-a-1)$$

Caso 1: $(a_{11} + a_{22})|A| = - \cdot + < 0 \Rightarrow$ Elipse real

Caso 2: $A_{11} + A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} \underset{a=-1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 < 0 \Rightarrow$

Rectas Paralelas

Caso 4: $A_{11} + A_{22} \underset{a=1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Recta doble

Caso 5: $(a_{11} + a_{22})|A| = + \cdot - < 0 \Rightarrow$ Elipse real

b.- Estamos en el caso 3, se trata de una **hipérbola**.

Ecuación reducida:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A_c=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow |A_c-\lambda I|=\lambda^2-1=0\Rightarrow \lambda=\pm 1$$

$$k=\frac{|A|}{A_{00}}=\frac{-1}{-1}=1\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=-1 & \text{(signo contrario a k)}\\ \lambda_2=1\end{cases}$$

$$-x''^2+y''^2+1=0\Leftrightarrow x''^2-y''^2=1$$

semiejes: $\boxed{\mathbf{a=b=1}}$, se trata de una hipérbola equilátera.

Excentricidad: $\boxed{e=\sqrt{2}}$

Parámetro de la cónica: $\boxed{p=\frac{b^2}{a}=1}$

Centro: $\begin{cases}-1+y=0\\ x=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{C\ (0,1)}$

Ejes: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y=0\Rightarrow y=-x$

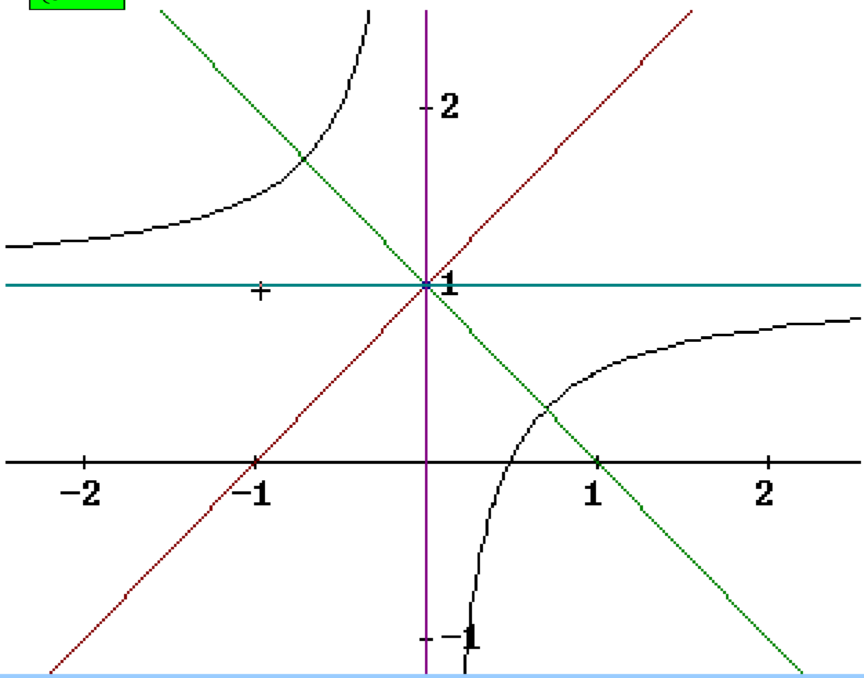
Eje focal: $\boxed{y-1=-x}$

Eje no focal: $\boxed{y-1=x}$

Asíntotas:

Pendiente: $a_{11}+a_{22}m^2+2a_{12}m=0\Rightarrow 0+2m=0\Rightarrow m=0\Rightarrow\begin{cases}m_1=0\\ m_2=\infty\end{cases}\Rightarrow$

Ecuaciones: $\boxed{\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}}$



18.- a) Probar que sólo uno de los siguientes polinomios de segundo grado en x y en y representa una *elipse*.

1. $x^2+4xy+y^2=7$
2. $2x+5y-3+x^2+3xy+2y^2=0$
3. $9y^2-24xy-40y+16x^2-30x=5$
4. $5y^2+5x^2-1-8xy+4x-2y=0$

b) Hallar el *Centro*, los *Ejes*, los *Focos* y las *Asíntotas* de la *cónica* $y^2+4xy+x^2-7=0$.

Solución:

a)

$$1.\ A=\begin{pmatrix}-7&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}|A|=21\neq 0\\|A_c|=-3<0\end{cases}\ \text{Hipérbola}$$

$$2.\ A=\begin{pmatrix}-5&-15&-20\\-15&16&-12\\-20&-12&9\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}|A|=-15625\neq 0\\|A_c|=0\end{cases}\ \text{Parábola}$$

$$3.\ A=\begin{pmatrix}-3&1&\frac{5}{2}\\1&1&\frac{3}{2}\\\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}|A|=0\\|A_c|=-\frac{1}{4}<0\end{cases}\ \text{Dos rectas secantes}$$

$$4.\ A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&5&-4\\2&-4&5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}|A|=-18\neq 0\\|A_c|=91>0\\\text{signo}(a_{11}+a_{22})\neq\text{signo}|A|\end{cases}\ \boxed{\text{ELIPSE REAL}}$$

$$\textbf{b)}\ A=\begin{pmatrix}-7&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}|A|=21\neq 0\\|A_c|=-3<0\end{cases}\ \text{Hipérbola}$$

Centro $\left.\begin{matrix}x+2y=0\\2x+y=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{C(0,0)}$

Ecuación característica de A_c: $\lambda^2-2\lambda-3=0$. Valores propios -1 y 3. $k=\frac{|A|}{|A_c|}=-7$

Ecuación reducida $3x^2-y^2-7=0\Leftrightarrow\frac{x^2}{\frac{7}{3}}-\frac{y^2}{7}=1$

Pendiente del eje focal $\begin{pmatrix}1-3&2\\2&1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow y=x\Rightarrow m_1=1$

Eje focal $\boxed{y = x}$

Eje transverso $\boxed{y = -x}$

Focos

De la Ecuación reducida obtenemos que: $a^2 = \frac{7}{3}; b^2 = 7 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = \frac{28}{3}$

Y del sistema $\left.\begin{array}{l} y = x \\ x^2 + y^2 = \frac{28}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{F_1 = \left(\frac{\sqrt{42}}{3}, \frac{\sqrt{42}}{3}\right), F_2 = \left(-\frac{\sqrt{42}}{3}, -\frac{\sqrt{42}}{3}\right)}$

Asíntotas

$1+4m+m^2=0 \Rightarrow m = -2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y = \left(\sqrt{3}-2\right)x \\ y = -\left(\sqrt{3}-2\right)x \end{cases}}$

19.- Clasificar la *cónica* 2xy+4x-1=0 y hallar su *excentricidad*, *Eje* focal y *Focos*.

Solución:

$$X^tAX = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} = 0.$$

Clasificación: $A_{00} = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow$ Cónica de tipo hiperbólico.

$|A| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una *hipérbola*.

Ecuación reducida: $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0$

$c = \dfrac{|A|}{A_{00}} = -1$; $|A_c - \lambda I| = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases}-1\\ 1\end{cases}$

Tomamos para λ_1 el valor propio de signo contrario a c, es decir, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$;.

Por tanto, la Ecuación reducida queda:

$1x''^2 - 1y''^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x''^2 - y''^2 = 1$ **HIPÉRBOLA EQUILÁTERA**

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2} > 1$, ya que $a^2 = 1$, $b^2 = -1$, $c^2 = a^2 - b^2 = 2$.

Para el *centro*, resolvemos el sistema $\begin{cases}2 + y = 0\\ x = 0\end{cases}$, obteniéndose el punto C=(0,-2)

Los ejes son rectas que pasan por el centro y tienen la dirección de los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

Los vectores propios asociados a λ_1 son las soluciones del sistema:

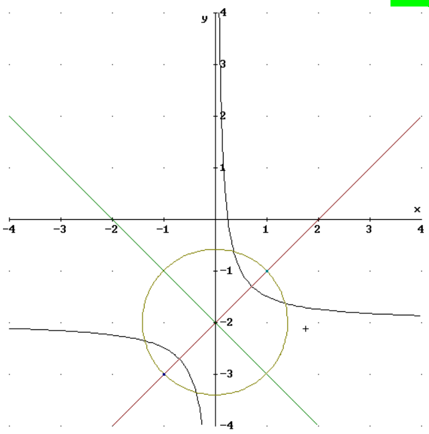
$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow -x + y = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Por tanto, el **eje focal** tiene de ecuación: $y + 2 = x \Leftrightarrow y = x - 2$.

El *eje no focal* es perpendicular al anterior, luego tiene de ecuación:

$y + 2 = -x \Leftrightarrow y = -x - 2$.

Focos son los puntos de intersección del eje focal con la circunferencia de centro C y radio c: $\begin{cases}(x+0)^2 + (y+2)^2 = 2\\ y = x - 2\end{cases}$. Obteniéndose los puntos $F_1\ (-1,-3)$ y $F_2\ (1,-1)$.



20.- Dada la *cónica* $x^2 + y^2 - 2xy - 6x + 2y + 7 = 0$, se pide:

a) Las coordenadas del foco.

b) La ecuación de la directriz.

Solución:

Ecuación matricial

$$X^tAX=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -3 & 1\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0.$$

Clasificación

$A_{00}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ Cónica de tipo parabólico.

$|A|=-4\neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **PARÁBOLA**.

Ecuación reducida

es del tipo $\lambda_2 y''^2+2b_1x''=0$, siendo $\lambda_2=a_{11}+a_{22}=1+1=2$,

y $b_1=\pm\sqrt{\dfrac{-|A|}{a_{11}+a_{22}}}=\pm\sqrt{2}$.

Tomamos el signo de b_1 contrario al de λ_2, resultando la Ecuación reducida:

$2y''^2-2\sqrt{2}\,x''=0 \Leftrightarrow y''^2=\sqrt{2}\,x''$.

Parámetro de la cónica

$$\boxed{p=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Eje y vértice

De todas las rectas que tienen por dirección la dada por los vectores propios de A_c asociados al valor propio λ_2, vamos a considerar la recta r que corta a la parábola en único punto. Dicho punto será el vértice V de la parábola.

Los vectores propios asociados a $\lambda_2=2$, son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix}1-2 & -1\\ -1 & 1-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow -x-y=0\Leftrightarrow y=-x$$

Por tanto, la pendiente de la recta r es -1, y tiene una ecuación de la forma: $y=-x+k$.

Hay que hallar n de forma que el discriminante Δ de la ecuación de segundo grado que se obtiene al intersecar la parábola y la recta r, sea nulo:

$$\begin{cases}x^2+y^2\text{-}2xy\text{-}6x\text{+}2y\text{+}7\text{=}0\\ y=-x+n\end{cases}\Leftrightarrow\quad x^2+(-x+n)^2\text{-}2x(-x+n)\text{-}6x\text{+}2(-x+n)\text{+}7\text{=}0 \Rightarrow$$

$$4x^2-4x(n+2)+n^2+2n+7=0$$

$$\Delta=16(n+2)^2-4\cdot 4\cdot(n^2+2n+7)=0\Rightarrow n=\frac{3}{2}.$$

El *vértice* es ya la solución del sistema anterior para $n=\dfrac{3}{2}$, es decir:

$$4x^2-4x\left(\frac{3}{2}+2\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\frac{3}{2}+7=0\Rightarrow x=\frac{7}{4}\Rightarrow y=-\frac{1}{4}$$

El *eje* es la recta que pasa por el vértice y es perpendicular a r, es decir, tiene de pendiente 1. Su ecuación es, por tanto:

$$\boxed{y+\frac{1}{4}=1\left(x-\frac{7}{4}\right)}.$$

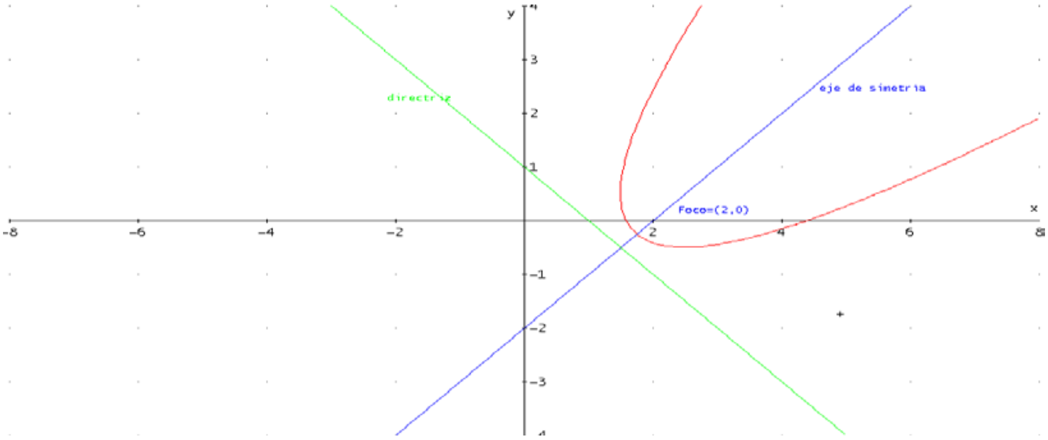
El foco está situado en el eje de simetría y a una distancia p/2 del vértice:

$$\begin{cases} y+\frac{1}{4}=1\left(x-\frac{7}{4}\right) \\ \left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=0 \\ x=\frac{3}{2}; y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

a) **Foco=$\boxed{(2,0)}$**

b) **Directriz:** $\boxed{y+\frac{1}{2}=-1\left(x-\frac{3}{2}\right)}$

Dibujo de la cónica



21.- Dada la *cónica* de ecuación
$36x^2 + 29y^2 + 24xy - 96x - 22y - 115 = 0$.
Se pide:
- **a) Clasificación**
- **b) Ecuación reducida**
- **c) *semiejes, Parámetro* y *excentricidad***
- **d) *Centro* y *Ejes***
- **e) *Directrices***

***Solución*:**

a) Clasificación

$$A = \begin{pmatrix} -115 & -48 & -11 \\ -48 & 36 & 12 \\ -11 & 12 & 29 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} A_{00} = \begin{vmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 29 \end{vmatrix} = 900 > 0 \\ |A| = -162000 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Elipse}$$

$$\text{signo}(a_{11} + a_{22}) = + \neq - = \text{signo}|A| \Rightarrow \boxed{\textbf{ELIPSE REAL}}$$

b) Ecuación reducida

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$$

λ_1 y λ_2 valores propios de

$$A_c = \begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 29 \end{pmatrix} : |A_c - \lambda I| = \begin{vmatrix} 36-\lambda & 12 \\ 12 & 29-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 20)(\lambda - 45) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 20 \\ \lambda_2 = 45 \end{cases}, \text{ ya}$$

que se toma como λ_1 el valor propio de menor valor absoluto.

$$k = \frac{|A|}{A_{00}} = -180$$

$$20x''^2 + 45y''^2 - 180 = 0 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

c) Semiejes de la cónica

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, \; b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

Parámetro focal

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{3}$$

Excentricidad

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}} < 1$$

d) Centro

$$\begin{cases} -48 + 36x + 12y = 0 \\ -22 + 12x + 29y = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

Ejes

$$\text{Eje focal } x'' \equiv \begin{cases} \text{Pasa por el centro } C\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right) \\ \text{Es paralelo a los vectores propios asociados a } \lambda_1 = 20 \end{cases}$$

$$\left(A_c - \lambda_1 I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36-20 & 12 \\ 12 & 29-20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 16x + 12y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x$$

Luego, x'' ≡ $y + \frac{1}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{7}{5}\right)$ eje mayor.

El eje no focal y'' ≡ $\begin{cases} \text{Pasa por el centro C } \left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right) \\ \text{Es perpendicular al eje focal} \end{cases}$

Por tanto, y'' ≡ $y + \frac{1}{5} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{7}{5}\right)$ eje menor

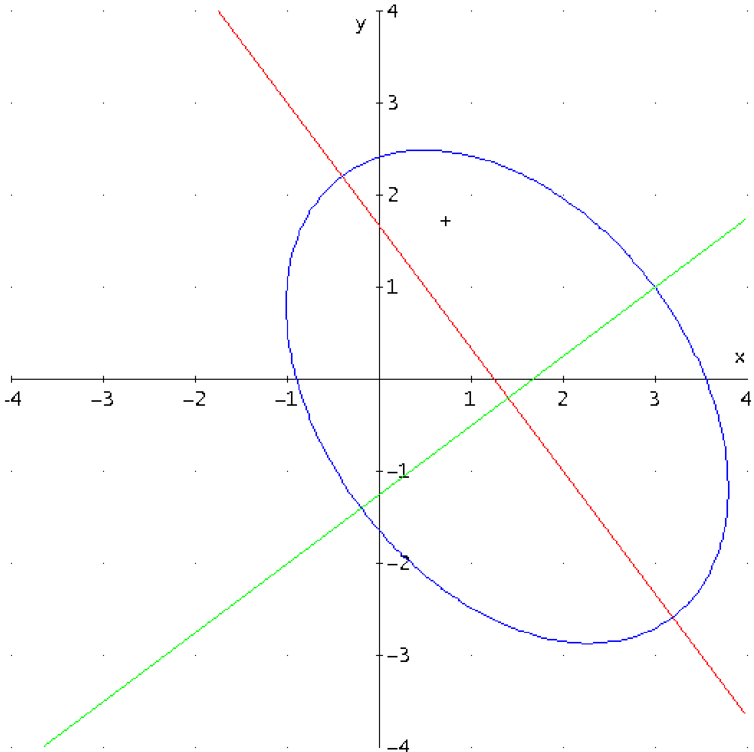
e) Directrices

Cortan al eje focal en dos puntos a una distancia igual a a^2/c

$$\begin{cases} \left(x - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{c}\right)^2 = \frac{81}{5} \\ y + \frac{1}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{7}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \left(\frac{7}{5} + \frac{27\sqrt{5}}{25}, -\frac{1}{5} - \frac{36\sqrt{5}}{25}\right) \\ D' = \left(\frac{7}{5} - \frac{27\sqrt{5}}{25}, -\frac{1}{5} + \frac{36\sqrt{5}}{25}\right) \end{cases}$$

Ahora con pendiente paralela al eje no focal o menor

$$\begin{cases} y + \frac{1}{5} + \frac{36\sqrt{5}}{25} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{7}{5} - \frac{27\sqrt{5}}{25}\right) \\ y + \frac{1}{5} - \frac{36\sqrt{5}}{25} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{7}{5} + \frac{27\sqrt{5}}{25}\right) \end{cases}$$



22.- Dada la *cónica* de ecuación: $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$. Se pide:

a) Ecuación matricial
b) Clasificación
c) Ecuación reducida
d) *Excentricidad* y *Parámetro* de la *cónica*
e) *Vértice* y *Eje*
f) *Foco* y *directriz*
g) Gráfica de la *cónica* donde aparezcan los elementos que se calculan en los dos apartados anteriores.

Solución:

a) Ecuación matricial

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0} \Leftrightarrow \overline{X}^t A \overline{X} = 0$$

b) Clasificación

$$A_{00} = |A_c| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Tipo parabólico}$$

$$|A| = -16 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\textbf{PARÁBOLA}}$$

c) Ecuación reducida

$2b_1x''+\lambda_2y''^2 = 0$; valores propios de A_c: $\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = 2$

$b_1 = \pm\sqrt{\dfrac{-|A|}{a_{11}+a_{22}}} = \pm 2\sqrt{2}$; para que b₁ sea de signo contrario a λ_2, tomamos $b_1 = -2\sqrt{2}$.

$$\boxed{-4\sqrt{2}x''+2y''^2 = 0 \Leftrightarrow y''^2 = 2\sqrt{2}x''}$$

d) Excentricidad y parámetro de la cónica

$\boxed{\mathbf{e = 1}}$, por ser una parábola.

$2p = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{p = \sqrt{2}}$

e) Eje y vértice

Vectores propios de A_c asociados a $\lambda_2 = 2$:

$$(A_c - \lambda_2 I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x + y = 0 \Leftrightarrow y = x$$

$\Rightarrow$ Eje $y'' \equiv y = x + n$. Busquemos "n" para que la intersección de y'' con la parábola sea un único punto:

$$\begin{cases} y = x + n \\ x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 10y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 4x(n-3) + n^2 - 10n + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-4(n-3) \pm \sqrt{16(n-3)^2 - 16(n^2 - 10n + 9)}}{8}$$

Discriminante = 0 $= 16(n-3)^2 - 16(n^2 - 10n + 9) \Rightarrow n = 0 \Rightarrow$ Eje $y'' \equiv y = x$

Abscisa del vértice: $\underset{n=0}{x} = \dfrac{-4(0-3) \pm \sqrt{0}}{8} = \dfrac{3}{2}$; ordenada: $y = x = \dfrac{3}{2}$

Luego, $\boxed{V = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)}$.

El eje focal pasa por el vértice y es perpendicular a y'':

Eje focal $\boxed{\equiv y - \dfrac{3}{2} = -\left(x - \dfrac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + 3}$

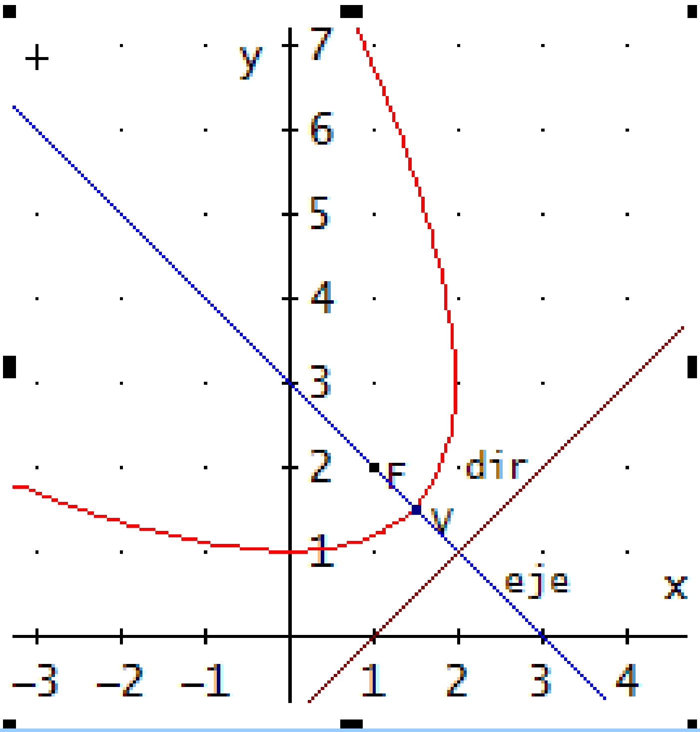
f) Foco y directriz

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Eje focal} \equiv y - \dfrac{3}{2} = -\left(x - \dfrac{3}{2}\right) \\ \text{circunf. de centro V y radio } \dfrac{p}{2} \equiv \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$$

Observando el dibujo se obtiene que el foco es $\boxed{F = (1,2)}$ y la directriz es la recta que pasa por el punto (2, 1) y es paralela a y'':

$\boxed{dir \equiv y - 1 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 1}$

g) Gráfica de la cónica



23.- Sea la *cónica* de ecuación: $11x^2 + 17y^2 - 6\sqrt{3}xy - 40 = 0$

a) ¿Es el *Centro* de la *cónica* el origen del sistema de referencia? ¿Son los *Ejes* de la *cónica* paralelos a los de *coordenadas*? En caso negativo, calcular el ángulo α que forman con ellos.

b) Utilizando el apartado anterior, calcular la Ecuación reducida de la *cónica*:

c) Hallar las ecuaciones de los *Ejes*:

d) *Directrices*.

e) *Focos*.

f) *Vértices*.

***Solución*:**

a) ¿Es el **centro** de la cónica el origen del sistema de referencia? **SI** , ya que NO APARECEN TERMINOS EN X NI EN Y

¿Son los **ejes** de la cónica paralelos a los de coordenadas? **NO** , ya que APARECE TÉRMINO EN X.Y

En caso negativo, calcular el **ángulo** α que forman con ellos:

Llamando z, t a los ejes de la cónica, se ha de verificar que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{COS}\alpha & -\mathrm{SEN}\alpha \\ \mathrm{SEN}\alpha & \mathrm{COS}\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}, \text{ es decir, } \begin{cases} x = z\cos\alpha - t\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y = z\,\mathrm{sen}\,\alpha + t\cos\alpha \end{cases}.$$

Llevando estas expresiones a la ecuación de la cónica y simplificando, se obtiene (1)

$$(-12\sqrt{3}\cos^2\alpha + 12\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + 6\sqrt{3})zt +$$
$$+(6\cos^2\alpha + 6\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha)(t^2 - z^2) + 17z^2 + 11t^2 - 40 = 0$$

Ha de ser 0 = coeficiente de zt $= -12\sqrt{3}\cos^2\alpha + 12\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + 6\sqrt{3}$

Resolviendo la ecuación anterior, se obtiene $\alpha = \boxed{-\frac{\pi}{3} \text{ ó } \frac{\pi}{6}}$ y ya las ecuaciones del giro son:

$$(2)\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$$

b) Utilizando el apartado anterior, calcular la **Ecuación reducida** de la cónica:

Para ello, sustituimos, en la expresión (1), α por el valor que acabamos de obtener, y queda: $\boxed{2x^2 + 5y^2 - 10 = 0; \alpha = \frac{\pi}{6}}$ o bien $\boxed{5x^2 + 2y^2 - 10 = 0; \alpha = -\frac{\pi}{3}}$

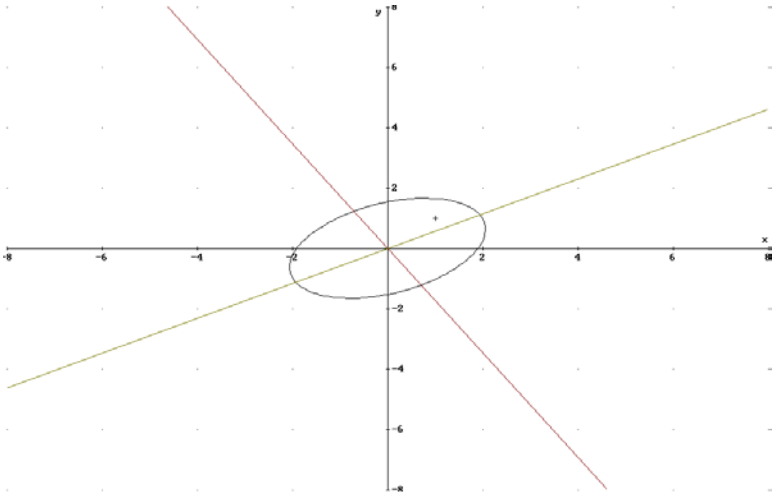
c) Hallar las ecuaciones de los **ejes**.

Para obtener el **eje focal** hay que girar la recta y = 0 un ángulo $\frac{\pi}{6}$; para ello escribimos las ecuaciones del giro $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, es decir, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Sustituyendo queda:

$\boxed{-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0}$. Análogamente, el **eje no focal** se obtiene girando la recta x=0 un ángulo $\frac{\pi}{6}$ obteniéndose: $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0}$

Dibujar los ejes:



d) Las **directrices** se obtienen girando las rectas $x = \frac{a^2}{c} = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}$

Obteniéndose: $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{3}}$ y $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = -\frac{5}{3}}$

e) Los **focos** se obtendrán girando los puntos (c,0),(-c,0), es decir $\boxed{\left(\sqrt{3},0\right),\left(-\sqrt{3},0\right)}$

Para ello: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ y. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

f) Análogamente se obtienen los **vértices**: $\boxed{\left(\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$, $\boxed{\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$, $\boxed{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}$, $\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}$

24.-

a) Clasificar la siguiente *cónica* según los valores del parámetro "a":

$$(a^2+4)x^2+9y^2+6axy-4(a^2+1)x-12ay+4a^2-8=0.$$

b) Hacer un estudio completo de la *cónica* anterior para a = 1:

Ecuación reducida y área de la *cónica*.

semiejes, *excentricidad* y *Parámetro* de la *cónica*.

Centro, *Ejes*, *Focos* y *vértices* principales.

Ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (0,2) y son tangentes a la *cónica*.

Dibujo de la *cónica*.

Solución:

a) Clasificación

$$A=\begin{pmatrix} 4a^2-8 & -2(a^2+1) & -6a \\ -2(a^2+1) & a^2+4 & 3a \\ -6a & 3a & 9 \end{pmatrix},\quad \begin{cases} A_{00}=36>0 \\ |A|=-324\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Elipse}$$

$$(a_{11}+a_{22})|A|=+\cdot-<0 \Rightarrow \boxed{\text{ELIPSE REAL}}$$

b) Sea a=1

Ecuación reducida

$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+\gamma=0$; λ_1 y λ_2 valores propios de $A_c=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=7-\sqrt{13} \\ \lambda_2=7+\sqrt{13} \end{cases}$,

ya que se toma como λ_1 el valor propio de menor valor absoluto.

$$\gamma=\frac{|A|}{A_{00}}=-9$$

$$\boxed{(7-\sqrt{13})x''^2+(7+\sqrt{13})y''^2-9=0 \Rightarrow \frac{x''^2}{\frac{9}{7-\sqrt{13}}}+\frac{y''^2}{\frac{9}{7+\sqrt{13}}}=1}$$

semiejes

$$\boxed{a^2=\frac{9}{7-\sqrt{13}} \Rightarrow a=\frac{3}{\sqrt{7-\sqrt{13}}},\ b^2=\frac{9}{7+\sqrt{13}} \Rightarrow b=\frac{3}{\sqrt{7+\sqrt{13}}}}$$

Área de la cónica $\boxed{S=ab\pi=\frac{3}{2}\pi}$

Excentricidad y parámetro de la cónica

$$a^2=\frac{9}{7-\sqrt{13}},\quad b^2=\frac{9}{7+\sqrt{13}} \Rightarrow \boxed{p=\frac{b^2}{a}=\frac{2\sqrt{26}-5\sqrt{2}}{6}}.$$

$$c^2=a^2-b^2=\frac{1}{2}\sqrt{13}\Rightarrow \boxed{e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{7\sqrt{13}-13}{18}}}$$

Centro

$$\begin{cases}-4+5x+3y=0\\-6+3x+9y=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}.$$

Ejes

Eje focal $x''\equiv\begin{cases}\text{Pasa por el centro } C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\ \text{Es paralelo a los vectores propios asociados a } \lambda_1=7-\sqrt{13}\end{cases}$

$$(A_c-\lambda_1 I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{e}_f=\left(\frac{\sqrt{13}+2}{3},-1\right)\Rightarrow \boxed{y-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2+\sqrt{13}}\left(x-\frac{1}{2}\right)}.$$

El **eje no focal** $y''\equiv\begin{cases}\text{Pasa por el centro } C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\ \text{Es perpendicular al eje focal}\end{cases}$

por tanto, $y''\equiv\boxed{y-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2-\sqrt{13}}\left(x-\frac{1}{2}\right)}$.

Vértices principales

Se hallan como la intersección del eje focal con la circunferencia de centro el origen y radio “a”:

$$\begin{cases}y-\frac{1}{2}=\frac{-3}{2+\sqrt{13}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{7-\sqrt{13}}\end{cases}\Rightarrow \boxed{\begin{cases}V_1\left(\frac{26-3\sqrt{338+78\sqrt{13}}}{52},\frac{26+\sqrt{1690-26\sqrt{13}}}{52}\right)\\ V_2\left(\frac{26+\sqrt{338+78\sqrt{13}}}{52},\frac{26-\sqrt{1690-26\sqrt{13}}}{52}\right)\end{cases}}.$$

Focos

Se hallan los puntos de intersección del eje focal con la circunferencia de centro el origen y radio c:

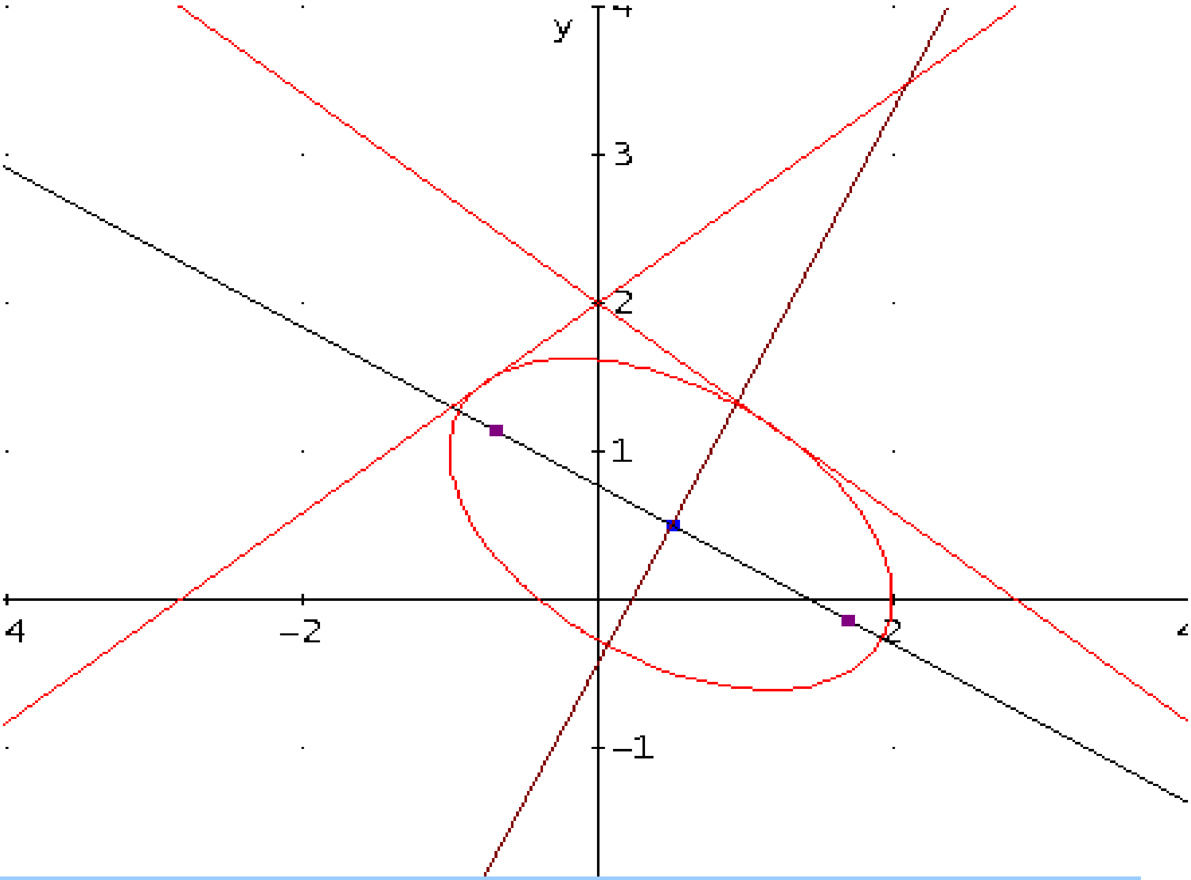
$$c^2=a^2-b^2=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{cases}y-\frac{1}{2}=\frac{-3}{2+\sqrt{13}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{13}}{2}\end{cases}\Rightarrow \boxed{\begin{cases}F_1\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{4}},\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{4}}\right)\\ F_2\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{4}},\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{4}}\right)\end{cases}}$$

Haz de rectas que pasan por el punto (0,2) es $y-2=mx$.

La intersección de la recta tangente con la elipse debe ser un único punto, por tanto, el sistema $\begin{matrix} y=2+mx \\ 5x^2+9y^2+6xy-8x-12y-4=0 \end{matrix}$ debe tener solución única $\Rightarrow$ $(24m+4)^2-32(9m^2+6m+5)=0 \Rightarrow$ $144(2m^2-1)=0 \Rightarrow$ $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$

$$y=2+\frac{1}{\sqrt{2}}x$$
$$y=2-\frac{1}{\sqrt{2}x}$$



25.- Dada la *cónica* de ecuación
$8x^2 - 6\sqrt{2}xy + y^2 - 36\sqrt{2}x + 14y + 49 = 0$. **Se pide:**

- a) Clasificar la *cónica*
- b) La ecuación reducida.
- c) La *excentricidad*.
- d) La ecuación del *Eje* focal.
- e) Las ecuaciones de las *Asíntotas*.

Solución:

Ecuación matricial

$$X^tAX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}49 & -18\sqrt{2} & 7 \\ -18\sqrt{2} & 8 & -3\sqrt{2} \\ -2 & -3\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ x \\ y\end{pmatrix} = 0$$

a) Clasificación

$$A_{00} = \begin{vmatrix}8 & -3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 1\end{vmatrix} = -10 < 0 \Rightarrow \text{Cónica de tipo hiperbólico.}$$

$|A| = -18 \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **HIPÉRBOLA**.

b) Ecuación reducida

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$$

$$k = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{-18}{-10} = \frac{9}{5}; \quad |A_c - \lambda I| = \lambda^2 - 9\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} -1 \\ 10 \end{cases}$$

De acuerdo con el criterio expresado anteriormente, tomamos para λ_1 el valor propio de signo contrario a k, es decir, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 10$.

Por tanto, la Ecuación reducida queda:

$$-x''^2 + 10y''^2 + \frac{9}{5} = 0 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{9/5} - \frac{y''^2}{9/50} = 1.$$

Semiejes

$$a^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \quad b^2 = \frac{9}{50} \Rightarrow b = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

c) Excentricidad

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{110}}{10} > 1$, ya que $a^2 = \frac{9}{5}$, $b^2 = \frac{9}{50}$, $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{99}{50}$.

Centro

Para calcular el *centro*, resolvemos el sistema $\begin{cases} -18\sqrt{2} + 8x - 3\sqrt{2}y = 0 \\ -2 - 3\sqrt{2}x + y = 0 \end{cases}$, obteniéndose el punto. $C = (3\sqrt{2}/10, -26/5)$.

Los ejes son rectas que pasan por el centro y tienen la dirección de los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 , respectivamente.

Los vectores propios asociados a λ_1 son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} 8+1 & -3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 9x - 3\sqrt{2}y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}}x .$$

d) Por tanto, el *eje focal* tiene de ecuación: $y + \frac{26}{5} = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{10}\right)$.

e) Asíntotas

Las *asíntotas* son rectas que pasan por el centro y tienen de pendiente m, siendo m solución de la ecuación $m^2 - 6\sqrt{2}m + 8 = 0$.

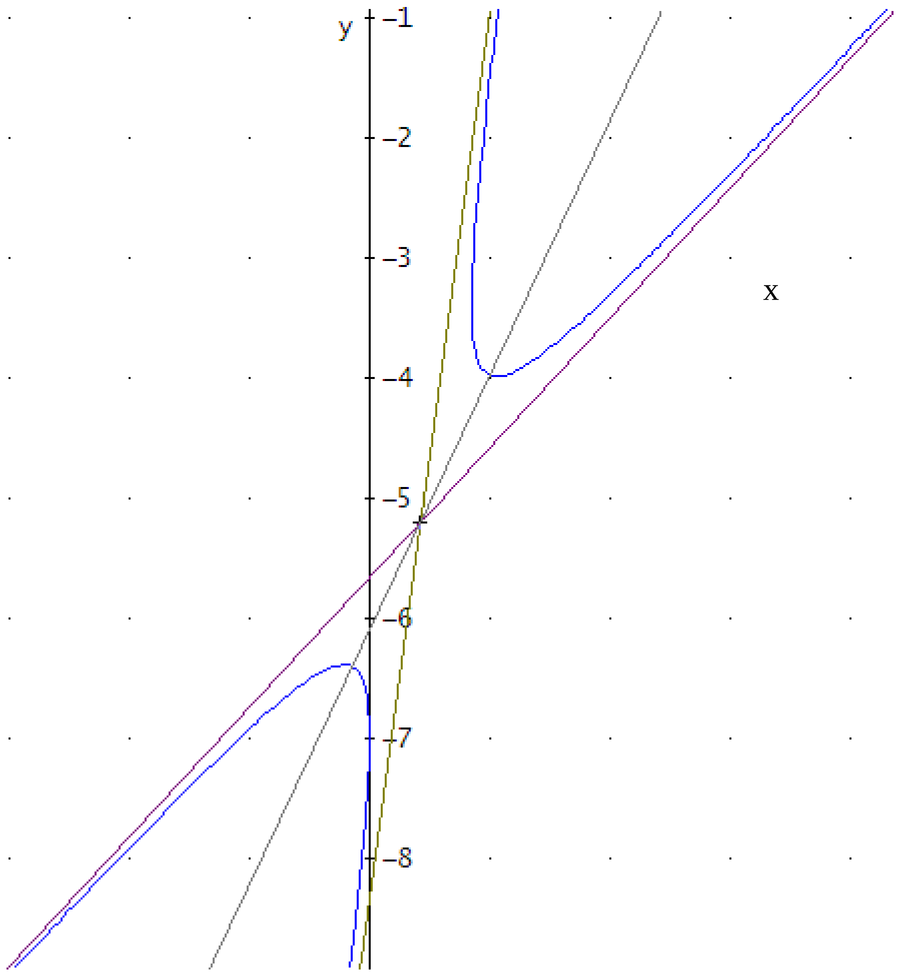
Al resolver la ecuación anterior, se obtienen dos valores para m:

$m_1 = 3\sqrt{2} - \sqrt{10}, m_2 = 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$.

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$y + \frac{26}{5} = (3\sqrt{2} - \sqrt{10})\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{10}\right)$, $y + \frac{26}{5} = (3\sqrt{2} + \sqrt{10})\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{10}\right)$.

Dibujo de la cónica



26.- Dada la *cónica* de ecuación $x^2 + 2ay^2 - 2axy - 2x + 4ay = 0$, se pide:

a) Clasificar la *cónica* en función del parámetro "a".

b) Para a = -10, hallar

b1) Ecuación reducida.

b2) *Centro*, si procede.

b3) *Ejes*, indicando cuál es el focal.

b4) *Asíntotas*, si procede.

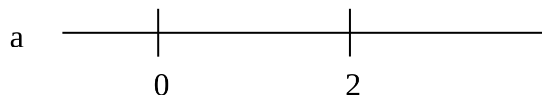
b5) Dibujo de la *cónica* y de los elementos geométricos hallados en los apartados anteriores

Solución:

a) La matriz de la cónica es $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2a \\ -1 & 1 & -a \\ 2a & -a & 2a \end{pmatrix}$

$$|A| = -2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & 2a \end{vmatrix} = a(2-a) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$



Estudiemos las diferentes posibilidades:

1) $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ **HIPÉRBOLA**

2) $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} = 0 \Rightarrow \text{Tipo parabólico} \\ |A| = 0 \Rightarrow \text{parábola degenerada} \end{cases}$

$A_{11} + A_{22} = -4a^2 - 1 < 0 \Rightarrow$ **RECTAS PARALELAS**

3) $0 < a < 2 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ elipse ¿real ó imaginaria?

$(a_{11} + a_{22})|A| = + \cdot - < 0 \Rightarrow$ **ELIPSE REAL**

4) $a = 2 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} = 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ **PARÁBOLA**

5) $a > 2 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{\textbf{HIPÉRBOLA}}$

rectas paralela — parábola

a — hipérbola — 0 — elipse real — 2 — Hipérbola

b) $x^2 - 20y^2 + 20xy - 2x - 40y = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -20 \\ -1 & 1 & 10 \\ -20 & 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

Clasificación (ya sabemos que es una hipérbola: a = -10 < 0)

$A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 10 & -20 \end{vmatrix} = -120 < 0 \Rightarrow$ Cónica de tipo hiperbólico.

$|A| = 20 \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **HIPÉRBOLA**.

b1) Ecuación reducid $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0$

$c = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{20}{-120} = -\frac{1}{6}$; $|A_c - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 10 \\ 10 & -20-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 19\lambda - 120 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} -24 \\ 5 \end{cases}$

Tomamos para λ_1 el valor propio de signo contrario a c, es decir, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -24$;.
Por tanto, la Ecuación reducida queda:

$$5x''^2 - 24y''^2 - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x''^2}{1/30} - \frac{y''^2}{1/144} = 1}.$$

b2) Centro

Para calcular el *centro*, resolvemos el sistema $\begin{cases} -1 + x + 10y = 0 \\ -20 + 10x - 20y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{11}{16}, -\frac{1}{12}\right)}$.

b3) Ejes

Los ejes son rectas que pasan por el centro y tienen la dirección de los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

Los vectores propios asociados a λ_1 son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 10 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -4x + 10y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x.$$

Por tanto, el *eje focal* tiene de ecuación: $\boxed{y + \frac{1}{12} = \frac{2}{5}\left(x - \frac{11}{6}\right)}$.

El *eje no focal* es perpendicular al anterior, luego tiene de ecuación:

$$\boxed{y + \frac{1}{12} = -\frac{5}{2}\left(x - \frac{11}{6}\right)}.$$

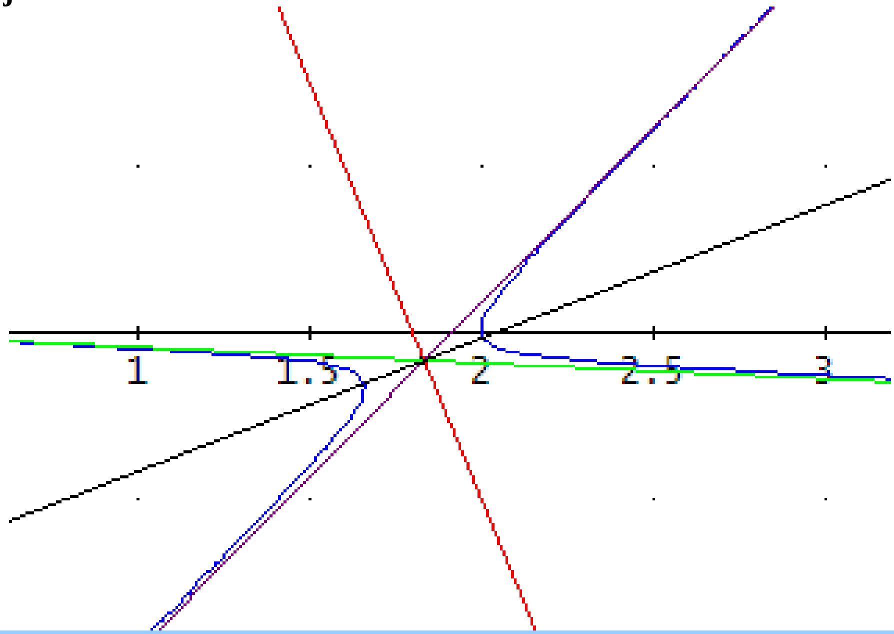
b4) Asíntotas

Las *asíntotas* son rectas que pasan por el centro y tienen de pendiente m, siendo m solución de la ecuación

$$a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + 20m - 20m^2 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{10} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{10} \end{cases}.$$

Las asíntotas tienen, por tanto, de ecuación: $\boxed{y + \frac{1}{12} = (\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{30}}{10})\left(x - \frac{11}{6}\right)}$

b5) Dibujo de la cónica



27.- Dada la *cónica* de ecuación: $x^2 + y^2 + 2kxy + 2x + 1 = 0$, se pide:

a) Clasificar la cónica en función del parámetro "k".

b) Para k = -1

b1) Ecuación reducida y *Parámetro* de la *cónica*.

b2) *Vértice* y *Eje* de la *cónica*.

b3) Dibujo de la *cónica* y de los elementos geométricos hallados en los apartados anteriores.

Solución:

a) La matriz de la cónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = -k^2 = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$A_{00} = |A_c| = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 - k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

k

-1 0 1

Estudiemos las diferentes posibilidades:

1) $k < -1 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \Rightarrow \text{Tipo hiperbólico} \\ |A| \neq 0 \Rightarrow \text{no degenerada} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{HIPÉRBOLA}}$

2) $k = -1 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} = 0 \Rightarrow \text{Tipo parabólico} \\ |A| \neq 0 \Rightarrow \text{no degenerada} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{PARÁBOLA}}$

3) $-1 < k < 0 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ elipse ¿real ó imaginaria?

$(a_{11} + a_{22})|A| = + \cdot - < 0 \Rightarrow \boxed{\textbf{ELIPSE REAL}}$

4) $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \Rightarrow \text{Tipo elíptico} \\ |A| = 0 \Rightarrow \text{degenerada} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\textbf{UN PUNTO}}$

5) $0 < k < 1 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} > 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ elipse ¿real ó imaginaria?

$(a_{11} + a_{22})|A| = + \cdot - < 0 \Rightarrow \boxed{\textbf{ELIPSE REAL}}$

6) $k = 1 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} = 0 \Rightarrow \text{Tipo parabólico} \\ |A| \neq 0 \Rightarrow \text{no degenerada} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{PARÁBOLA}}$

7) $k > 1 \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \Rightarrow \text{Tipo hiperbólico} \\ |A| \neq 0 \Rightarrow \text{no degenerada} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{HIPÉRBOLA}}$

parábola punto parábola

k

hipérbola -1 elipse real 0 elipse real 1 hipérbola

b) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ya sabemos que se trata de una PARÁBOLA por el apartado anterior.
$|A| = -1, \quad A_{00} = 0$

b1) Ecuación reducida

$\lambda_2 y''^2 + 2b_1 x'' = 0$

$$|A_c - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 = \lambda_1 \\ 2 = \lambda_2 \end{cases}$$

$$b_1 = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{a_{11} + a_{22}}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se toma b_1 de signo contrario a λ_2; es decir, $b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\boxed{2y''^2 - \sqrt{2}\,x'' = 0 \Rightarrow \qquad y''^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x''}.$$

Parámetro de la cónica

$$\boxed{2p = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

b2) Vértice y eje de la parábola

El eje de la parábola x`` tiene la dirección de los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 0$ de la matriz A_c:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow y = x$$

Luego, el eje y``, perpendicular a x`` y que corta a la cónica en el vértice, tiene una ecuación de la forma:

$$y`` \equiv y = -x + n$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación de la parábola, obteniéndose:

$$x^2 + (-x + n)^2 - 2x(-x + n) + 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2+2(1-2n)x+n^2+1=0$$

cuyo discriminante Δ ha de ser nulo para que tenga solución única (la abscisa x del vértice):

$\Delta = 4(1-2n)^2-4\cdot 4(n^2+1)=0 \Leftrightarrow -4n-3=0 \Rightarrow n=-\frac{3}{4}$

La abscisa del vértice es, entonces, la solución única de la ecuación $4x^2+2(1-2n)x+n^2+1=0$ para $n=-\frac{3}{4}$:

$$4x^2+5x+\frac{25}{16}=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{8}$$

Como el vértice ha de pertenecer al eje $y`` \equiv y=-x-\frac{3}{4}$, su ordenada ha de ser:

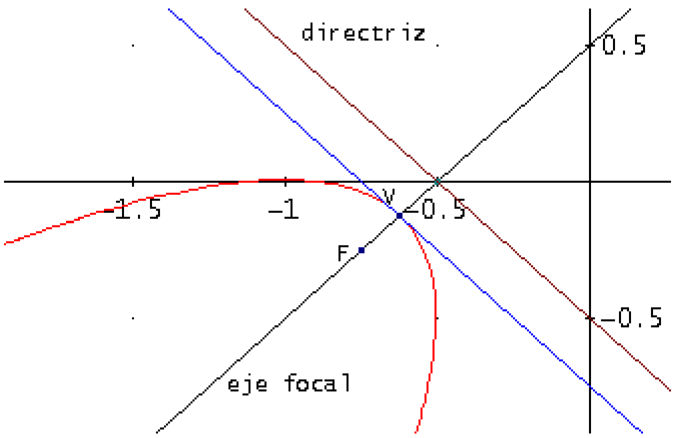
$$y=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{8}$$

El vértice es, por tanto, el punto $\boxed{V\left(-\frac{5}{8},-\frac{1}{8}\right)}$.

Y el eje de la parábola es la recta que pasa por el vértice y tiene de pendiente 1:

$$\boxed{y+\frac{1}{8}=1\left(x+\frac{5}{8}\right)}$$

b3) Dibujo de la cónica



NOTA: Foco y directriz no se piden. Se añaden aquí para tener un estudio más completo de la cónica por si algún alumno emplea esta solución como material de estudio:

Foco y directriz

Como ambos se encuentran a una distancia $\frac{p}{2}=\frac{\sqrt{2}}{8}$ del vértice, intersecamos el eje x`` con la circunferencia de centro V y radio $\frac{p}{2}$:

$$\begin{cases} y+\frac{1}{8}=1\left(x+\frac{5}{8}\right) \\ \left(x+\frac{5}{8}\right)^2+\left(y+\frac{1}{8}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2=\frac{1}{32} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior se obtienen los dos puntos:

$$\left(-\frac{1}{2},0\right) \text{ y } \left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)$$

¿Cuál de ambos es el foco?
Si se interseca la parábola con la recta paralela al eje y`` que pasa por el origen, no se obtienen puntos de corte, ya que el discriminante Δ para n = 0 es negativo:
$\Delta = 4(1-2n)^2-4\cdot 4(n^2+1)=-12<0$
Luego, la parábola se abre hacia la izquierda del vértice y el foco F es, de ambos puntos, el que tiene menor abscisa:

$$\boxed{F\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)}$$

La directriz d es la recta que pasa por el otro punto y es paralela al eje y``:

$$\boxed{d\equiv y-0=-\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

28.- Dada la *cónica* de ecuación: $2 + x^2 + 2xy = 0$, se pide:

a) Clasificarla

b) Coordenadas del *Centro*

c) *Asíntotas*

***Solución*:**

a) Clasificación

$$A_{00} = |A_c| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow \text{Cónica de tipo hiperbólico.}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Se trata de una } \textbf{HIPÉRBOLA}.$$

b) Centro

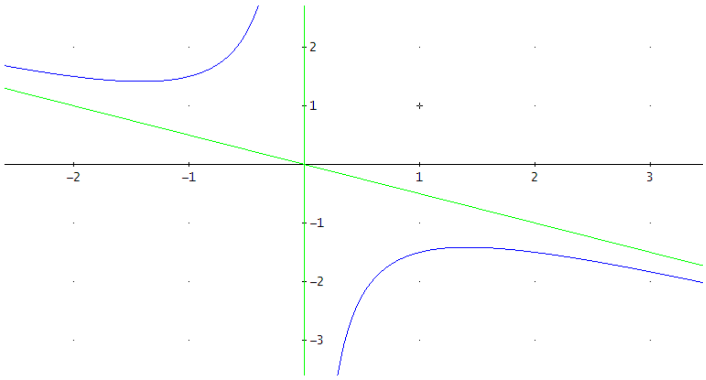
Para calcular el *centro*, resolvemos el sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(0,0)}$.

c) Asíntotas

Las *asíntotas* son rectas que pasan por el centro y tienen de pendiente m, siendo m solución de la ecuación $a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + 2m + 0m^2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Las asíntotas tienen, por tanto, de ecuación: $\boxed{y = -\frac{1}{2}; x = 0}$

Dibujo de la cónica



29.- a) Determinar entre todas las *cónica* de la familia

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + y + 3 + \lambda(xy + y^2 - 2x + y + 1) = 0$$

aquellas no degeneradas cuyos *Centros* están sobre la recta x –y –2 = 0

b) Clasificar la *cónica* para λ=1.

Solución

a) $x^2 + (1+\lambda)\, y^2 + (1+\lambda)\, xy + 2(1-\lambda)x + (1+\lambda)y + 3 + \lambda = 0$

Matriz de la familia de cónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 3+\lambda & 1-\lambda & \frac{1+\lambda}{2} \\ 1-\lambda & 1 & \frac{1+\lambda}{2} \\ \frac{1+\lambda}{2} & \frac{1+\lambda}{2} & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

Cálculo del centro:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & \frac{1+\lambda}{2} \\ \frac{1+\lambda}{2} & \frac{1+\lambda}{2} & 1+\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{12}{\lambda-3} \\ y = \dfrac{2\lambda}{\lambda-3} \end{cases}$$

Sustituimos las coordenadas del centro en la ecuación de la recta: x - y - 2 = 0.

$$-\frac{12}{\lambda-3} - \frac{2\lambda}{\lambda-3} - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Por tanto, la cónica cuyo centro está sobre la recta x-y-2 = 0 es la que se obtiene para λ=1, es decir, la cónica:

$$\boxed{x^2 + 2y^2 + 2xy + 2y + 4 = 0}$$

b) Clasificar la cónica para λ=1

$$A=\begin{pmatrix} 3+1 & 1-1 & \frac{1+1}{2} \\ 1-1 & 1 & \frac{1+1}{2} \\ \frac{1+1}{2} & \frac{1+1}{2} & 1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

No degeneradas, debe cumplir que su det(A) $\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0$$

Cónicas con centro: C≠ (0,0)

$$A_{00}=|A_c|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1>0$$

Cónicas tipo elíptico: $A_{00}>0$

$$\mathrm{Traza}(A_c)=\mathrm{Traza}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=3>0$$

Traza(Ac)>0, es decir de igual signo con respecto a A_{00}, luego una **ELIPSE IMAGINARIA**

30.- Dada la elipse: $x^2+y^2-xy+x+y=0$. Se pide:

a) ***centro***

b) ***excentricidad* y *semiejes***

c) ***ejes* de simetría**

d) ecuación de las rectas *tangentes* a la *elipse* y paralelas a la recta y = x

Solución

a) El centro se obtiene como solución del sistema $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2y-x+1=0 \end{cases}$ es decir $\boxed{\mathbf{C=(-1,-1)}}$

b) Llamando $A_c = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, menor (1,1) de la matriz de la cónica, los valores propios de A_c son (ordenados de forma creciente por su valor absoluto $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{3}{2}$

Si A es la matriz de la cónica $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ entonces $|A| = -\frac{3}{4}$

Y llamando $k = \frac{|A|}{|A_c|} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = -1$

La Ecuación reducida de la cónica es $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\frac{2}{3}}y^2 = 1$

De donde se deduce que los **semiejes** son: $\boxed{\begin{cases} \text{semieje mayor } a = \sqrt{2} \\ \text{semieje menor } b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{cases}}$

La excentricidad viene dada por $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2-\frac{2}{3}}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$

c) Los vectores propios de la matriz A_c asociados respectivamente a los valores propios son: $\begin{cases}\lambda_1 \to (-1,-1)\\ \lambda_2 \to (1,-1)\end{cases}$ que nos dan las pendientes $m_1=1$ y $m_2=-1$ de los ejes de simetría focal y no focal.

Imponiendo la condición de que pasen por el centro C=(-1,-1) las ecuaciones de los ejes son $\boxed{\begin{cases}\text{eje focal} \quad y = x\\ \text{eje no focal} \quad y=-x-2\end{cases}}$

d) El apartado d) se puede resolver de dos formas.

a. Método general.

Se obliga a que la intersección de la cónica con la recta genérica de la dirección dada sea un punto doble. Esos puntos son los puntos de tangencia.

Es decir, hay que resolver el sistema $\begin{cases} y = x+n\\ x^2+y^2+xy+x+y=0\end{cases}$ sustituyendo

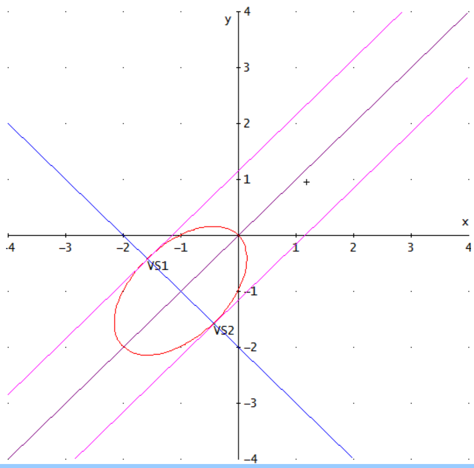
$$x^2+(x+n)^2+x(x+n)+x+x+n=0 \Rightarrow x^2+(n+2)x+n^2+n=0$$

$x=\dfrac{-(n+2)\pm\sqrt{(n+2)^2-4(n^2+n)}}{2}$ se impone que los puntos sean dobles con

$$(n+2)^2-4(n^2+n)=4-3n^2=0 \Rightarrow n=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Las dos rectas tangentes buscadas son, por tanto, $\boxed{y=x\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

b. Si se observa el problema, resulta que se buscan dos rectas tangentes a la elipse, que son paralelas al eje focal, por tanto son dos rectas paralelas al eje focal y que cortan a la elipse en los vértices secundarios. Estos vértices se obtienen de la intersección del eje no focal con la elipse, es decir, de resolver el sistema $\begin{cases} y=-x-2\\ x^2+y^2+xy+x+y=0\end{cases}$ se obtienen los puntos $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-1,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-1\right)$ *y* $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-1,\dfrac{1}{\sqrt{3}}-1\right)$ y las rectas buscadas son las rectas de pendiente m=1 que pasan por estos vértices.



31. Dada la *cónica* de ecuación: $5x^2 + 5y^2 + 2xy - 6x - 6y - 3 = 0$, se pide: a) Ecuación reducida. b) *Excentricidad*. c) *Centro*. d) *Ejes*.

Solución:

La ecuación matricial de la cónica es:

$$\overline{X}^t A \overline{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Por tanto, $A_{00} = 24 > 0 \Rightarrow$ Cónica de tipo elíptico.

$|A| = -144 \neq 0 \Rightarrow$ Es una elipse.

$|A|\,(a_{11} + a_{22}) = -144\,(5+5) = -1440 < 0 \Rightarrow$ *Es una elipse real*.

a) *Ecuación reducida*: $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2\, y''^2 + k = 0$

$$|A_c - \lambda\, I| = (5-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases}$$

Tomamos para λ_1 el valor propio de menor valor absoluto, es decir, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 6$;

$k = \dfrac{|A|}{A_{00}} = -6$.

Por tanto, la Ecuación reducida queda: $-6 + 4x''^2 + 6y''^2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x''^2}{3/2} + y''^2 = 1$

b) *Excentricidad*: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{3/2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} < 1$, ya que:

$a^2 = \dfrac{3}{2}$, $b^2 = 1$, $c^2 = a^2 - b^2 = \dfrac{1}{2}$.

c) Para calcular el *centro*, resolvemos el sistema $\begin{cases} -3 + 5x + y = 0 \\ -3 + x + 5y = 0 \end{cases}$, obteniéndose el punto: **C = (1/2, 1/2)**.

d) Los ejes son rectas que pasan por el centro y tienen la dirección de los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

Los vectores propios asociados a λ_1 son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} 5-4 & 1 \\ 1 & 5-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

Por tanto, el *eje focal* tiene de ecuación: $y - \dfrac{1}{2} = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{y = -x + 1}$.

El *eje no focal* es perpendicular al anterior, luego tiene de ecuación:

$$y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x.$$

32.- Dadas las *cónicas*

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 1 = 0$$
$$4x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 4y - 3 = 0$$

Se pide:

a) Calcular los puntos de *intersección* de ambas *cónicas*.

b) Hallar la ecuación de la *recta* r que pasa por ambos puntos de *intersección*.

c) Calcular los *puntos de corte* de la recta r con cada uno de los *ejes* focales de ambas *cónicas*.

Solución:

a) La intersección de ambas cónicas da como solución los puntos ***(-0.4775, 0.4765)*** *y* ***(-1.0633, 0.0726)***

b) La recta que pasa por ambos puntos tiene como ecuación: y = 0.6895 x + 0.8057

c) Debemos obtener los ejes focales de cada cónica.

La primera cónica es una elipse y sus los valores propios de la matriz $A_c = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

son $\lambda_1=2$ y $\lambda_2=4$ y la Ecuación reducida es $\frac{x^2}{0.25}+\frac{y^2}{0.125}=1$

La dirección del eje focal viene dado por el autovalor λ_1, $(A_c - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ es decir, es la dirección de la recta y = - x

El centro de simetría de la elipse se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones 2 + 3x + y = 0; 0 + x + 3y = 0

Por tanto, el centro es el punto C = (-0.75 , 0.25) y el eje focal la recta y = - x - 0.5

La segunda cónica es una parábola pues la matriz Ac = tiene como determinante cero

Los valores propios de la matriz $A_c = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=5$

La dirección del eje focal es la asociada a $\lambda_1=0$ y viene dada por la

ecuación $(A_c - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$; y = 2x

Las rectas perpendiculares al eje, por tanto, tendrán la forma y = - 0.5 x + k La intersección de esas rectas con la parábola viene dada por la solución del sistema de ecuaciones:

$4x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 4y - 3 = 0$

$y = -0.5x + k$

Resolviendo el sistema en x e y se obtienen los dos puntos de corte en función de k

$$x = 0.4\left(k \pm \sqrt{3-4k}\right)$$
$$y = 0.2\left(4k \pm \sqrt{3-4k}\right)$$

Para obtener el vértice se impone que ambos puntos sean el mismo, es decir, que k=0.75

Quedando el punto V (0.3 , 0.6)

El eje focal de la parábola es la recta de pendiente m=2 que pasa por el vértice: y = 2 x

La intersección de la recta r con el eje focal de la elipse es

y = 0.6895 x + 0.8057 ; y = - x – 0.5

(-0.7729, 0.2729)

La intersección de la recta r con el eje focal de la parábola es

y = 0.6895 x + 0.8057; y = 2 x

(0.6148, 1.2296)

33.- Hallar las coordenadas del *centro*, las ecuaciones de los *ejes* y las *asíntotas* de la *hipérbola* $6x^2 - 12xy + y^2 + 3x + 2y - 13 = 0$.

Solución:

Centro

Para calcular el *centro*, resolvemos el sistema $\begin{cases} \frac{3}{2} + 6x - 6y = 0 \\ 1 - 6x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}$.

Ejes

Los ejes son rectas que pasan por el centro y tienen la dirección de los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

$$|A_c - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -6 \\ -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 30 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 10 \\ -3 \end{cases}$$

$$k = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{1455/4}{-30} = -\frac{97}{8}$$

Tomamos para λ_1 el valor propio de signo contrario a k, es decir, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = -3$.

Los vectores propios asociados a λ_1 son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} 6-10 & -6 \\ -6 & 1-10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -4x - 6y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x.$$

Por tanto, el *eje focal* tiene de ecuación: $\boxed{y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow 2x + 3y - 3 = 0}$.

El *eje no focal* es perpendicular al anterior, luego tiene de ecuación:

$$\boxed{y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow 12x - 8y + 1 = 0}.$$

Asíntotas

Las *asíntotas* son rectas que pasan por el centro y tienen de pendiente m, siendo m solución de la ecuación $a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0 \Leftrightarrow 6 - 12m + m^2 = 0 \Rightarrow m = 6 \pm \sqrt{30}$.

Una asíntota tiene, entonces, de ecuación: $\boxed{y - \frac{1}{2} = \left(6 + \sqrt{30}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right)}$

La otra, pasa por el centro y es: $\boxed{y - \frac{1}{2} = \left(6 - \sqrt{30}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right)}$.

34.- Escribir la Ecuación reducida de la *cónica* $x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x + 1 = 0$ y determinar la *excentricidad*.

Clasificación

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} A_{00} = 2 > 0 \\ |A| = -1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Elipse}$$

$$(a_{11} + a_{22})|A| = + \cdot - < 0 \Rightarrow \boxed{\textbf{ELIPSE REAL}}$$

Ecuación reducida

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$$

λ_1 y λ_2 valores propios de $A_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 - \sqrt{2} \\ \lambda_2 = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$, ya que se toma como λ_1 el valor propio de menor valor absoluto.

$$k = \frac{|A|}{A_{00}} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\left(2-\sqrt{2}\right)x''^2 + \left(2+\sqrt{2}\right)y''^2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x''^2}{\dfrac{1}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}} + \frac{y''^2}{\dfrac{1}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}} = 1}$$

Excentricidad

Ya que $a^2 = \dfrac{1}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}$, $b^2 = \dfrac{1}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}$, $c^2 = a^2 - b^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

$$\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}}} = \sqrt{2}\left(2\sqrt{2} - 2\right) < 1}$$

35.- Sea la *cónica* de ecuación: $\lambda x^2 + \lambda y^2 - 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$.

a.- Clasificarla según los valores del parámetro real "λ".

b.- Para λ = 0, se pide:

Ecuación reducida

semiejes

Excentricidad

Centro

Asíntotas

Solución:

a.- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$

$$A_{00} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$|A| = (\lambda + 1)\ (\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

	Caso1	**Caso 2**	**Caso 3**	**Caso 4**	**Caso 5**	**Caso 6**	**Caso 7**
λ	$(-\infty,-1)$	**-1**	**(-1, 1)**	**1**	$(1,3)$	**3**	$(3,\infty)$
A_{00}	+	**0**	**-**	**0**	+	+	+
$\lvert A\rvert$	+	**0**	**-**	**-**	**-**	**0**	+
Cónica	**Elipse real**	**Rectas Par.**	**Hipérbola**	**Recta doble**	**Elipse real**	**Punto**	**Elipse imaginaria**

$$(a_{11} + a_{22})\ |A| = 2a\ (a + 1)\ (a - 3)$$

Caso 1: $(a_{11} + a_{22})|A| = - \cdot + < 0 \Rightarrow$ Elipse real

Caso 2: $A_{11} + A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \underset{\lambda=-1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 < 0 \Rightarrow$

Rectas Paralelas

Caso 3: Hipérbola

Caso 4: $A_{11} + A_{22} \underset{\lambda=1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Recta doble

Caso 5: $(a_{11} + a_{22})|A| = + \cdot - < 0 \Rightarrow$ Elipse real

Caso 6: Un punto

Caso 7: $(a_{11}+a_{22})\ |A| = + \cdot + > 0 \Rightarrow$ Elipse imaginaria

b.- Estamos en el caso 3, se trata de una **hipérbola**.

Ecuación reducida:
$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_c - \lambda I| = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$k = \frac{|A|}{A_{00}} = \frac{-3}{-1} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 & \text{(signo contrario a k)} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$-x''^2 + y''^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{3} - \frac{y''^2}{3} = 1$$

semiejes: **a = b =** $\boxed{\sqrt{3}}$, se trata de una hipérbola equilátera.

Excentricidad: $\boxed{e = \sqrt{2}}$

Centro: $\begin{cases} 1 - y = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\ (1,1)}$

Asíntotas:

Pendiente: $a_{11} + a_{22}m^2 + 2a_{12}m = 0 \Rightarrow 0 - 2m = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = \infty \end{cases} \Rightarrow$

Ecuaciones: $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}}$

36.- a) Clasificar las siguientes *cónicas*:

a1) $2 + x^2 + 2xy = 0$

a2) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 8y = 0$

a3) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 1 = 0$

b) Hallar los *semiejes* a y b, y las ecuaciones de los *ejes* de la *elipse*

$x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 4y = 0$

Solución:

a1) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}|A_c| = -1 < 0\\ |A| = -2 \neq 0\end{cases}$ $\Rightarrow$ la ecuación corresponde a una ***hipérbola***

a2) $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}|A_c| = 0\\ |A| = -4 \neq 0\end{cases}$ $\Rightarrow$ la ecuación corresponde a una ***parábola***

a3) $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}|A_c| = 1 > 0\\ |A| = -3 \neq 0\\ tr(A_c)|A| < 0\end{cases}$ $\Rightarrow$ la ecuación corresponde a una ***elipse real***

b) La Ecuación reducida de la elipse, es de la forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + k = 0$, y la ecuación de una elipse de centro en el origen es, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, luego operando e identificando se obtiene que: $a^2=\frac{-k}{\lambda_1}$ y $b^2=\frac{-k}{\lambda_2}$.

Calculamos k y los autovalores de A_c

$$A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}|A_c| = 1\\ |A| = -2\end{cases} \Rightarrow k = \frac{|A|}{|A_C|} = -2$$

Autovalores de A_c: $\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\\ \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$, luego,

$$a^2=\frac{4}{3-\sqrt{5}}=3+\sqrt{5} \text{ y } b^2=\frac{4}{3+\sqrt{5}}= 3-\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{3+\sqrt{5}}},\ \boxed{b=\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

Para el cálculo de las ecuaciones de los ejes necesitamos calcular el centro y las direcciones de los ejes:

Centro: $\begin{cases}-1+x-y=0\\ 2-x+2y=0\end{cases}$, resolviendo el sistema se obtiene. x= 0, y= -1 $\Rightarrow$ C(0,-1)

Direcciones de los ejes: $\begin{pmatrix}1-\frac{3-\sqrt{5}}{2} & -1\\ -1 & 2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, operando quedan dos ecuaciones proporcionales, siendo cualquiera de ellas la solución, por ejemplo,

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}x - y = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x$ y las ecuaciones de los ejes son:

Eje focal: $\boxed{y+1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}$ Eje secundario: $\boxed{y+1=-\frac{2}{\sqrt{5}-1}x}$

37. Dada la *cónica* $\alpha x^2 - 2xy + \alpha y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Para $\alpha = -2$ la *Ecuación reducida* y la *excentricidad*

b) Para $\alpha = -1$ el *eje* focal

c) Para $\alpha = 0$ las *asíntotas*

d) Clasificar la *cónica* si $\alpha = -\frac{1}{3}$

Solución:

a) $-2x^2 - 2xy - 2y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$

Clasificación

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} A_{00} = 3 > 0 \\ |A| = 15 \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Elipse}$$

$\text{signo}(a_{11} + a_{22}) \neq \text{signo}|A| \quad \Rightarrow$ **ELIPSE REAL**

Ecuación reducida

$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0$

λ_1 y λ_2 valores propios de $A_c = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$, ya que se toma como λ_1 el valor propio de menor valor absoluto.

$$k = \frac{|A|}{A_{00}} = 5$$

$$\boxed{-x''^2 - 3y''^2 + 5 = 0 \Rightarrow \frac{x''^2}{5} + \frac{y''^2}{\frac{5}{3}} = 1}$$

semiejes

$$a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}, \quad b^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Excentricidad

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{10}{3} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow \boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

b) $-x^2 - 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$

Clasificación

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Cónica de tipo parabólico.

$|A| = 4 \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una **PARÁBOLA**.

Ecuación reducida

es del tipo $\lambda_2 y''^2 + 2b_1 x'' = 0$, siendo $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} = 1 + 1 = 2$,

Eje y vértice

De todas las rectas que tienen por dirección la dada por los vectores propios de A_c asociados al valor propio λ_2, vamos a considerar la recta r que corta a la parábola en único punto. Dicho punto será el vértice V de la parábola.

Los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 2$, son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow y=x$$

Por tanto, la pendiente de la recta r es 1, y tiene una ecuación de la forma: $y = x + n$.

Hay que hallar n de forma que el discriminante Δ de la ecuación de segundo grado que se obtiene al intersecar la parábola y la recta r, sea nulo:

$$\begin{cases} -x^2-2xy-y^2-2x+2y+3=0 \\ y=x+n \end{cases} \Rightarrow -x^2-2x(x+n)-(x+n)^2-2x+2(x+n)+3=0=0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (4n)^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-n^2+2n+3) = 0 \Rightarrow n = -\frac{3}{2}.$$

El *vértice* es ya la solución del sistema anterior para $n=-\frac{3}{2}$, es decir: $\boxed{V = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)}$.

El *eje* es la recta que pasa por el vértice y es perpendicular a r, es decir, tiene de pendiente -1. Su ecuación es, por tanto:

$$\boxed{y+\frac{3}{4} = -\left(x-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow x+y=0}.$$

c) $-2xy-2x+2y+3=0$

Clasificación

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ A_{00} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow \text{ Cónica de tipo hiperbólico.}$$

$|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Se trata de una hipérbola.

Centro:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-y=0 \\ 1-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow C\ (1,-1)$$

Asíntotas:

$$\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2m=0 \Rightarrow m=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

La otra asíntota pasa por C y tiene pendiente infinita: $\boxed{x=1}$.

d) $-\frac{1}{3}x^2-2xy-\frac{1}{3}y^2-2x+2y+3=0$

Clasificación: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_{00} < 0 \\ |A| = 0 \end{cases} \Rightarrow$ DOS RECTAS SECANTES

38.- Dada la *cónica* de ecuación $4x^2 - 400x + By^2 - 1800y = 80036$. Se pide:

a) Clasificarla para los valores: B = 4, 0, -9.

b) Para B = - 9, calcular: *semiejes, distancia focal, excentricidad y parámetro* de la cónica.

c) Siguiendo con B = - 9, hallar: *centro, vértices, focos y asíntotas.*

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 80036 & -200 & -900 \\ -200 & 4 & 0 \\ -900 & 0 & B \end{pmatrix}$. $A_c = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \Rightarrow |A_c| = 4B$; |A|=280144 B -.3240000

- Si B=4 $\Rightarrow$ A_c=16 $\Rightarrow$ tipo elíptico $(a_{11}+a_{22})|A|>0$ y $a_{11}=a_{22}$; se trata de una circunferencia.

- Si B=0 $\Rightarrow$ A_c= 0 $\Rightarrow$ tipo parabólico y |A|<0 $\Rightarrow$ se trata de una parábola.

- Si B= -9 $\Rightarrow$ A_c= -36 $\Rightarrow$ tipo hiperbólico y |A|<0; se trata de una hipérbola.

b) Si B=-9, la ecuación $4x^2 - 400x + By^2 - 1800y = 80036$ no tiene término en xy, por tanto, el eje de la hipérbola es paralelo al eje OX y la ecuación anterior se puede escribir en la forma reducida $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ siendo dicha ecuación

$$\frac{(x-50)^2}{3^2} - \frac{(y+100)^2}{2^2} = 1.$$

semiejes **a=3 y b=2**. Distancia entre focos $d(F,F') = 2c = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{13}$

Excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ Parámetro de la cónica. $p = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{3}$

c) Centro y vértices y focos

Centro $C(h,k) = C(50,-100)$. Vértices $V(h \pm a, k) \Rightarrow \begin{cases} V_1(53,-100) \\ V_2(47,-100) \end{cases}$.

Focos $F(h \pm c, k) \Rightarrow \begin{cases} F_1(50+\sqrt{13},-100) \\ F_2(50-\sqrt{13},-100) \end{cases}$.

Las ecuaciones de las asíntotas son $y - k = \pm \frac{b}{a}(x-h) \Rightarrow \begin{cases} y+100 = \frac{2}{3}(x-50) \\ y+100 = -\frac{2}{3}(x-50) \end{cases}$.

39.- Hacer un estudio completo de la siguiente cónica: $x^2+y^2-xy+x+y=0$.

Solución:

Clasificación

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=-\frac{3}{4}\neq 0\text{; Cónica no degenerada.}$$

$$A_{00}=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=\frac{3}{4}>0 \quad \text{y} \quad (a_{11}+a_{22})|A|=(1+1)|A|<0$$ Se trata de una **elipse real**.

Ecuación reducida. Hallamos los valores propios de A_{00}

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{2} \text{ y } \lambda_2=\frac{3}{2} \text{ y al ser } k=\frac{|A|}{A_{00}}=\frac{-3/4}{3/4}=-1$$

$$\frac{1}{2}(x'')^2+\frac{3}{2}(y'')^2-1=0 \Rightarrow \boxed{\frac{(x'')^2}{2}+\frac{(y'')^2}{2/3}=1}$$ $\Rightarrow$ el semieje mayor es $\boxed{a=\sqrt{2}}$, por tanto la **longitud del eje mayor (focal) es** $2a=2\sqrt{2}$. El semieje menor es $\boxed{b=\sqrt{\frac{2}{3}}}$, por tanto **longitud del eje menor (no focal) es** $2b=2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

El **área de la elipse es** $S=a\cdot b\cdot\pi=\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\pi=2\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

En la elipse $c^2=a^2-b^2$, en este caso $c^2=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow c=2\frac{\sqrt{3}}{3}$, por tanto, el valor de la **excentricidad** es $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$

Distancia entre focos d(F, F')=2c; $d(F,F')=2\cdot c=2\frac{2\sqrt{3}}{3}=\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

Siendo el **parámetro de la cónica** $p=\frac{b^2}{a}=\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

El **centro** es la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}y=0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+y=0\end{array}\right\}\Rightarrow (x,y)=\boxed{\mathbf{(-1,-1)}}.$$

El **eje focal** es una recta que pasa por el centro (-1, -1) y es paralelo a los vectores propios asociados a $\lambda_1=\frac{1}{2}$.

Por tanto, resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\Rightarrow \alpha=\beta .$$

Así pues, $\left.\begin{array}{l}x=-1+t\\ y=-1+t\end{array}\right\}$ o en forma cartesiana $\boxed{y+1=(x+1)\Rightarrow y=x}$ es el eje focal

Eje no focal $\boxed{y+1=-(x+1)\Rightarrow y=-x-2}$

Vértices:

Vértices principales: Se hallan intersecando el eje focal con la circunferencia de centro el de la cónica y radio $a=\sqrt{2}$:

$$\begin{cases}y+1=(x+1)\\ (x+1)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\end{cases}\Rightarrow \boxed{\begin{cases}A_1(0,0)\\ A_2(-2,-2)\end{cases}}$$

Los vértices secundarios se hallarían de manera análoga, intersecando el eje no focal con la circunferencia de centro el de la cónica y radio $b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{cases}y+1=-(x+2)\\ (x+1)^2+(y+1)^2=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow \boxed{\begin{cases}B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)\\ B_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-1,\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)\end{cases}}$$

Focos

Se hallan intersecando el eje focal con la circunferencia de centro el de la cónica y radio c:

$$\begin{cases} y+1=(x+1) \\ (x+1)^2+(y+1)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} F_1\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-1,\frac{\sqrt{6}}{3}-1\right) \\ F_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}-1,-\frac{\sqrt{6}}{3}-1\right) \end{cases}}$$

Directrices

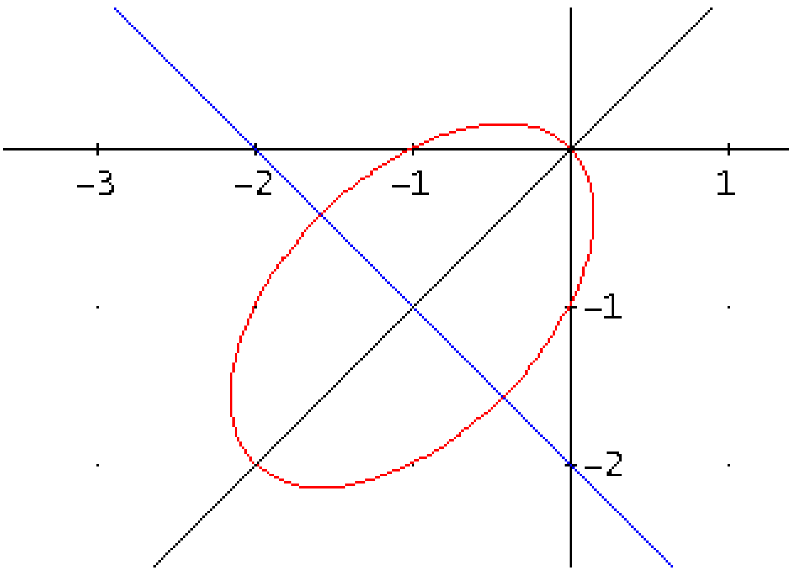
Son rectas paralelas al eje no focal y'' y tales que distan $\frac{a^2}{c}$ del centro de la cónica:

$dir \equiv y=-x+k \Leftrightarrow x+y-k=0$

$$d(C,dir)=\frac{|-1-1-k|}{\sqrt{2}}=\frac{a^2}{c}=\frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow |2+k|=3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow k=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}-2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} dir_1 \equiv x+y-\frac{2\sqrt{6}}{3}-2=0 \\ dir_2 \equiv x+y+\frac{2\sqrt{6}}{3}-2=0 \end{cases}}$$

Dibujo de la cónica



40.- Dada la cónica que pasa por los puntos

$$(3,4),(-3,9),(-3,-1),(-9,4)\ \text{y}\ \left(\frac{3}{5},0\right).$$

Hacer un estudio completo:

- **Ecuación reducida**
- **Semiejes**
- **Excentricidad, distancia entre focos y parámetro de la cónica**
- **Centro de la cónica**
- **Ejes**
- **Vértices**
- **Focos**
- **Directrices**

Solución:

La ecuación buscada es de la forma $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$.

Como los cinco puntos dados han de verificar dicha ecuación, sustituyendo en ella la "x" y la "y" por las coordenadas de cada uno de los puntos , se obtiene el siguiente sistema cuyas incógnitas son A, B, C, D, E y F:

$$\begin{cases} Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \\ 9A+16B+12C+3D+4E+F=0 \\ 9A+81B-27C-3D+9E+F=0 \\ 9A+B+3C-3D-E+F=0 \\ 81A+16B-36C-9D+4E+F=0 \\ \frac{9}{25}A+\frac{3}{5}D+F=0 \end{cases}$$

que ha de ser compatible indeterminado, luego, definiendo la matriz de los coeficientes del sistema y calculando su determinante, ha de verificarse que:

$$0=\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & xy & x & y & 1 \\ 9 & 16 & 12 & 3 & 4 & 1 \\ 9 & 81 & -27 & -3 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & -3 & -1 & 1 \\ 81 & 16 & -36 & -9 & 4 & 1 \\ \frac{9}{25} & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1728\left(25x^2+150x+9\left(4y^2-32y-11\right)\right)=0$$

$$\boxed{25x^2+36y^2+150x-288y-99=0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{25}=1}$$

Observamos que los ejes de simetría son paralelos a los ejes de coordenadas, ya que el coeficiente C es igual a 0. Y la ecuación se identifica con $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ siendo el centro (α,β). **Centro de la cónica: (-3,4)**

Ecuación reducida: $\boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1}$

Semiejes: **a=6** y **b=5**

En la elipse $c^2=a^2-b^2$, en este caso $c^2=36-25=11 \Rightarrow c=\sqrt{11}$, por tanto, el valor de la **excentricidad** es $\boxed{e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{11}}{6}}$

Distancia entre focos d(F, F')=2c; $\boxed{d(F,F')=2\cdot c=2\sqrt{11}}$

Parámetro de la cónica $\boxed{p=\frac{b^2}{a}=\frac{25}{6}}$

Eje focal o eje mayor: **y=4**

Eje no focal o eje menor: **x=-3**

Vértices principales:

Sobre el eje focal a una distancia a del centro: $(\alpha\pm a,\beta)=(-3\pm 6,4)$

$\boxed{(3,4),(-9,4)}$,

Vértices secundarios:

Sobre el eje no focal a una distancia b del centro: $(\alpha,\beta\pm b)=(-3,4\pm 5)$

$\boxed{(-3,9),(-3,-1),}$

Focos:

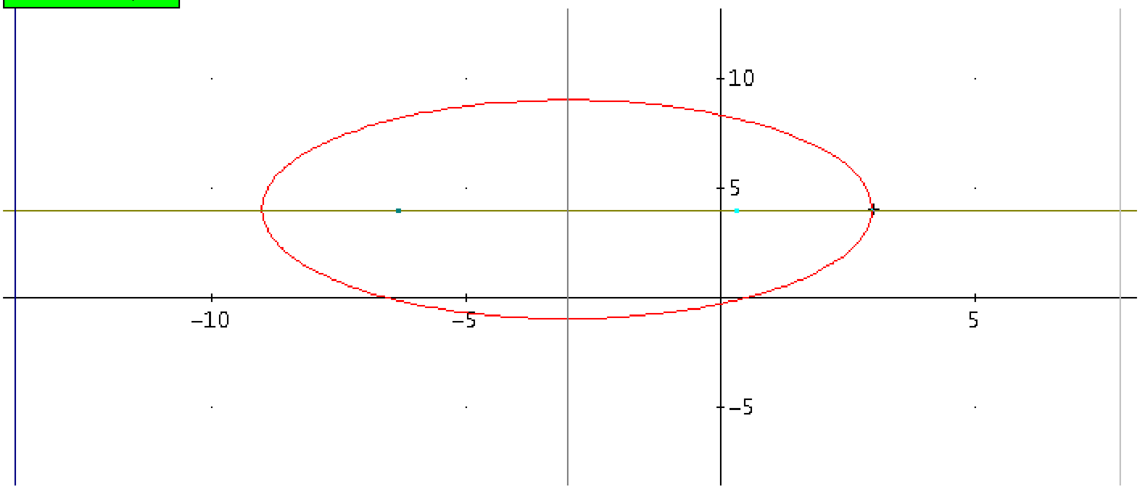
Sobre el eje focal a una distancia c del centro: $(\alpha\pm c,\beta)=\left(-3\pm\sqrt{11},4\right)$

$\boxed{(-3-\sqrt{11},4),(-3+\sqrt{11},4)}$

Directrices:

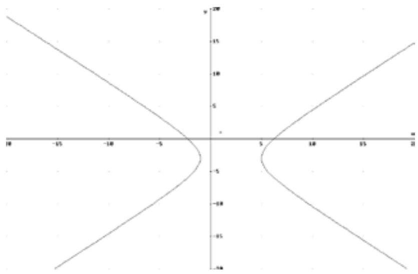
Perpendiculares al eje focal a una distancia a^2/c del centro: $x=\alpha\pm\frac{a^2}{c}$

$\boxed{x=-3\pm\frac{36}{\sqrt{11}}}$



SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

P1.- La ecuación de la hipérbola equilátera es $(x-2)^2-(y+3)^2=9$; centro (2,-3); eje focal $y=-3$, y eje no focal x=2; focos $F(2+\sqrt{3},-3)$ y $F'(2-\sqrt{3},-3)$; directrices $x=2+3/\sqrt{2}$ y $x=2-3/\sqrt{2}$; y de Ecuación reducida $(x')^2-(y')^2=9$.

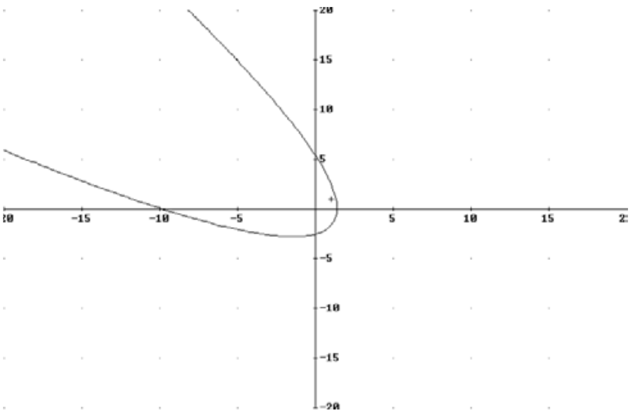


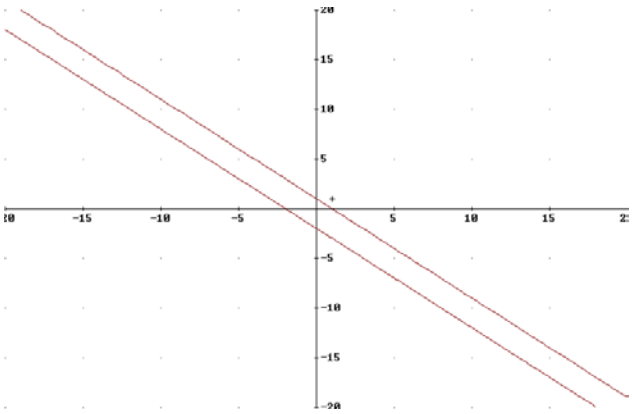
P2.- Circunferencia $(x-5)^2+(y+3)^2=20$.

P3.- $\dfrac{(X+2)^2}{9}+\dfrac{(Y-1)^2}{25}=1$

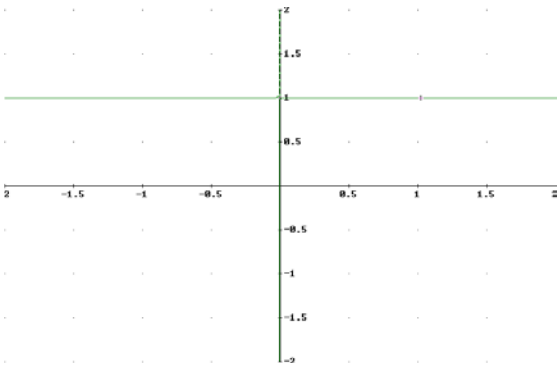
P4.- a) recta tangente $5x-8y-3=0$ y recta normal $40x+25y-24=0$. b) $y=9$ y $y-9=\dfrac{10}{9}(x-9)$.

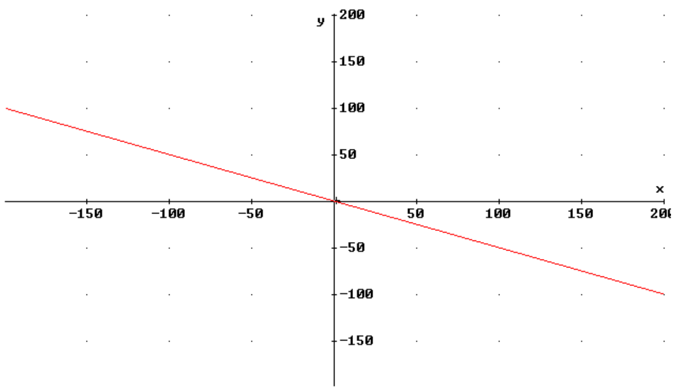
P5.- a) b)





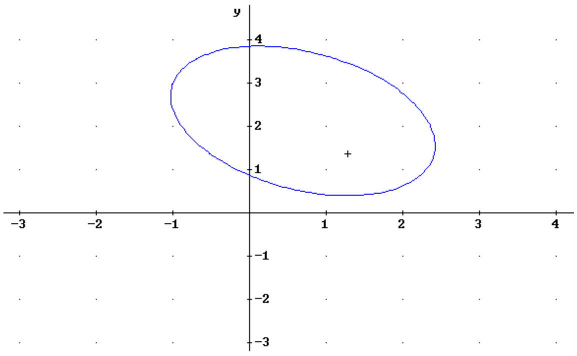
c) d)



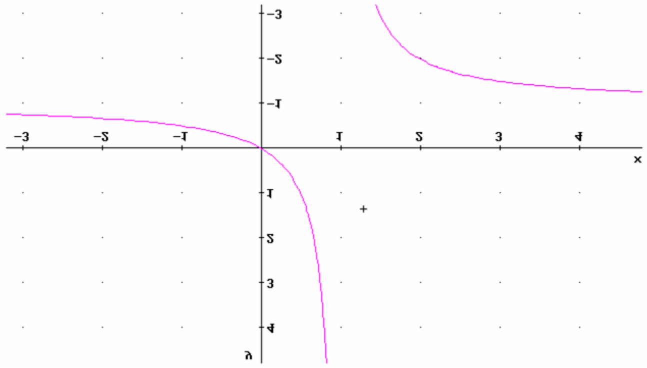


e) elipse imaginaria

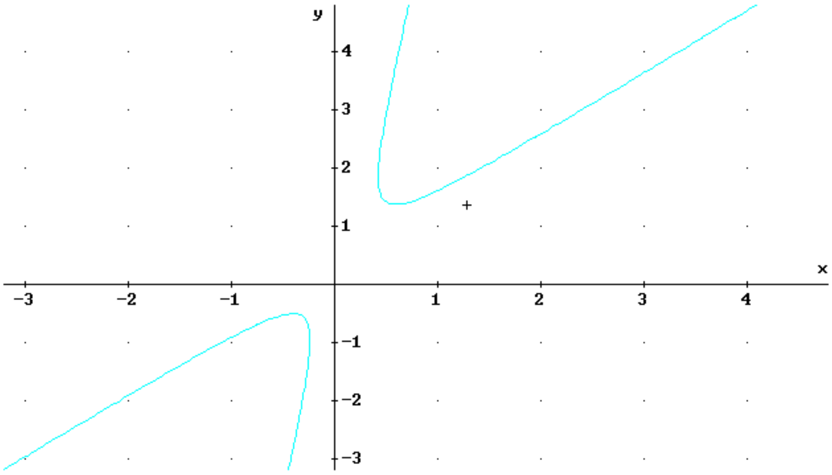
f)



g)



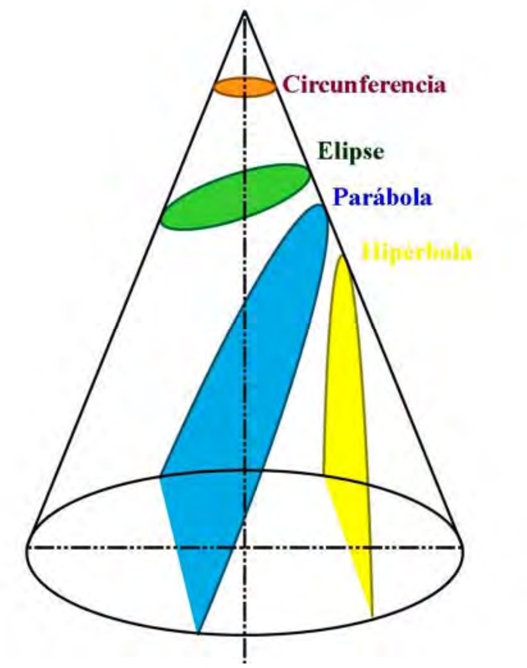
h)



Cónica

- Es la sección producida en una superficie cónica de revolución por un plano que no pase por el vértice.
- Es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya razón de distancias a un punto fijo (que llamaremos **foco**) y a una recta fija (que llamaremos **directriz**) es constante.
- Es el lugar geométrico de los puntos del plano que verifiquen la ecuación general de segundo grado: $a_{00} + 2\,a_{01}x + 2\,a_{02}y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2\,a_{12}xy = 0$ donde a_{11}, a_{12} y a_{22} no son simultáneamente nulos y con respecto a una referencia ortonormal del plano.

Ecuación de la cónica en forma matricial: $\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$



Centro

- Punto alrededor del cual la figura es simétrica (centro de la elipse o de la hipérbola).
- Las transformaciones geométricas que tienen un único punto invariante se denomina **centro**. Así tenemos el centro del giro en el plano, el centro de homotecia y el centro de semejanza cuando la razón es $k \neq 1$.
- **Centro radical** de tres circunferencias es un punto del plano que tienen la misma potencia respecto de las tres circunferencias.

Asíntotas de una hipérbola

Las **asíntotas** de una hipérbola son rectas que pasan por el centro de la cónica y tienen de pendiente m, solución de la ecuación: $a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0$.
Este último resultado se obtiene de aplicar que, en general, las asíntotas oblicuas a una curva de ecuación y = f(x) tienen de pendiente $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

Métrico u ortonormal

Un sistema de referencia $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ se llama **métrico** u **ortonormal** si la base B=$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es ortonormal.

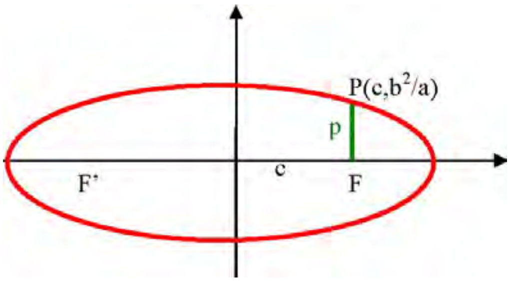
La base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es **ortonormal** o **métrica** cuando sus vectores son unitarios ($\|\vec{u}_i\| = 1,\ i = 1,2,3$) y ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

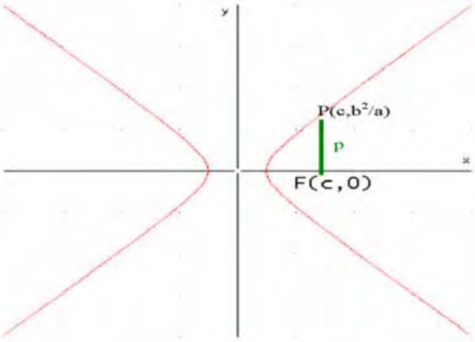
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$, y que: $\begin{cases} |\vec{u}_i| = 1 \Rightarrow \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1 \\ \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Parámetro

- Símbolo que representa una constante en un problema cuyo valor puede variar de unos casos a otros.
- Variable que interviene en las ecuaciones de algunos lugares geométricos.

En las cónicas con centro el **parámetro** focal es la semicuerda que pasa por el foco perpendicular al eje focal, cuyo valor es: $p = b^2/a$





En la parábola es la distancia del foco a la directriz.

Eje

Eje es la recta del plano o del espacio que sirve de referencia a los puntos de ese plano o de ese espacio o bien a una figura o a una transformación**.**
La elipse y la hipérbola tienen dos **ejes de simetría**; la parábola solamente uno que pasa por su vértice.

Eje de coordenadas: cada una de las rectas mediante las que se define un sistema de coordenadas cartesianas en el plano o en el espacio.
Eje de abscisas: eje de coordenadas, generalmente horizontal, en un sistema de coordenadas cartesianas del plano y que se denomina X.
Eje de ordenadas: eje de coordenadas, generalmente vertical, en un sistema de coordenadas cartesianas del plano y que se denomina Y.

Eje focal: en una cónica es el eje de simetría que contiene a los focos.

- **Eje mayor** en la elipse corresponde al eje focal
- **Eje menor** en la elipse corresponde al eje no focal

Eje polar en coordenadas cartesianas polares es la semirrecta que parte del polo.

Eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de las dos circunferencias.

Semiejes

En una elipse son las distancias entre los vértices divididas por dos:

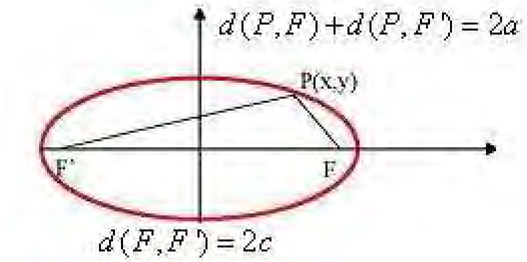
- **Semieje mayor**: a
- **Semieje menor**: b

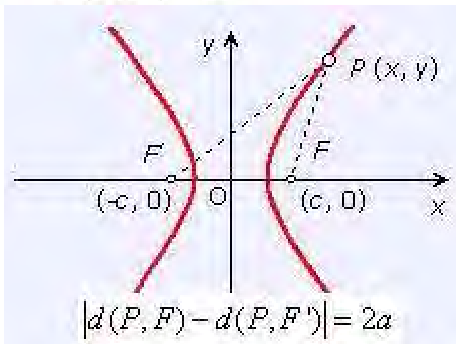
Vértice

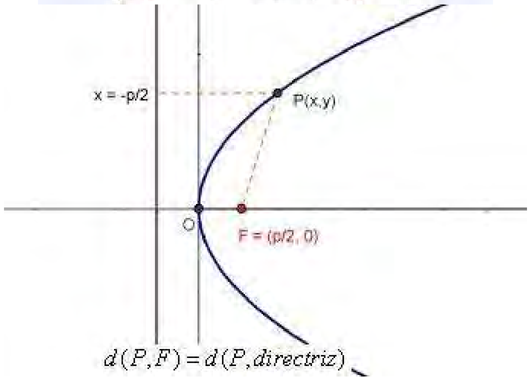
En general, punto en que concurren los dos lados de un ángulo.
En las cónicas son los puntos que obtenemos por intersección de los ejes de simetría con la cónica.
En la elipse en forma canónica son: A(a,0); A´(-a,0);B(0,b);B´(0,-b).
En la hipérbola en forma canónica son: A(a,0); A’(-a,0).
En la parábola en forma canónica es el origen O(0,0), exactamente a mitad del camino del foco a la directriz.

Focos

Focos de una sección cónica son los puntos de contacto de su plano con las esferas inscritas en el cono y tangentes a dicho plano (el de la sección).
Relativo a una cónica es cada uno de los puntos fijos que determinan la cónica. Las cónicas con centro (elipse e hipérbola) tienen dos (a una distancia c del centro) y la parábola uno.







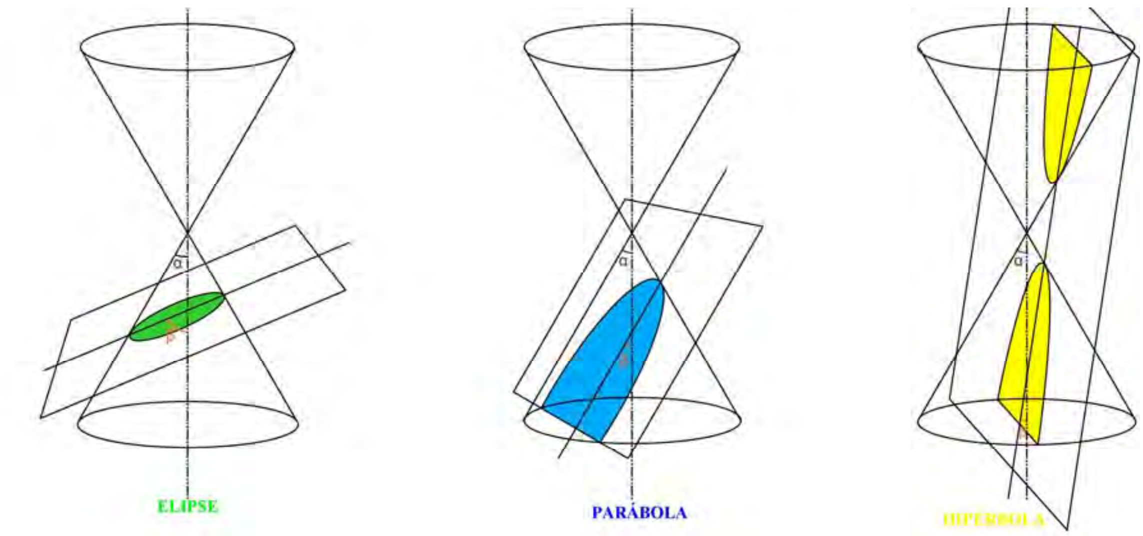
Directriz

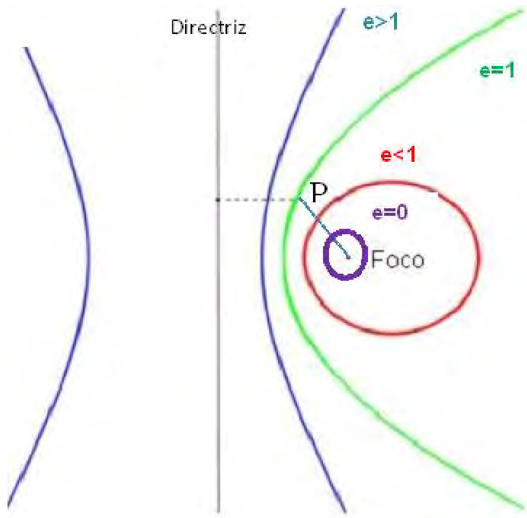
Directriz de una sección cónica es la recta intersección del plano de la cónica con el plano que contiene a la circunferencia de contacto (con el cono) correspondiente a uno de los focos.
En una cónica es la recta fija que la determina. Las cónicas con centro (elipse e hipérbola) tienen dos y la parábola una.

Excentricidad

Valor constante del cociente de la distancia de los puntos de la cónica al foco y a la directriz. En el caso de la **elipse** es menor que 1, igual a 1 para la **parábola** y mayor que 1 en la **hipérbola**.

$e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \dfrac{c}{a}$; siendo c la semidistancia focal y a el semieje real



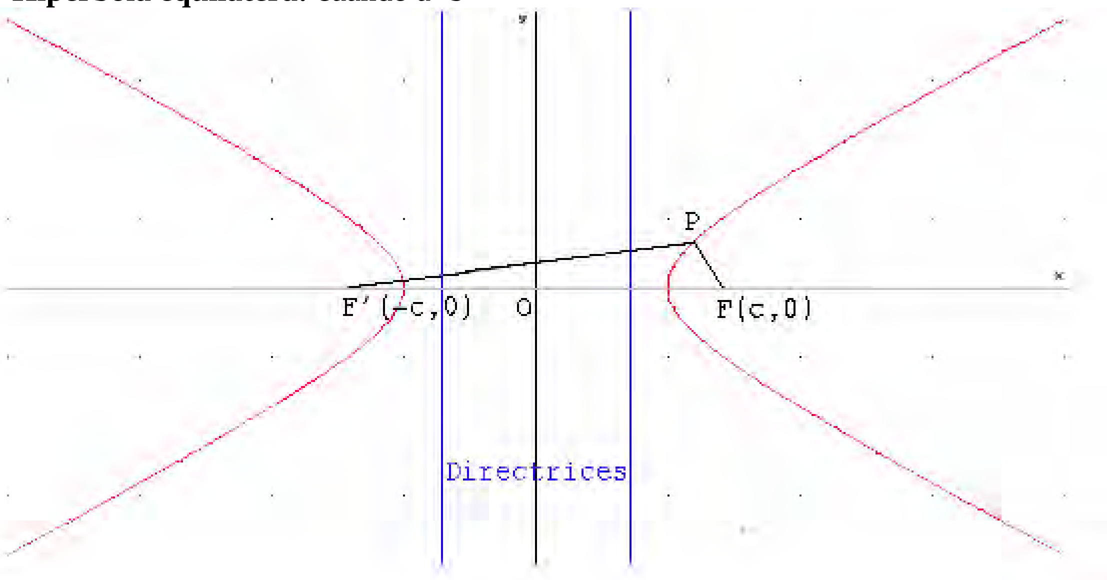


Hipérbola

La diferencia de las distancias de un punto cualquiera de la hipérbola a los focos es igual a 2a.

Sea la hipérbola de ecuación canónica $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, entonces:

- **Excentricidad:** $e = \frac{c}{a} > 1$
- **Vértices**: A(a,0); A'(-a,0).
- **Focos**: F(c,0); F'(-c,0).
- **Directrices**: $x = a^2 / c; x = -a^2 / c$
- **Ejes de simetría**: x=0; y=0; eje focal: y=0
- **Centro**: O(0,0) punto de intersección de los ejes de simetría
- **Distancia focal**: d(F,F')=2c.
- **Parámetro focal**: $p = b^2 / a$
- **Hipérbola equilátera:** cuando a=b

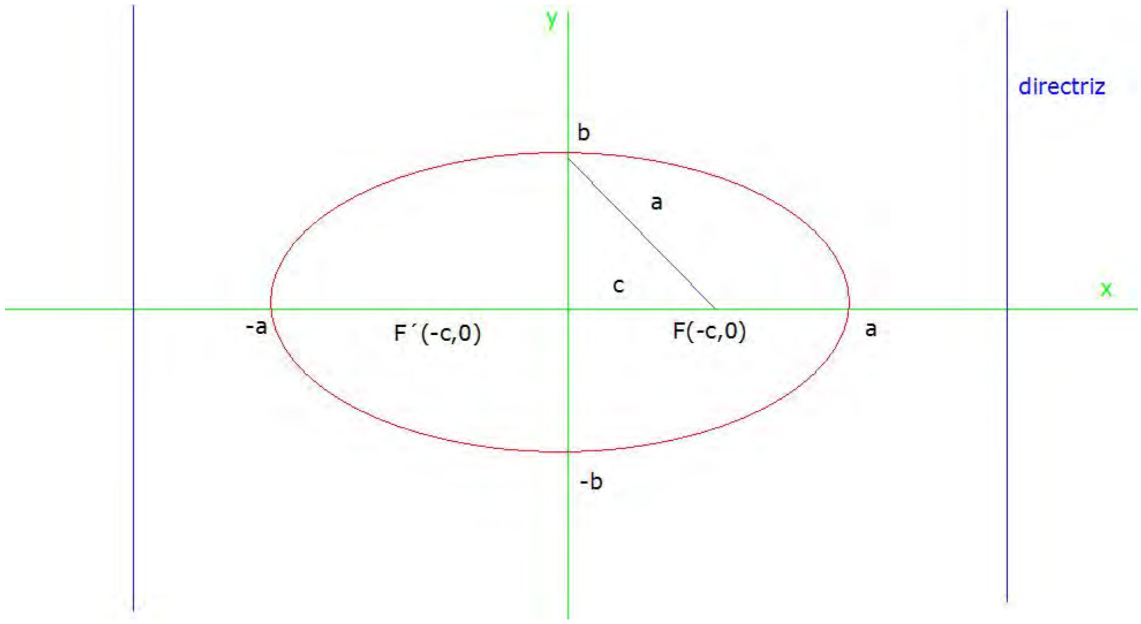


Elipse

La suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es igual al doble de su semieje mayor.

Sea la **elipse** de ecuación reducida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, entonces:

- **Excentricidad:** $e=\frac{c}{a}<1$
- **Vértices:** A(a,0); A´(-a,0); B(0,b); B´(0,-b).
- **Semieje mayor**: a; **semieje menor**: b.
- **Focos**: F(c,0); F'(-c,0).
- **Directrices**: $x=\pm\frac{a^2}{c}$
- **Ejes de simetría**: x=0; y=0; eje focal o eje mayor: y=0.
- **Centro**: O(0,0) punto de intersección de los ejes de simetría.
- **Distancia focal**: d(F,F´)=2c.
- **Parámetro focal**: $p=b^2/a$



Coordenadas cartesianas rectangulares

Si $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un sistema de referencia ortonomal y A, B, y C son puntos tales que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}_1, \overrightarrow{OB} = \vec{u}_2, \overrightarrow{OC} = \vec{u}_3$, las rectas OA=i, OB=j, y OC=k se llaman **ejes** de **coordenadas cartesianas rectangulares**.

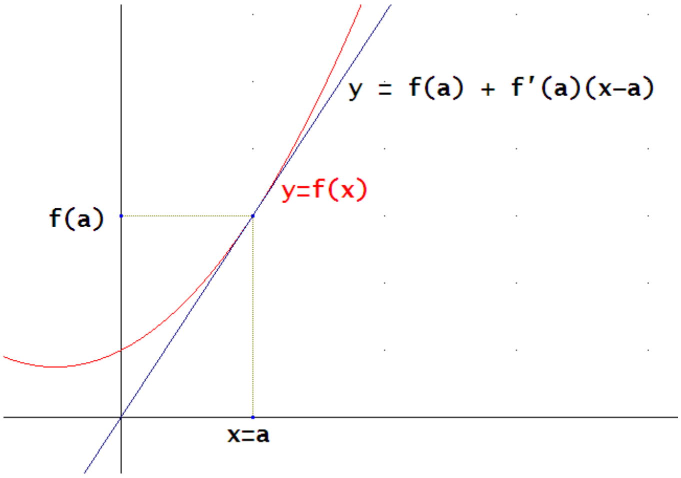
Se llaman **coordenadas cartesianas rectangulares** de un punto a sus coordenadas cartesianas cuando el sistema de referencia es métrico u ortonormal.

Recta tangente

La **recta tangente** a la curva

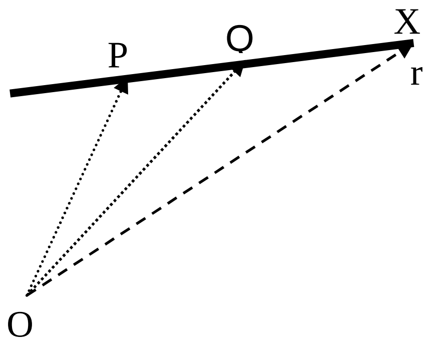
$y = f(x)$ en el punto $(a,f(a))$ en el cual f es derivable es la siguiente:

$$y - f(a)=f\,'(a)(x - a)$$



La recta en el Espacio

Una recta queda determinada por dos puntos P y Q distintos. Si X es un punto cualquiera de la recta y $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ un sistema de referencia del espacio afín, la ecuación vectorial de la recta es:



$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+t\,\overrightarrow{PQ}$ y sus ecuaciones paramétricas para $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$, y $X=(x_1,x_2,x_3)$ respecto de R,

son: $\begin{cases} x_1=p_1+t(q_1-p_1)\\ x_2=p_2+t(q_2-p_2)\\ x_3=p_3+t(q_3-p_3)\end{cases}$

Sea $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ un **vector director** de la recta, entonces la ecuación vectorial es $X=P+t\vec{v}$ y las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1=p_1+tv_1\\ x_2=p_2+tv_2\\ x_3=p_3+tv_3\end{cases}$. De donde en forma continua: $\dfrac{x_1-p_1}{v_1}=\dfrac{x_2-p_2}{v_2}=\dfrac{x_3-p_3}{v_3}$.

La recta en el Plano

Siendo m la pendiente; n la ordenada en el origen; $P(x_0,y_0)$ un punto cualquiera y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ un vector director.

- Ecuación de la recta en forma explícita: $y=mx+n$
- Ecuación de la recta en forma punto pendiente: $y-y_0=m(x-x_0)$
- Ecuación general de la recta en el plano: $ax+by+c=0$
- Ecuaciones paramétricas de la recta: $\begin{cases} x=x_0+tv_1\\ y=y_0+tv_2\end{cases}$
- Ecuación de la recta en forma continua: $\dfrac{x-x_0}{v_1}=\dfrac{y-y_0}{v_2}$

Intersección

Conjunto de los elementos que son comunes a dos conjuntos.

Intersección de la curva con las asíntotas

Los puntos de intersección de la curva con una de sus asíntotas se obtienen resolviendo el sistema formado por la ecuación de la curva y la ecuación de la asíntota.

Intersección de la curva con los ejes de coordenadas

Estos puntos se obtienen haciendo $x = 0$ e $y = 0$, para calcular los puntos de corte con el eje de ordenadas y de abscisas respectivamente.

Ecuación reducida

Corresponde a la ecuación de una cónica centrada en el origen de coordenadas y cuyos ejes de simetría son los ejes coordenados. Para el caso de la parábola será el vértice el situado en el origen.

- **Elipse:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, eje focal en el eje de abscisas
- **Hipérbola:** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, eje focal en el eje de abscisas
- **Parábola:** $y^2=2px$, eje focal en el eje de abscisas positivo

Puntos de cortes con los ejes coordenados.

- Corta al eje Y si existe el punto (0, f(0)).

Si x=0 entonces y=f(0).

- La gráfica de f(x) corta al eje X, si existe x_0 tal que el punto $(x_0, 0) \in f(x)$. Su cálculo se realiza resolviendo la ecuación f(x)=0.

Si y=0 entonces f(x)=0.

Recta normal

- La **recta normal** a la curva y = f(x) en el punto (a,f(a)) en el cual f es derivable es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto: y-f(a)= - (x-a)/ f ’(a)
- **Recta normal a una superficie**

Si $P_0(x_0,y_0,z_0)$ es un punto de la superficie S, definida por la función z=f(x,y), donde existe el plano tangente, entonces existe la recta normal a S en $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y es la recta perpendicular al plano tangente por P_0. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = x_0 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot t \\ y = y_0 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot t \\ z = z_0 - t \end{cases} \quad \text{o bien,} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot t \\ y = y_0 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot t \\ z = z_0 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0} \cdot t \end{cases}$$